Partiel - 10 novembre 2022 (durée : 1h30)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique. Apportez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2(1+i)\,z - 5(1+2i) = 0$

INDICATION : $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$

Nous avons affaire à une équation polynomiale de degré 2. On va la résoudre en calculant son discriminant Δ, dont on cherchera ensuite une racine δ ($\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$). Les deux solutions de l'équation seront alors finalement $z_1 = \frac{-2(1+i)-\delta}{2}$ et $z_2 = \frac{-2(1+i)+\delta}{2}$.

On a ici : $\Delta = 4(1+i)^2 - 4(-5)(1+2i) = 4(1+2i-1+5+10i) = 4(5+12i) = 20+48i$. Notons maintenant $\delta = a+ib$. L'égalité $\delta^2 = \Delta$ implique $a^2 - b^2 = 20$ (égalité des parties réelles) et $2ab = 48 > 0$ (égalité des parties imaginaires). De plus, on a égalité des modules $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire $a^2 + b^2 = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52$. On a donc le système :

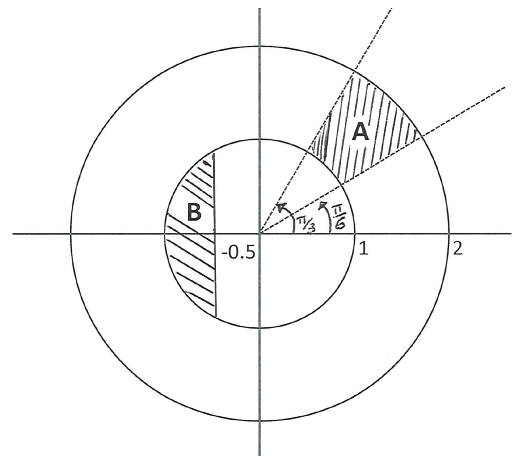
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 20 & (1) \\ a^2 + b^2 = 52 & (2) \\ ab > 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant (1) + (2), puis (2) − (1), on en déduit $a^2 = 36$ et $b^2 = 16$, soit $a = \pm 6$ et $b = \pm 4$. D'après (3), a et b sont de même signe. D'où $\delta = 6 + 4i$ (ou son opposé).
Les 2 racines du polynôme sont donc :

$$z_1 = \frac{-2-2i-6-4i}{2} = -4-3i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-2-2i+6+4i}{2} = 2+i$$

Exercice 2

Chacune des zones A et B indiquées dans le dessin-ci-contre est caractérisée par des conditions sur les affixes z des points dans cette zone. Pour chaque zone, indiquer (en justifiant votre réponse) de quelles conditions il s'agit parmi celles ci-dessous :



(C1) $|z| \geq 2$ et $-1 \leq \mathcal{R}e(z) \leq -\dfrac{1}{2}$

(C2) $\dfrac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{3}$ et $\mathcal{I}m(z) \leq 2$

(C3) $1 \leq |z| \leq 2$ et $\dfrac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{3}$

(C4) $\mathcal{R}e(z) \leq -\dfrac{1}{2}$ et $|z| \leq 1$

(C5) $-1 \leq \mathcal{R}e(z) \leq -\dfrac{1}{2}$ et $-1 \leq \mathcal{I}m(z) \leq 1$

(C6) $\dfrac{1}{2} \leq \mathcal{R}e(z) \leq 2$ et $\dfrac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{3}$

La zone A correspond à une portion de la couronne dont le rayon intérieur vaut 1 et le rayon extérieur vaut 2. Autrement dit, les modules des affixes des points de cette zone sont compris entre 1 et 2 : $1 \leq |z| \leq 2$. De plus, les arguments des affixes des points de cette zone sont compris entre $\pi/6$ et $\pi/3$: $\dfrac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{3}$.

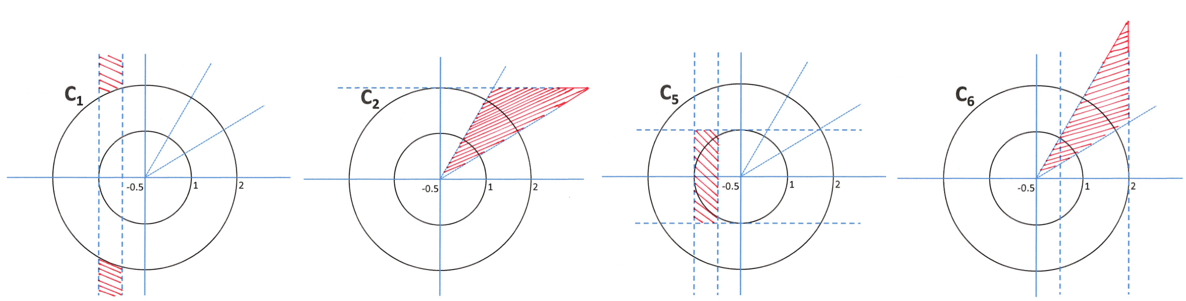
La zone A correspond donc aux conditions (C3).

Remarque : ça ne peut pas être (C1), qui correspond à des points extérieurs au disque de rayon 2, ni (C2) ou (C6) qui sont des zones contenant A mais plus grandes (voir dessin).

La frontière gauche de la zone B correspond au cercle de rayon 1, tandis que sa frontière droite correspond à la droite d'équation $x = -1/2$. La zone B est donc l'intersection du disque de rayon 1 et du demi-plan $x \leq -1/2$. Autrement dit, les affixes des points de cette zone vérifient $|z| \leq 1$ et $\mathcal{R}e(z) \leq -\frac{1}{2}$.

La zone B correspond donc aux conditions (C4).

Remarque : ça ne peut pas être (C1), qui correspond à des points extérieurs au disque de rayon 2, ni (C5) qui est une zone rectangulaire (voir dessin).



Exercice 3

1. Pour quelle(s) valeur(s) des coordonnées a et b les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ? Colinéaires ?

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0. On a ici : $\overrightarrow{u}.\ \overrightarrow{v} = ab + ba = 2ab$. Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $ab = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ et/ou $b = 0$.

On peut vérifier que le cas $a = 0$ mène à $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, tandis que le cas $b = 0$ mène à $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$. On a donc bien orthogonalité dans chaque cas.

Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est égal à 0. On a ici :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $a^2 - b^2 = 0$, c'est-à-dire $a = \pm b$.

On peut vérifier que le cas $a = b$ mène à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, tandis que le cas $a = -b$ mène à $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = -\overrightarrow{v}$. On a donc bien colinéarité dans chaque cas.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont-ils coplanaires ?

Méthode 1 : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont à l'évidence pas colinéaires ($\overrightarrow{u}$ n'est pas un multiple de $\overrightarrow{v}$). A eux deux, ils définissent donc un plan. De plus, le produit vectoriel de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est un vecteur perpendiculaire à chacun des 2 vecteurs. Ainsi $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, et donc au plan qu'ils définissent. $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont donc pas coplanaires.

Méthode 2 : Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul. On peut donc calculer $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, puis $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et conclure.

On a : $$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - 1 \times (-1) \\ -(1 \times 2 - 1 \times 1) \\ 1 \times (-1) - 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'où $$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-1).(-2)+1.2.3+1.(-1).1-(1.(-1).3+1.1.(-2)+1.2.(-1))$$

$$= 2 + 6 - 1 - (-3 - 2 - 2) = 14$$

Le déterminant étant différent de 0, les 3 vecteurs ne sont pas coplanaires.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle non orienté entre ces vecteurs. On rappelle que $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta$ et que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\sin\theta$.

3. Déterminer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

On a :

- $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$
- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$
- $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 2 + (1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Soit $\theta \in [0, \pi]$ l'angle non orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. En appliquant la formule indiquée ci-dessus pour le produit scalaire, on a :

$(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta \iff 2 = \sqrt{2}\,2\sqrt{2}\,\cos\theta.$ Soit $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

θ étant dans $[0, \pi]$, on en déduit immédiatement que $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2$

En utilisant à nouveau les formules précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2\,(\sin\theta)^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2\,(\cos\theta)^2 \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2\,\left[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right] \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{v}\|^2 \qquad \text{car } (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Calculer $S_2 = \sum_{k=1}^{2} k\,(k!)$ et $S_3 = \sum_{k=1}^{3} k\,(k!)$

$S_2 = 1.\,1! + 2.\,2! = 1\times1 + 2\times2 = 5$ et $S_3 = 1.\,1! + 2.\,2! + 3.\,3! = 1\times1 + 2\times2 + 3\times6 = 23$

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k\,(k!) = (k+1)! - k!$

$k\,(k!) = (k+1-1)\,(k!) = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$

3. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(k!)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On déduit de la question précédente que :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(k!) &= \sum_{k=1}^{n} [\,(k+1)! - k!] \\
&= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + [(n-1)! - (n-2)!] + [n! - (n-1)!] + [(n+1)! - n!]
\end{aligned}$$

On reconnait une somme télescopique. Tous les termes se simplifient 2 à 2, sauf le plus petit et le plus grand. Il reste donc finalement :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$$

Ce résultat est-il cohérent avec les valeurs de S_2 et S_3 calculées à la question 1 ?

Ce résultat est cohérent avec les valeurs trouvées à la question 1 : on a bien $S_2 = 3! - 1 = 6 - 1 = 5$ et $S_3 = 4! - 1 = 24 - 1 = 23$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$

Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2i)^{k+1} (1-i)^{7-k}$ et mettre le résultat sous forme exponentielle.

On reconnait presque la formule du binôme de Newton $(a+b)^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^k\, b^{7-k}$, avec $a = 2i$ et $b = 1-i$, excepté la puissance $k+1$ à la place de la puissance k. En factorisant par $(2i)$, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2i)^{k+1} (1-i)^{7-k} = 2i \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2i)^{k} (1-i)^{7-k} = 2i\,(2i+1-i)^7 = 2i\,(1+i)^7$$

On peut maintenant mettre le résultat sous forme exponentielle :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

D'où $2i\,(1+i)^7 = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7 = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}\right)^7 e^{i\frac{7\pi}{4}} = 16\sqrt{2}\,e^{i\frac{9\pi}{4}}$.

Or $e^{i\frac{9\pi}{4}} = e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. D'où finalement $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2i)^{k+1} (1-i)^{7-k} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, qu'on peut aussi mettre sous la forme $16(1+i)$

Exercice 6 Soit θ un réel fixé et n un entier naturel.

Le but de cet exercice est de calculer les sommes $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k\theta$.

1. Quelles sont les valeurs de θ telles que $e^{i\theta} = 1$?

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Donc $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\theta = 0$ à 2π près (autrement dit : si et seulement si $\theta = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$).

2. Calculer $E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$ (on distinguera les deux cas $e^{i\theta} = 1$ et $e^{i\theta} \neq 1$)

- Si $e^{i\theta} = 1$, alors $E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{(n+1) \text{ fois}} = n + 1$
- Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors E_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. On a donc :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = 1 + \left(e^{i\theta}\right) + \left(e^{i\theta}\right)^2 + \ldots + + \left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - \left(e^{i(n+1)\theta}\right)}{1 - e^{i\theta}}$$

3. Montrer que, pour tout α réel, $e^{i\alpha} - 1 = 2i\, e^{i\alpha/2} \sin\frac{\alpha}{2}$.

En factorisant par $e^{i\alpha/2}$, on a : $e^{i\alpha} - 1 = e^{i\alpha/2}\left(e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}\right)$.

Or, pour tout angle β, on a $\sin\beta = \dfrac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i}$. Et donc : $e^{i\beta} - e^{-i\beta} = 2i \sin\beta$. D'où finalement :

$$e^{i\alpha} - 1 = e^{i\alpha/2}\left(e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}\right) = e^{i\alpha/2}\, 2i \sin\frac{\alpha}{2}$$

En déduire que, si $e^{i\theta} \neq 1$, $E_n = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\, e^{in\theta/2}$

En appliquant le résultat précédent à l'expression de E_n obtenue à la question 2 pour $\alpha = \theta$ et $\alpha = (n+1)\theta$, on a :

$$E_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2i\, e^{i(n+1)\theta/2} \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{2i\, e^{i\theta/2} \sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

4. En déduire les expressions de C_n et S_n (pour les deux cas distingués précédemment).

En utilisant la définition de l'exponentielle complexe : $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, on a donc :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = C_n + iS_n$$

C_n est donc la partie réelle de E_n et S_n sa partie imaginaire. On a donc en conclusion :

- Si $e^{i\theta} = 1$, alors $E_n = n + 1$. Donc $C_n = \mathcal{R}e(E_n) = n + 1$ et $S_n = \mathcal{I}m(E_n) = 0$
- Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors $E_n = e^{in\theta/2} \dfrac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \left(\cos \dfrac{n\theta}{2} + i \sin \dfrac{n\theta}{2}\right) \dfrac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$.

  D'où $C_n = \mathcal{R}e(E_n) = \cos \dfrac{n\theta}{2} \dfrac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ et $S_n = \mathcal{I}m(E_n) = \sin \dfrac{n\theta}{2} \dfrac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$