

Examen - 3 janvier 2023 (durée : 2h)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique. Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 *Nombres complexes*

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + (2 - i)z + 5i - 1 = 0$ (INDICATION : $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$)
2. Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^6 (1 - i)^k$.

Exercice 2 Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit le point $M(0, 4)$ et la droite \mathcal{D} d'équation $y = x - 2$. Soit P la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} .

1. Faire un dessin (soigné) représentant M , \mathcal{D} et P .
2. Calculer (en expliquant votre raisonnement) les coordonnées de P .

Exercice 3 *Logarithme et valeur absolue*

On pose $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln |x|$ et $f_3(x) = |\ln x|$.

1. Quels sont les domaines de définition de f_1 , f_2 et f_3 ?
2. Sans aucun calcul : tracer l'allure de la courbe représentative de f_1 (que vous devez connaître), et en déduire sur le même dessin les allures des courbes de f_2 et f_3 .

Exercice 4 *Etude(s) de la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$*

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que $f(x)$ est du même signe que x .
3. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Calculer la dérivée de f . Quel est son signe? (INDICATION : on pourra montrer que $f'(x)$ est de même signe que $f(x)$)
5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Montrer que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
7. Tracer avec soin la courbe représentative de f .

Exercice 5 *Calculs de primitives et d'intégrales*

1. Déterminer les primitives de $f(x) = x \ln x$
2. Soit $I = \int_{1/2}^2 \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$
 - 2.a. Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans I .
 - 2.b. En déduire la valeur de I .