Examen - 3 janvier 2023 (durée : 2h)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique.
Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 *Nombres complexes*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2-i)\,z + 5i - 1 = 0$ (INDICATION : $\sqrt{7^2+24^2} = 25$)

Nous avons affaire à une équation polynomiale de degré 2. On va la résoudre en calculant son discriminant Δ, dont on cherchera ensuite une racine δ ($\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$). Les deux solutions de l'équation seront alors finalement $z_1 = \frac{-2+i-\delta}{2}$ et $z_2 = \frac{-2+i+\delta}{2}$.

On a ici : $\Delta = (2-i)^2 - 4(5i-1) = 4 - 4i - 1 - 20i + 4 = 7 - 24i$. Notons maintenant $\delta = a+ib$. L'égalité $\delta^2 = \Delta$ implique $a^2 - b^2 = 7$ (égalité des parties réelles) et $2ab = -24 < 0$ (égalité des parties imaginaires). De plus, on a égalité des modules $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire $a^2 + b^2 = \sqrt{7^2+24^2} = 25$. On a donc le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & (1) \\ a^2 + b^2 = 25 & (2) \\ ab < 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant (1) + (2), puis (2) − (1), on en déduit $a^2 = 16$ et $b^2 = 9$, soit $a = \pm 4$ et $b = \pm 3$.
D'après (3), a et b sont de signes opposés. D'où $\delta = 4 - 3i$ (ou son opposé).
Les 2 racines du polynôme sont donc :

$$z_1 = \frac{-2+i+4-3i}{2} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-2+i-4+3i}{2} = -3 + 2i$$

2. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} (1-i)^k$.

On doit faire la somme de termes successifs d'une suite géométrique de raison $q = (1-i)$.
On a donc

$$S = \sum_{k=1}^{6} q^k = q\,\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^5\right) = q\frac{1-q^6}{1-q}$$

Il reste donc à calculer cette expression.
On a $1-q = i$, donc $1/(1-q) = 1/i = i/i^2 = -i$. D'où $S = -i(1-i)(1-q^6) = -(1+i)(1-q^6)$.
Il reste à calculer q^6. Pour cela, on peut écrire q sous forme exponentielle :

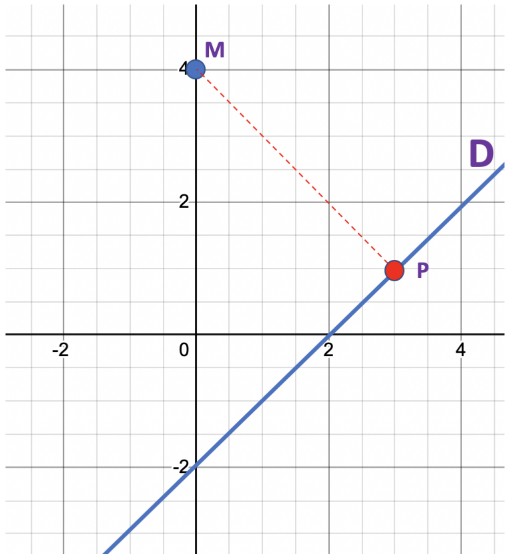
$$q = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$$

D'où $q^6 = \sqrt{2}^6\,e^{-i6\pi/4} = 8\,e^{i\pi/2} = 8i$.
Finalement : $S = -(1+i)(1-8i) = -(9-7i) = -9 + 7i$.

Exercice 2 Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit le point $M(0,4)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.

Soit P la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

1. Faire un dessin (soigné) représentant M, $\mathcal{D}$ et P.



2. Calculer (en expliquant votre raisonnement) les coordonnées de P.

La projection orthogonale P de M sur $\mathcal{D}$ est caractérisée par les 2 conditions $\overrightarrow{MP} \perp \mathcal{D}$ et $P \in \mathcal{D}$.

- $\overrightarrow{MP} \perp \mathcal{D}$ signifie que $\overrightarrow{MP}.\vec{u} = 0$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. L'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ étant $x - y - 2 = 0$, $\vec{u} = (1, 1)$ en est un vecteur directeur. En notant (x_P, y_P) les coordonnées de P, on a donc :

$$\overrightarrow{MP}.\vec{u} = (x_P, y_P - 4).(1, 1) = x_P + y_P - 4 = 0$$

- $P \in \mathcal{D}$ signifie que P vérifie l'équation de $\mathcal{D}$: $x_P - y_P - 2 = 0$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x_P + y_P &= 4 \quad (1) \\ x_P - y_P &= 2 \quad (2) \end{cases}$$

(1)+(2) donne $x_P = 3$ et (1)-(2) donne $y_P = 1$. D'où $P(3, 1)$, ce qui correspond bien au dessin précédent.

Exercice 3 *Logarithme et valeur absolue*

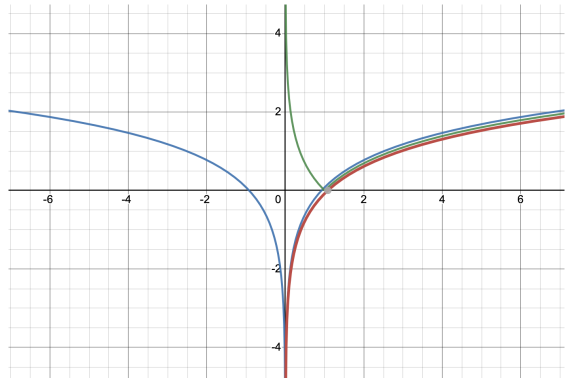
On pose $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln|x|$ et $f_3(x) = |\ln x|$.

1. Quels sont les domaines de définition de f_1, f_2 et f_3 ?

Le domaine du logarithme est $]0, +\infty[$. Donc $D_{f_1} =]0, +\infty[$.
De même, $f_2(x)$ est défini si et seulement si $|x| > 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$. Donc $D_{f_2} = \mathbb{R}^*$.
$f_3(x) = |f_1(x)|$. Donc $D_{f_3} = D_{f_1} =]0, +\infty[$

2. Sans aucun calcul : tracer l'allure de la courbe représentative de f_1 (que vous devez connaitre), et en déduire sur le même dessin les allures des courbes de f_2 et f_3.

On connait l'allure de la courbe de $\ln x$ (en rouge). On en déduit celle de f_2 par symétrie par rapport à l'axe vertical (en bleu), et celle de f_3 par symétrie par rapport à l'axe horizontal sur l'intervalle $x \in]0,1[$ où $\ln x$ est négatif.



Exercice 4 *Etude(s) de la fonction* $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
$f(x)$ est défini si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x^2 \geq 1$.
Or $x^2 \geq 1 \iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1} \iff |x| \geq 1$. Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

2. Montrer que $f(x)$ est du même signe que x.

- Si $x \in [1, +\infty[$, x et $\sqrt{x^2-1}$ sont positifs, et donc $f(x) > 0$.
- Si $x \in]-\infty, -1]$, on peut transformer $f(x)$ en multipliant par la conjuguée :

$$f(x) = x+\sqrt{x^2-1} = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$$

Le numérateur est positif et le dénominateur est négatif, donc $f(x) < 0$.

$f(x)$ est donc du même signe que x pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

3. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

- Quand $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers $+\infty$. On utilise l'expression $f(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$.
  Le dénominateur tend vers $-\infty$, donc $f(x) \to 0$.
- Quand $x \to +\infty$, $\sqrt{x^2-1}$ tend vers $+\infty$ et donc $f(x) \to +\infty$.

4. Calculer la dérivée de f. Quel est son signe ? (INDICATION : on pourra montrer que $f'(x)$ est de même signe que $f(x)$)

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

Le dénominateur étant positif, $f'(x)$ est de même signe que $f(x)$.
ATTENTION : on voit au passage que $f'(x)$ n'est pas définie en $x = -1$ et $x = 1$ (car le dénominateur s'annule). En ces deux points, $f'(x)$ tend vers l'infini, donc les tangentes à la courbe seront verticales.

5. Dresser le tableau de variations de f.
On rassemble les informations précédentes, en ajoutant les valeurs $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	// // //	$\|\|$	$+$	
f	0						$+\infty$
		$\searrow$		// // //		$\nearrow$	
			-1		1		

6. Montrer que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

f a une branche infinie quand x tend vers $+\infty$. Pour étudier l'existence éventuelle d'une asymptote oblique, on calcule

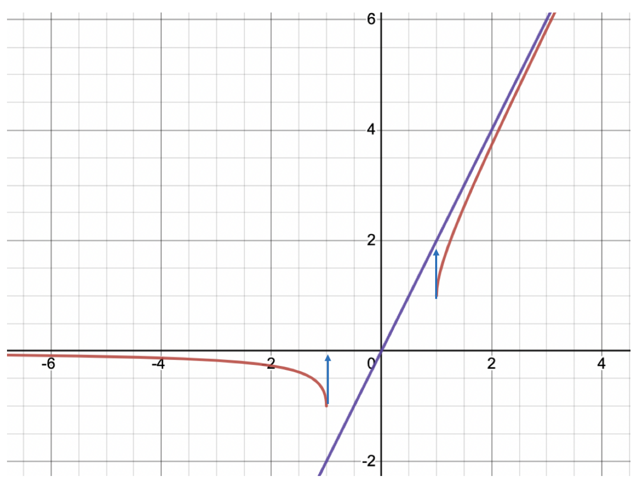
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{x + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = 1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 2 \text{ quand } x \longrightarrow +\infty$$

Il y a donc peut-être une asymptote de pente 2. On calcule maintenant

$$f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \left(\sqrt{x^2-1} - x\right)\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \longrightarrow 0^- \text{ quand } x \longrightarrow +\infty$$

La droite $y = 2x$ est donc asymptote à f au voisinage de $+\infty$. $f(x) - 2x$ étant négatif au voisinage de $+\infty$, la courbe est sous la droite.

7. Tracer avec soin la courbe représentative de f.



Exercice 5 *Calculs de primitives et d'intégrales*

1. Déterminer les primitives de $f(x) = x \ln x$

On fait une intégration par parties. La formule d'intégration par parties indique que $\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx$. Posons ici $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$. On a donc $u(x) = x^2/2$ et $v'(x) = 1/x$. D'où :

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

2. Soit $I = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

2.a. Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans I.

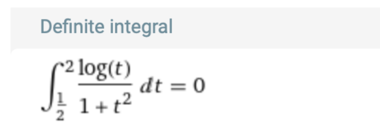
En posant $u = 1/t$, on a $du = -dt/t^2$, c'est-à-dire $du = -u^2\,dt$. De plus, lorsque t vaut $1/2$, u vaut 2, et lorsque t vaut 2, u vaut $1/2$. On a donc :

$$I = \int_{t=1/2}^{t=2} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_{u=2}^{u=1/2} \frac{\ln 1/u}{1+1/u^2}\,\frac{-du}{u^2} = \int_{u=2}^{u=1/2} \frac{-\ln u}{u^2+1}\,(-du) = \int_{u=2}^{u=1/2} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du$$

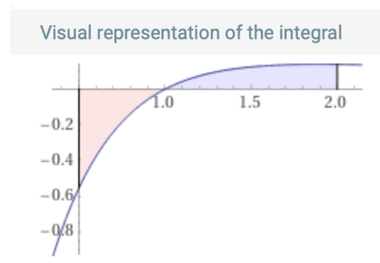
soit

$$I = \int_{t=1/2}^{t=2} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_{u=2}^{u=1/2} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = -\int_{u=1/2}^{u=2} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = -I$$

2.b. En déduire la valeur de I.



On a donc $I = -I$, donc $I = 0$.



Ci-contre, une capture d'écran sur WolframAlpha. La zone rose (surface négative) compense exactement la zone bleue (surface positive), ce qui explique que l'intégrale soit nulle.