Quick Test 3 - Sujet A - Correction

Exercice 1 (4pts) Soient le point M et le plan $\mathcal{P}$:

$$M = (-1,0,1) \text{ et } \mathcal{P} := \begin{cases} x = 3 - \alpha + 2\beta \\ y = 2 + \alpha - \beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

(i) Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On rappelle que l'équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ (donnée ci-dessus) est composée d'un point du plan $\mathcal{P}$ (ici, $A = (3,2,1)$) et de deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$, dont les coordonnées u_x, u_y et u_z sont données par les coefficients devant les paramètres α et β.

On connait donc deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs donne un vecteur perpendiculaire à ces deux vecteurs. Puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont font tous deux partie de $\mathcal{P}$, $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ a donc pour résultat un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.

$$\vec{n} = \vec{u_1} \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 - (-1 \times (-1)) \\ -(-1 \times 0 - (2 \times 1)) \\ -1 \times (-1) - (2 \times 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) En déduire une équation paramétrique de la Droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par M.

L'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est composée (de la même façon que le plan $\mathcal{P}$), d'un point de la droite $\mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur de la droite Droite $\mathcal{D}$. Puisque la droite $\mathcal{D}$ doit être perpendiculaire à $\mathcal{P}$, alors le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ (car il est normal à $\mathcal{P}$). Et puisque la droite $\mathcal{D}$ doit passer par le point M, alors on connait l'un des points de la droite $\mathcal{D}$: le point M lui-même.

On trouve donc une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} := \begin{cases} x = x_M + x_n\alpha = -1 + \alpha \\ y = y_M + y_n\alpha = 0 + 2\alpha \\ z = z_M + z_n\alpha = 1 - \alpha \end{cases}, \mathcal{D} := \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

(iii) Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

On rappelle la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

avec $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$. En remplaçant les coefficients α, β et γ par leur valeur (trouvée à la première question) et en remplaçant x,y et z par les cordonnées d'un point quelconque de $\mathcal{P}$ (par exemple le point $A = (3, 2, 1)$, d'après l'équation paramétrique donnée dans l'énoncé), on cherche la valeur de δ en résolvant l'équation :

$$1 \times 3 + 2 \times 2 + (-1) \times 1 + \delta = 0$$

$$\delta = -6$$

D'où l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$: $x + 2y - z - 6 = 0$

Exercice 2 (3pts) Calculez les dérivées des fonctions suivantes, ignorez l'ensemble de définition.

(i) $x^3 e^{2x}$

On rappelle que $(uv)' = u'v + uv'$ et $(g(u))' = u'g'(u)$. D'où la dérivée :

$$\begin{aligned}\left(x^3 e^{2x}\right)' &= (x^3)' e^{2x} + x^3 (e^{2x})' \\ &= 3x^2 e^{2x} + x^3 (2e^{2x}) \\ &= e^{2x}\left(3x^2 + 2x^3\right)\end{aligned}$$

(ii) $\ln(\cos(x))$

On rappelle que $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et $(\cos(u))' = -\sin(u)$

$$\begin{aligned}(\ln(\cos(x)))' &= \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= -\tan(x)\end{aligned}$$

Exercice 3 (3pts) Calculez les limites suivantes. Si c'est une forme indéterminée, levez l'indétermination.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 + 2x + 8}{2x^3 - 6x + 4} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise en haut et en bas par x^3 :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2x + 8}{2x^3 - 6x + 4} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(3 + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3})}{x^3(2 - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3})} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{2 - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3}} \\
&= \frac{3 + 0 + 0}{2 - 0 + 0} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{0}{0}$

C'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On va chercher à se rapporter à la formule du nombre dérivé. On peut aussi utiliser la règle de l'Hôpital, mais ça revient à faire une utilisation indirecte du nombre dérivée (voir la banane à la fin du 4.4.3 du polycopié). Attention, si vous souhaitez utiliser la règle de l'Hôpital, pensez bien à mentionner qu'on l'utilise parce que c'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - 0}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}, \text{ c'est l'expression du nombre dérivé de la fonction sinus en } 0 \\
&= (\sin(0))' \\
&= \cos(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 4 (10pts) Faites l'étude complète de la fonction suivante.

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x}$$

(i) Ensemble de définition.

La fonction f est défine lorsque le dénominateur n'est pas nul, elle est donc définie pour tout $x \neq 0$, càd $\mathbb{R}^*$.

(ii) La fonction est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

$$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{-x} = \frac{1+x^2}{-x} = -\frac{1+x^2}{x} = -f(x)$$

La fonction est donc impaire.

(iii) Limites aux bornes de l'ensemble de définition. On s'intéresse aux limites :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+x}{1} = 0^- - \infty = -\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car f est impaire
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ car f est impaire

(iv) Trouver la dérivée et établir le tableau de variation de f.

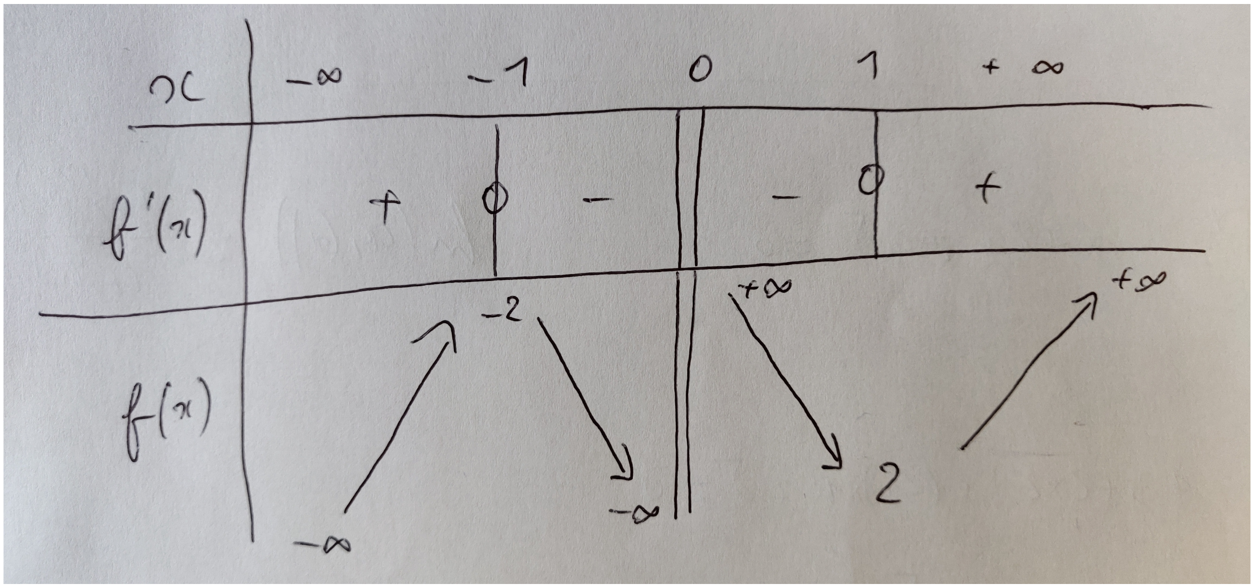
On rappelle que $(uv)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1+x^2}{x}\right)' = \frac{2x\cdot x-(1+x^2)}{x^2} = \frac{2x^2-1-x^2}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

On cherche le sens de variation de $f(x)$, càd le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \implies \frac{x^2-1}{x^2} &= 0 \\ x^2-1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

On calcule facilement que $f'(x)$ est négative pour $-1 < x < 1$, et positive autre part. On calcule facilement $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$



(v) Quelles sont les asymptotes de la fonction (verticales, horizontales, obliques) ? Donner leur équation. Tracer ensuite l'allure "globale" de la courbe.

- On a déjà une asymptote verticale en $x = 0$.
- On cherche une éventuelle asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$. On va faire l'étude en $+\infty$ uniquement, car f est impaire.
- On rappelle la méthode, on cherche d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

  On a donc soit une asymptote oblique de pente 1, soit une direction asymptotique de pente 1.

- Pour trancher, on cherche maintenant $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x)$, avec α la pente trouvée à la question précédente (ici 1).

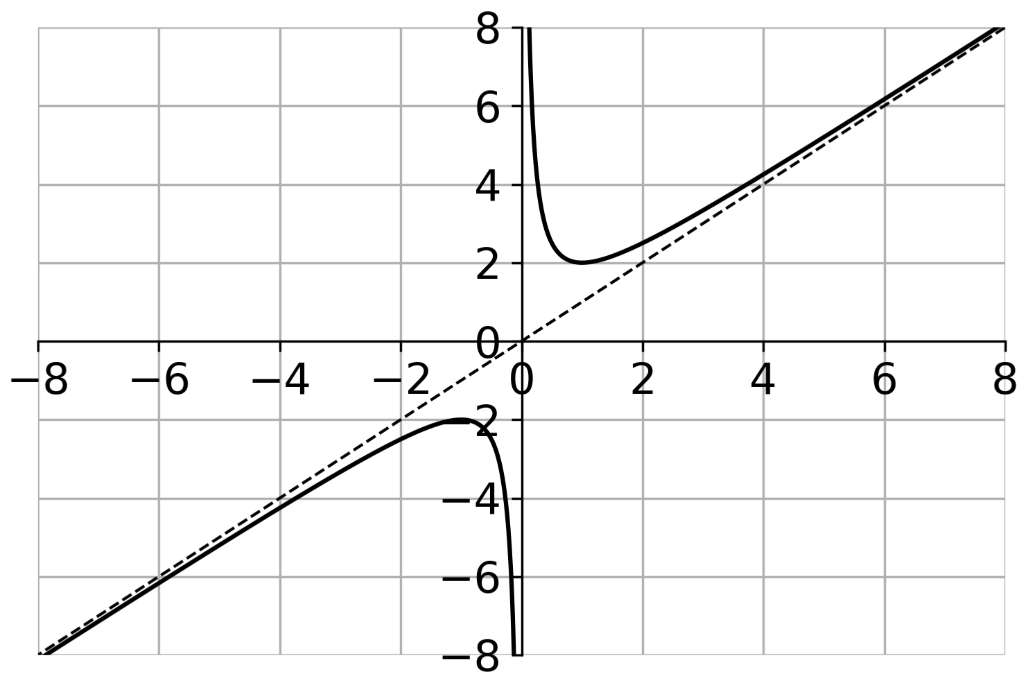
$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{x} - x \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{x} - \frac{x^2}{x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2 - x^2}{x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \\
&= 0^+
\end{aligned}
$$

Cette limite tend vers un nombre réel, qui correspond à l'ordonnée à l'origine de l'asymptote. On a donc bien une asymptote oblique d'équation $y = x$.

- On cherche finalement à savoir par quel côté la courbe de $f(x)$ se rapproche de l'asymptote $y(x) = x$

  On calcule donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+x^2}{x} - x = 0^+ > 0$.

  Donc la courbe se rapproche de l'asymptote par dessus.



Quick Test 3 - Sujet B

Exercice 1 (4pts) Soient le point M et le plan $\mathcal{P}$:

$$M = (0, 1, -1) \text{ et } \mathcal{P} := \begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha - 2\beta \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

(i) Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On rappelle que l'équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ (donnée ci-dessus) est composée d'un point du plan $\mathcal{P}$ (ici, $A = (1, 2, 3)$) et de deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$, dont les coordonnées u_x, u_y et u_z sont données par les coefficients devant les paramètres α et β.

On connait donc deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs donne un vecteur perpendiculaire à ces deux vecteurs. Puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont font tous deux partie de $\mathcal{P}$, $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ a donc pour résultat un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.

$$\vec{n} = \vec{u_1} \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 0 - (-2 \times 1) \\ -(1 \times 0 - (1 \times 1)) \\ 1 \times (-2) - (1 \times (-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) En déduire une équation paramétrique de la Droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par M.

L'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est composée (de la même façon que le plan $\mathcal{P}$), d'un point de la droite $\mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur de la droite Droite $\mathcal{D}$. Puisque la droite $\mathcal{D}$ doit être perpendiculaire à $\mathcal{P}$, alors le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ (car il est normal à $\mathcal{P}$). Et puisque la droite $\mathcal{D}$ doit passer par le point M, alors on connait l'un des points de la droite $\mathcal{D}$: le point M lui-même.

On trouve donc une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} := \begin{cases} x = x_M + x_n\alpha = 0 + 2\alpha \\ y = y_M + y_n\alpha = 1 + \alpha \\ z = z_M + z_n\alpha = -1 - \alpha \end{cases}, \mathcal{D} := \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

(iii) Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

On rappelle la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

avec $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$. En remplaçant les coefficients α, β et γ par leur valeur (trouvée à la première question) et en remplaçant x,y et z par les cordonnées d'un point quelconque de $\mathcal{P}$ (par exemple le point $A = (1, 2, 3)$, d'après l'équation paramétrique donnée dans l'énoncé), on cherche la valeur de δ en résolvant l'équation :

$$2 \times 1 + 1 \times 2 - 1 \times 3 + \delta = 0$$

$$\delta = -1$$

D'où l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$: $2x + y - z - 1 = 0$

Exercice 2 (3pts) Calculez les dérivées des fonctions suivantes, ignorez l'ensemble de définition.

(i) $x^2 \ln\left(x^3\right)$

On rappelle que $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$. D'où la dérivée :

$$\begin{aligned}\left(x^2 \ln\left(x^3\right)\right)' &= (x^2)' \ln\left(x^3\right) + x^2 \left(\ln\left(x^3\right)\right)' \\ &= 2x \ln\left(x^3\right) + x^2 \frac{3x^2}{x^3} \\ &= 2x \ln\left(x^3\right) + 3x \\ &= x\left(2 \ln\left(x^3\right) + 3\right)\end{aligned}$$

(ii) $\cos\left(e^{2x}\right)$

On rappelle que $(\cos(x))' = -\sin(x)$ et $(g(u))' = u'g'(u)$. D'où la dérivée :

$$\begin{aligned}\left(\cos\left(e^{2x}\right)\right)' &= \left(e^{2x}\right)' \times \left(-\sin\left(e^{2x}\right)\right) \\ &= -2e^{2x} \sin\left(e^{2x}\right)\end{aligned}$$

Exercice 3 (3pts) Calculez les limites suivantes. Si c'est une forme indéterminée, levez l'indétermination.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x + 2}{2x^2 - 2x + 1}$

C'est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise en haut et en bas par x^2 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}$$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

C'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On va chercher à se rapporter à la formule du nombre dérivé. On peut aussi utiliser la règle de l'Hôpital, mais ça revient à faire une utilisation indirecte du nombre dérivée (voir la banane à la fin du 4.4.3 du polycopié). Attention, si vous souhaitez utiliser la règle de l'Hôpital, pensez bien à mentionner qu'on l'utilise <u>parce que c'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$</u>.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - 0}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}, \text{ c'est l'expression du nombre dérivé de la fonction sinus en } 0 \\
&= (\sin(0))' \\
&= \cos(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 4 (10pts) Faites l'étude complète de la fonction suivante.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x}$$

(i) Ensemble de définition.
La fonction f est défine lorsque le dénominateur n'est pas nul, elle est donc définie pour tout $x \neq 0$, càd $\mathbb{R}^*$.

(ii) La fonction est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?

$$f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{-x} = \frac{1-x^2}{-x} = -\frac{1-x^2}{x} = -f(x)$$

La fonction est donc impaire.

(iii) Limites aux bornes de l'ensemble de définition. On s'intéresse aux limites :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-x}{1} = 0^- + \infty = +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car f est impaire
- $\lim_{x\to0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ car f est impaire

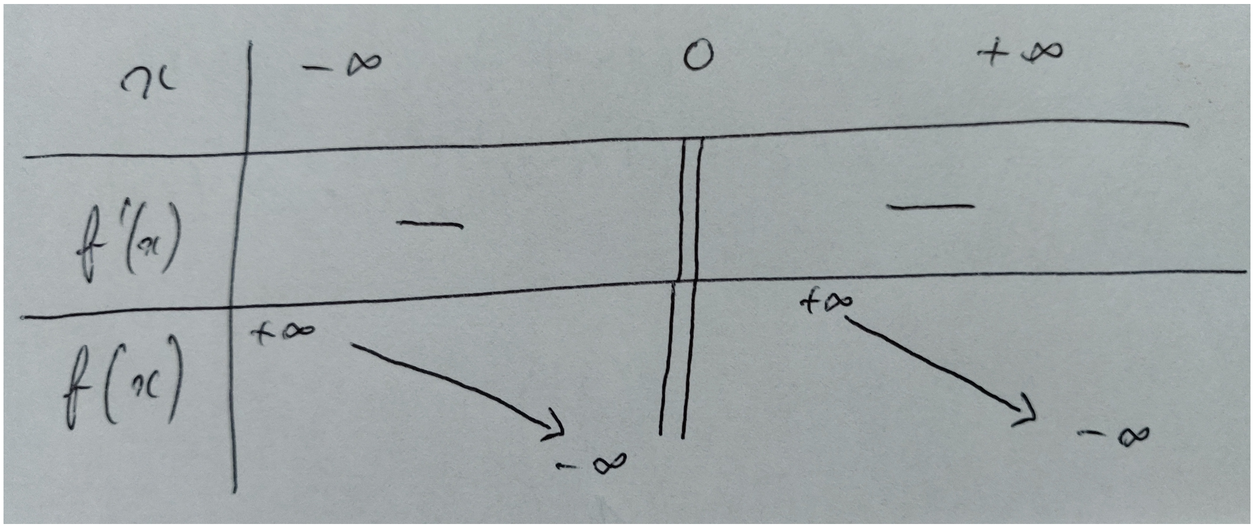
(iv) Trouver la dérivée et établir le tableau de variation de f.
On rappelle que $(uv)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1-x^2}{x}\right)' = \frac{-2x\cdot x-(1-x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2-1+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-1}{x^2}$$

On cherche le sens de variation de $f(x)$, càd le signe de $f'(x)$:

$$f'(x) < 0 \implies \frac{-x^2-1}{x^2} < 0$$
$$-x^2-1 < 0$$

Cette relation est vraie pour tout x, f' est donc toujours négative sur $\mathbb{R}^*$. Donc f est décroissante sur tout son ensemble de définition.



(v) Quelles sont les asymptotes de la fonction (verticales, horizontales, obliques) ? Donner leur équation. Tracer ensuite l'allure "globale" de la courbe.

- On a déjà une asymptote verticale en $x = 0$.
- On cherche une éventuelle asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$. On va faire l'étude en $+\infty$ uniquement, car f est impaire.
- On rappelle la méthode, on cherche d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1} \\
&= -1
\end{aligned}$$

On a donc soit une asymptote oblique de pente -1, soit une direction asymptotique de pente -1.

- Pour trancher, on cherche maintenant $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x)$, avec α la pente trouvée à la question précédente (ici -1).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x} + x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x} + \frac{x^2}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2+x^2}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \\
&= 0^+
\end{aligned}$$

Cette limite tend vers un nombre réel, qui correspond à l'ordonnée à l'origine de l'asymptote. On a donc bien une asymptote oblique d'équation $y = -x$.

- On cherche finalement à savoir par quel côté la courbe de $f(x)$ se rapproche de l'asymptote $y(x) = -x$

  On calcule donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{x} + x = 0^+ > 0$.

  Donc la courbe se rapproche de l'asymptote par dessus.