Mathématiques outils pour les sciences et l'ingénierie 1

Cahier d'exercices A

NOM:	
Prénom:	
Numéro d'étudiant :	
Parcours:	

Édouard Oudet (polycopié rédigé par Bozhidar Velichkov) Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble Alpes edouard.oudet@univ-grenoble-alpes.fr

Table des matières

1	Noi	mbres complexes	3				
	1.1	Nombres complexes sous forme algébrique	3				
	1.2	Nombres complexes sous forme exponentielle	5				
	1.3	Forme algébrique et forme exponentielle	7				
	1.4	Équations du second degré à coefficients complexes	8				
2	Son	nmes et produits	12				
	2.1	Introduction	12				
	2.2	Sommes et produits é termes constantes	13				
	2.3	Factorielle et changement des variables	14				
	2.4	Progressions géométriques et arithmétiques	16				
	2.5	Binéme de Newton	18				
	2.6	Sommes et produits de nombres complexes	21				
	2.7	Sommes télescopiques	23				
3	Géo	ométrie et algèbre linéaire	25				
	3.1	Déterminants d'ordre deux et trois	25				
	3.2	Droites dans le plan	28				
	3.3	Produit scalaire, distance et orthogonalité	31				
	3.4	Aire et volume	34				
	3.5	Produit vectoriel	35				
	3.6	Droites et plans dans l'espace	36				
4	Fon	Fonctions d'une variable réelle 4					
	4.1	Fonctions continues	40				
	4.2	Comportement à l'infini	42				
	4.3	Fonctions dérivables	44				
	4.4	Les dérivées des fonctions rationnelles	46				
	4.5	Les dérivées des fonctions trigonométriques et l'exponentielle	48				
	4.6	Les dérivées des fonctions réciproques : ln, arcsin, arccos, arctan	51				
	4.7	La régle de l'Hôpital	54				
	4.8	Sommes et produits de fonctions	56				
5	Pri	Primitives et intégrales indéfinies 59					
	5.1	Intégration par changement de variable	59				
	5.2	Intégration de fonctions rationnelles	62				
	5.3	Intégration par parties	65				
	5.4	Exercices récapitulatifs	66				
	Exe	ercice 43 (TD). Exercice à faire en classe.					

Exercice 17 (\mathbf{E}) . Exercice d'entraînement.

Exercice 73 (\mathbf{A}) . Exercice d'approfondissement.

Exercice 102 (\mathbf{PEF}). Exercice de préparation à l'examen final.

1 Nombres complexes

1.1 Nombres complexes sous forme algébrique

Exercice 1 (TD). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

 $(1+i)^2 =$ _ _ _ _ _____ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $(2-i)^2 =$ _ _ _ _ _ $(3-2i)^2 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _____ $(a + ib)^2 =$ (1+i)(4-i) =(1-i)(2+3i) =_ $(1+i)^3 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _____ _ _ $(1-2i)^3 =$ _ _ _ _ _ _ _ (1+3i)(1-3i) =(3-4i)(3+4i) =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _____ $(1+3i)^2 + (1-3i)^2 =$ _ _ _ _ _ . _____

Exercice 2 (E). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$(1-i)^2 =$			
$(3-i)^2 =$	 	 	
$(1+2i)^2 =$	 	 	
$(4+3i)^2 =$	 	 	
$(a - ib)^2 =$	 	 	
(2+i)(4+3i) =	 	 	
(3+2i)(2-5i) =	 	 	
$(2+3i)^3 =$	 	 	
(1-4i)(1+4i) =	 	 	
$\begin{array}{c}$	 	 	
(a+bi)(a-bi) =	 	 	
$(a+bi)^2 + (a-bi)^2 =$	 	 	

Exercice 3 (TD). Simplifier les expressions suivantes :

$$Re (4 + 7i) = Re(-\sqrt{7} + 2i) = Im(1 - 2i) = Im(1 - 2i) = Im(1 - 2i) = Im\left[(1 - i)(2 + i)\right] = Im\left[(1 - i)(3 + i)\right] = Im\left[(1 - i)(3 + i)\right] = Im\left[(1 - 2i)(2 -$$

Exercice 4 (E). Simplifier les expressions suivantes :

$$Re\left[i(1+i)\right] =$$

$$Im\left[(1-2i)^{2}\right] - \left[Im(1-i)\right]^{3} =$$

$$Im\left[(2+i)^{2}\right] - \left[Re(2+i)\right]^{2} =$$

Exercice 5 (TD). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1-5i}{1+i} = \frac{2+i}{1-i} = \frac{3+i}{2-i} = \frac{1-i}{1+2i} = \frac{1-i}$$

$\frac{a+ib}{a-ib} =$ $\frac{3+2i}{3-2i} =$ $\frac{(2-i)^2}{(1+i)^2} =$	$\frac{1+i}{3+4i} =$	 	 	
	$\frac{a+ib}{a-ib} =$	 	 	
$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^2} =$	$\frac{3+2i}{3-2i} =$	 	 	
	$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^2} =$	 	 	

Exercice 6 (E). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1.2 Nombres complexes sous forme exponentielle

Exercice 7 (TD). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

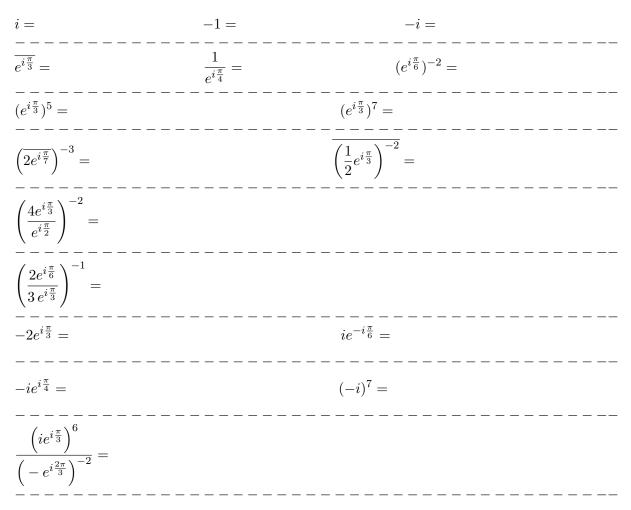
$e^{2i\pi} =$	$e^{i\pi} =$	$e^{-i\pi} =$
$e^{i\frac{\pi}{3}} =$		
$2e^{i\frac{2\pi}{3}} =$		
$e^{i\frac{\pi}{4}} =$		
$e^{i\frac{\pi}{6}} =$		
$2e^{i\frac{7\pi}{6}} =$		

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

 $\mathbf{Exercice}~8$ (E). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

 $e^{i\frac{3\pi}{2}} =$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} =$ $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $e^{-i\frac{\pi}{3}} =$ _ _ _____ $e^{i\frac{3\pi}{4}} =$ _____ $e^{i\frac{5\pi}{6}} =$ _____ $e^{-i\frac{\pi}{6}} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Exercice 9 (TD). Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :



 $\mathbf{Exercice}~\mathbf{10}~(\mathbf{E}).$ Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$(e^{i\frac{3\pi}{6}})^{3} = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{-3} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{3} (e^{i\frac{\pi}{2}})^{3} = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{6} (e^{i\frac{\pi}{2}})^{6} = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{6} (e^{i\frac{\pi}{2}})^{6} = (2e^{i\frac{3\pi}{4}})^{-2} = (2e^{i\frac{3\pi}{4}})^{-2} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{-2} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{-2} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{-2} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{-2}$$

1.3 Forme algébrique et forme exponentielle

Exercice 11 (TD). Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1 + i =	1 - i =	$\frac{1}{1+i} =$
-2 + 2i =	$(1+i)^9 =$	
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =$		$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i =$
$i + \sqrt{3} =$		
$\frac{1+i}{i+\sqrt{3}} =$		
$\frac{(-1+i)^4}{1+i\sqrt{3}} =$		
$(1 - i\sqrt{3})^{10} =$		
$\frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i\sqrt{3})^5} =$		
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17} =$		

 $\mathbf{Exercice}~\mathbf{12}$ (E). Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i) = \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}} = \\ (1+i)e^{i\frac{\pi}{3}} = \\ \frac{1}{\sqrt{3}-i} = \\ \frac{1-i}{i-\sqrt{3}} = \\ \frac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8} = \\ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{57} =$$

1.4 Équations du second degré à coefficients complexes

Exercice 13 (TD). Trouver les solutions des équations suivantes :

$X^2 + 3 = 0$	
$X^{2} - X + 6 = 0$	
$X^{2} - 4X + 5 = 0$	
$X^{2} - 2X + 4 = 0$	
$Z^2 = 8 - 6i$	

$$Z^2 = -3 + 4i$$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _

_ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

 $Z^2 = 7 + 24i$

 $Z^2 = 9 + 40i$

Exercice 14 (E). Trouver les solutions des équations suivantes :

_ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _

_ _

 $Z^2 = 7 - 24i$ et $Z^2 = 3 + 4i$.

Exercice 15 (A). • Résoudre l'équation $Z^2 = 1 + i$.

• Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Exercice 16 (TD). Résoudre les équations suivantes.

 $z^2 + (1 - 5i)z + 2i - 6 = 0$

 $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$

 $\frac{1}{2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i} = 0$

 $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$

Nombres complexes. Exercices complémentaires

Exercice 17 (A). Trouver les valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le nombre complexe z a module |z| = 1. Pour les valeurs de a trouvées, mettre z sous forme exponentielle.

(a)
$$z = \frac{(1+i)}{(1-ai)}$$
; (b) $z = \frac{(1+i)^2}{(1+ai)}$; (c) $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}+2i)^2}{7(\sqrt{3}+ai)^2}$; (d) $z = \frac{a+2i}{1-ai}$.

Exercice 18 (A). *Montrer que pour* $z, w \in \mathbb{C}$ *, nous avons :*

$$|z + w|^{2} + |z - w|^{2} = 2|z|^{2} + 2|w|^{2}.$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 19 (A). Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Montrer que $\frac{z+i}{1+iz}$ est un nombre réel si et seulement si |z| = 1.

Exercice 20 (A)(Feuilles de TD MAT116). On considère les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- 1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
- 2. Déterminer les écritures sous formes algébriques et exponientielles de z_1z_2 .
- 3. En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 21 (A)(Feuilles de TD MAT116). Résoudre de deux façons différentes :

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 22 (A)(Feuilles de TD MAT116). Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

- a) Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$;
- b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$ et de $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 23 (A)(Feuilles de TD MAT116). On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- 1. Trouver les racines troisièmes de l'unité et les exprimer en fonction de j.
- 2. Les représenter sur le cercle trigonométrique.
- 3. Montrer que la somme des racines troisièmes de 1 vaut 0.
- 4. Trouver les racines troisièmes de -8i.
- 5. *Résoudre* $z^n + 1 = 0$.

Exercice 24 (A). Déterminer les nombres complexes z tels que

(a) $z^{2} + |z| - 2 = 0;$ (b) z|z| - 2z = i; (c) $z^{2} = \bar{z};$ (d) $z^{2} - z = |z|^{2} - |z|.$

Exercice 25 (A). Déterminer les nombres complexes z et w tels que

(a)
$$\begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2 \end{cases}$$
 (b)
$$\begin{cases} z\overline{w} = i \\ |z|^2w + z = 1. \end{cases}$$

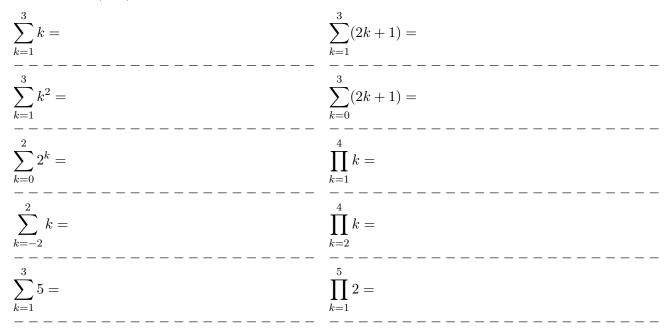
Exercice 26 (A)(Feuilles de TD MAT116). Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$\begin{array}{l} (a) \ |1-z| \leq \frac{1}{2} \ ; \qquad (b) \ |(1-i)z - 3i| = 3 \ ; \qquad (c) \ Re(1-z) \leq 2 \ ; \qquad (d) \ Re(iz) \geq 1 \ ; \\ (e) \ \left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2 \ ; \qquad (f) \ z^7 \ et \ \frac{1}{z^2} \ soient \ conjugués \ ; \qquad (g) \ \frac{|z-3|}{|z+3|} > 2 \ ; \qquad (h) \ \frac{|z-3|}{|z-5|} < 1. \end{array}$$

2 Sommes et produits

2.1 Introduction

Exercice 27 (TD). Calculer les sommes et les produits.



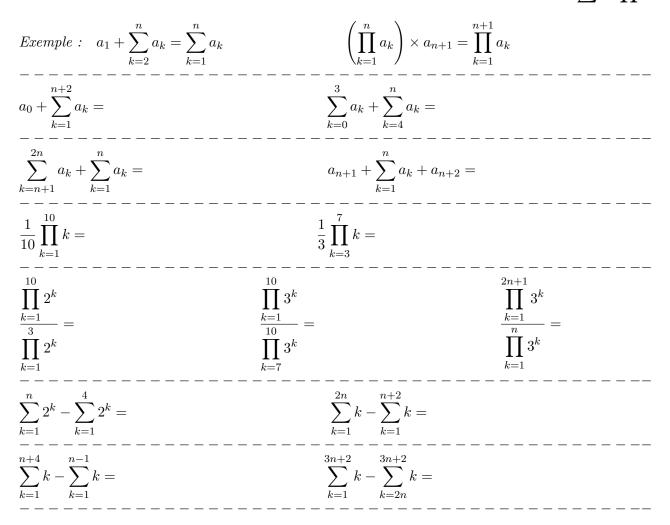
Exercice 28 (TD). Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles \sum et \prod

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ . 4+5+6+7+8+9 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ . $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$ ____ $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} =$ $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20 =_ 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 =1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 =

Exercice 29 (**TD**). Écrire la somme de tous les nombres pairs de 2 à 100 en utilisant le symbole \sum

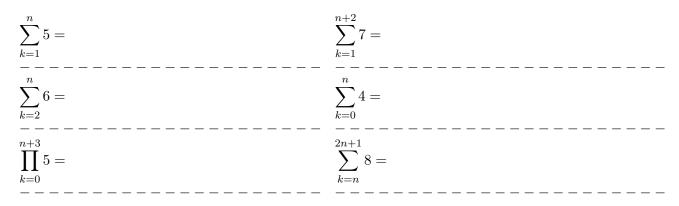
 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 98 + 100 =$

Exercice 30 (TD). Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles $\sum et \prod$

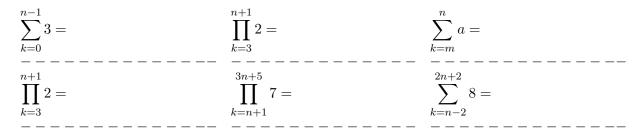


2.2 Sommes et produits é termes constantes

Exercice 31 (TD)(Compter le nombre des terms). Calculer les sommes et les produits.



Exercice 32 (E). Calculer les sommes et les produits.



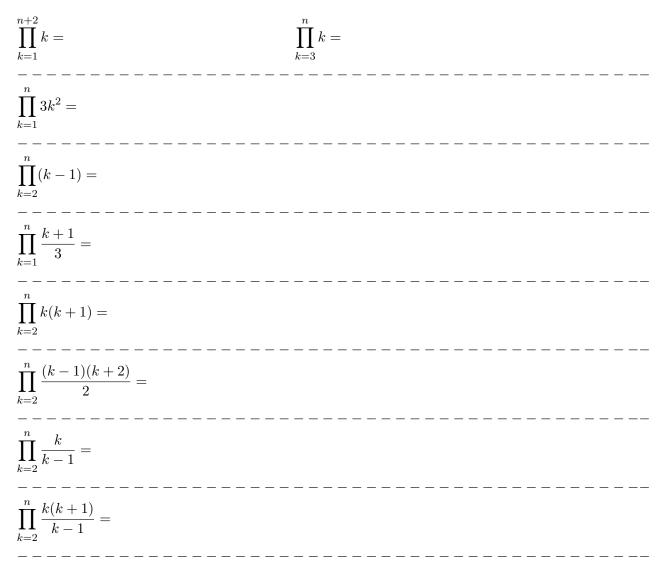
Exercice 33 (PEF). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes



 $\prod_{k=3}^{200} e^{i\pi/3} =$

2.3 Factorielle et changement des variables

Exercice 34 (TD). Calculer les sommes et les produits.



Exercice 35 (E). Calculer les sommes et les produits.

$$\prod_{k=2}^{n+1} 5k =$$

$$\prod_{k=1}^{n+1} (k+3) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1)(k+1) =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 - 1} =$$

Exercice 36 (TD). Calculer les sommes et les produits.

$$\sum_{k=1}^{n} \log(k+1) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log \frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log(2k^{3}) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log(2k^{3}) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \left(2 \log k + \log(k+1)\right) =$$

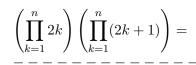
Exercice 37 (E). Calculer les sommes et les produits.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\log 3 + 3 \log k \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2 \log k - \log(k+1) \right) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\log \frac{k+1}{3} + \log \frac{2}{k} \right) =$$

Exercice 38 (A). Écrire le produit suivant en utilisant le symbol \prod

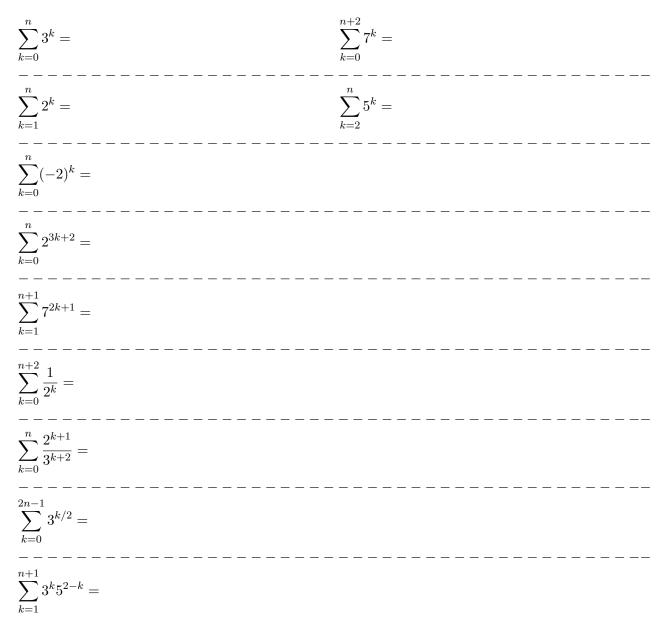


Exercice 39 (A). Calculer les produits suivants.



2.4 Progressions géométriques et arithmétiques

Exercice 40 (TD)(Somme de progression géométrique). Calculer les sommes.



Exercice 41 (E)(Somme de progression géométrique). Calculer les sommes.



Exercice 42 (TD)(Somme de progression arithmétique). Calculer les sommes.

$$\sum_{k=1}^{n} 4k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+5) =$$

$$\sum_{k=0}^{n+2} 3k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+4) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k-1) =$$

Exercice 43 (E)(Somme de progression arithmétique). Calculer les sommes.

 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{3} =$ _____ $\sum_{k=1}^{n} (ak+b) =$ _____ $\sum_{k=0}^n (3-k) =$ $\sum_{k=1}^{2n} 3(k+1) =$ _____ $\sum_{k=2}^{3n} \frac{2-k}{3} =$ **Exercice 44** (A). En utilisant les formules $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ calculer les sommes suivantes. $\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) =$ _____ $\sum_{k=0}^{n} (k^2 + 1) =$ $\sum_{k=1}^{n} (2k+2)(3k-2) =$ $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k+1) =$ _____ $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 + 1}{k+1} =$

2.5 Binéme de Newton

Exercice 45 (TD). Calculer les sommes.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} 5^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k} 3^{-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^{k}}{2^{n-k}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{k} 4^{n-k} =$$

Exercice 46 (E). Calculer les sommes.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{k}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} 3^{2n-k} =$$

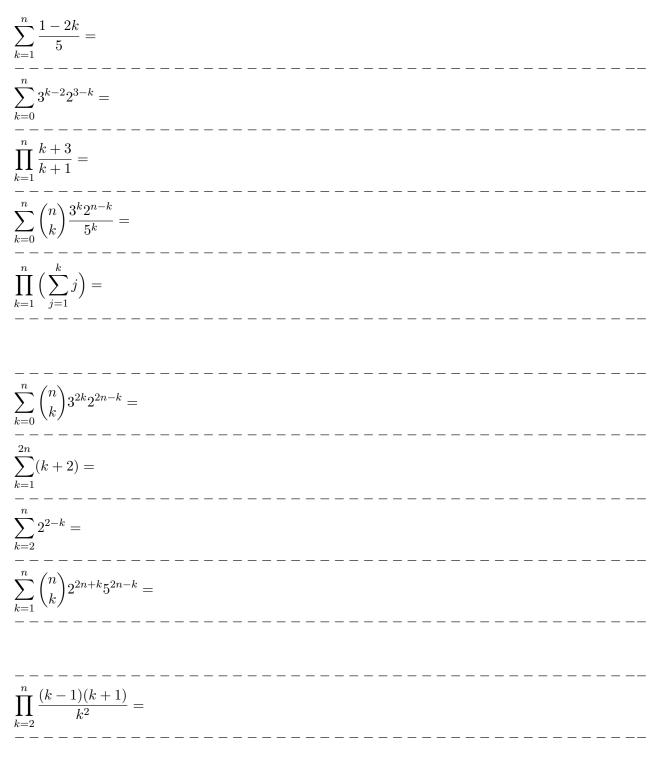
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^{k}}{2^{2k}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3^{k})^{2} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} 3^{n+k} =$$

Exercice 47 (TD)(Exercice récapitulatif). Calculer les sommes suivantes :



Exercice 48 (A). Calculer les sommes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^{k} 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^{k} 3^{n-k} =$$

2.6 Sommes et produits de nombres complexes

Exercice 49 (PEF). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.



Exercice 50 (PEF). Calculer le module des nombres complexes

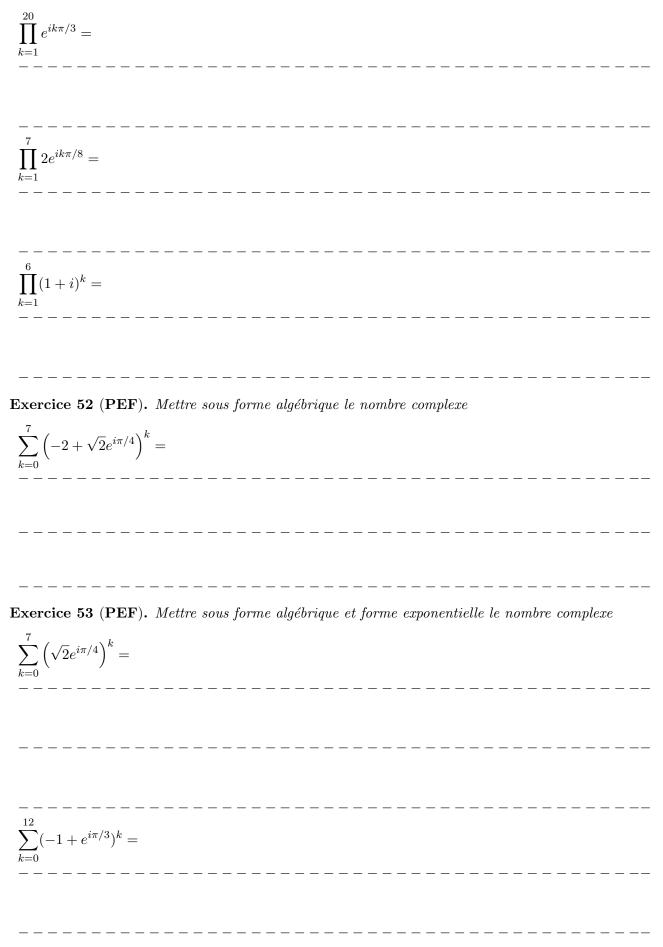
$$z_1 = \prod_{k=1}^n \frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}$$
 et $z_2 = \prod_{k=1}^n \frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

 $|z_1| =$

 $|z_2| =$

Exercice 51 (PEF). Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle les nombres complexes



2.7 Sommes télescopiques

Exercice 54 (A). En utilisant l'identité

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} = \frac{a}{k(k+a)},$$

calculer les sommes suivantes.



Exercice 55 (A). En utilisant l'identité

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

calculer la somme

 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} =$

Exercice 56 (A). Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} =$$

Exercice 57 (A). On considére une expérience à deux issues possibles : positive (P) et négative (N). Soit $p \in]0,1[$ la probabilité de P. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de façon indépendante.

- (a) Calculer la probabilité p_k que la première expérience positive est la k-ième.
- (b) Soit X la probabilité que parmi les 100 premières expériences au moins une est positive. Exprimer X en fonction de p_1, \ldots, p_{100} et en fonction de p.
- (c) Soit Y la probabilité que toutes les 100 premières expériences sont négatives. Exprimer Y en fonction de p.
- (d) En utilisant le fait que X + Y = 1 comparer les résultats obtenus en (b) et (c).

Exercice 58 (A). Exprimer en fonction de x et n les sommes suivantes :

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(xk);$$
 (b) $\sum_{k=1}^{n} \sin(x(2k+1));$ (c) $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx).$

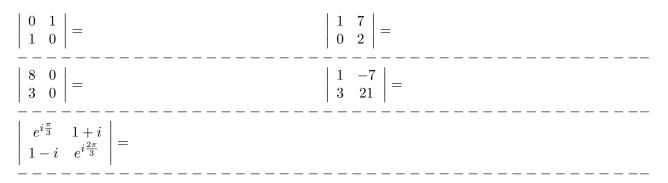
3 Géométrie et algèbre linéaire

3.1 Déterminants d'ordre deux et trois

Exercice 59 (TD). Calculer les déterminants suivants :

 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$ $1 \ 0$ = $0 \ 1$ _____ $\left|\begin{array}{ccc}3&8\\2&5\end{array}\right|$ $1 \ 2$ = = 3 6 $\cos \alpha - \sin \alpha \mid =$ $\sin \alpha \quad \cos \alpha$ _____ 1+i1 3i -1 - i_____

Exercice 60 (E). Calculer les déterminants suivants :



Exercice 61 (**TD**). Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

 $\overrightarrow{u} = (1 - t, 2 + t), \ \overrightarrow{v} = (3, 4)$

 $\overrightarrow{u} = (5t, 6), \ \overrightarrow{v} = (6t, 7)$

 $\overrightarrow{u} = (2,1), \ \overrightarrow{v} = (3-t,2-t)$

Exercice 62 (E). Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. (a) $\vec{u} = (-1-t, 5+t), \ \vec{v} = (1, -1)$ (b) $\vec{u} = (1-t, 1), \ \vec{v} = (3, 1-t)$

$\left \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right =$
$\left \begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \\ 7 & 1 & c \end{array}\right =$
$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

Exercice 63 (TD). Calculer les déterminants suivants :

$ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ X & 0 & 1 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} X & 1 & X \\ 1 & 1 & 2 \\ X & 0 & 2 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$

Exercice 64 (E). Calculer les déterminants suivants :

3.2 Droites dans le plan

Exercice 65 (TD). Trouver le point d'intersection M de la droite D_1 avec la droite D_2 .

 $\underline{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}, \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y=1\}, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y=1\}, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1\}, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 5\}, \quad M = 0$$

$$D_1 = \{ (1+4t, 2+t) : t \in \mathbb{R} \}, \quad D_2 = \{ (x,y) : x+2y = 11 \}, \quad M = 0$$

$$D_1 = \{(1+\lambda, 2-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x,y) : x+4y=3\}, \quad M = \{(1+\lambda, 2-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x,y) : x+4y=3\}, \quad M = \{(1+\lambda, 2-\lambda) : x+4y=3\}, \quad M = \{(1+\lambda, 2-\lambda$$

 $\underline{D_1 = \{(1+t, 2-t) : t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(1+s, 2+s) : s \in \mathbb{R}\}, \quad M =$

 $\underline{D_1 = \{(5-t, 2t-1) : t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(1+s, 2+3s) : s \in \mathbb{R}\}, \quad M = 1$

Exercice 66 (E). Trouver le point d'intersection M de la droite D_1 avec la droite D_2 .

 $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 3\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$

$$D_1 = \{(1+2s, 3-s) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x,y) : x-2y+1=0\}$$

_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

 $D_1 = \{(t-2, t-1) : t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(-1+2s, 3-s) : s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 67 (**TD**). Trouver l'équation de la droite D passant par les points A et B.

_ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _

 $\underline{A} = (1,2) \ , \ \underline{B} = (3,1)$

A = (3,0), B = (2,-1)

A = (1,0), B = (2,3)

Exercice 68 (E). Trouver l'équation de la droite D passant par les points A et B. A = (2,3), B = (3,2)

A = (4,1), B = (2,2)

A = (-2, 1), B = (1, 3)

A = (1,2), B = (0,-1)

Exercice 69 (**TD**). Trouver le point d'intersection M de la droite D_1 , passant par les points A et B, avec la droite D_2 passant par les points E et F, où A = (0,1), B = (4,3), E = (1,3), F = (3,1).

Exercice 70 (E). Trouver le point d'intersection M de la droite D_1 , passant par les points A et B, avec la droite D_2 passant par les points E et F, où A = (2,0), B = (4,4), E = (1,1), F = (5,3).

3.3 Produit scalaire, distance et orthogonalité

Exercice 71 (**TD**). Calculer le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} .

$$\vec{\underline{u}} = (1,5), \ \vec{\overline{v}} = (3,1)$$

$$\vec{\underline{u}} = (\cos \alpha, -\sin \alpha), \ \vec{\overline{v}} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$$

$$\vec{\underline{u}} = (2,3), \ \vec{\overline{v}} = (-3,2)$$

$$\vec{\underline{u}} = (1,0,2), \ \vec{\overline{v}} = (-4,7,2)$$

$$\vec{\underline{u}} = (-2,0,1), \ \vec{\overline{v}} = (0,3,8)$$

$$\vec{\underline{u}} = (3,2,-1), \ \vec{\overline{v}} = (2,1,5)$$

$$\vec{\underline{u}} = (1,2,-1,2), \ \vec{\overline{v}} = (3,1,1,-3)$$

Exercice 72 (**TD**). Déterminer les valeurs du paramètre t pour les quelles les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

 $\overrightarrow{u} = (t-1, 2t-3), \ \overrightarrow{v} = (3, -1)$

 $\vec{u} = (3t, 2+t, -t), \ \vec{v} = (1, 1, 2)$

 $\vec{u} = (t - 1, 2t, 2), \ \vec{v} = (1, 2, -1)$

Exercice 73 (**TD**). Trouver la projection du point M sur la droite D, dans les cas suivants : (La projection de M est le point $P \in D$ tel que le vecteur \overrightarrow{MP} soit orthogonal à D.)

 $\underline{M=(1,2)} \ , \ D=\{(2t,1+t) \ : \ t\in \mathbb{R}\}$

$M = (1,3) , D = \{ (4-t, 2+2t) : t \in \mathbb{R} \}$

 $M = (1,5) \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x-y = 2\}$

 $M=(1,-3)\ ,\ D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\ :\ x+2y+3=0\}$

 $\underline{M = (-1,1) \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2x + y = 3\}}$

 $M = (1,0,1) , D = \{ (2t,t-1,-t+4) : t \in \mathbb{R} \}$

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

Exercice 74 (E). Trouver la projection du point M sur la droite D, dans les cas suivants : (La projection de M est le point $P \in D$ tel que le vecteur \overrightarrow{MP} soit orthogonal à D.)

 $M = \left(\tfrac{3}{2}, 2 \right) \;, \; D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 2x + y = 3 \}$

$$M = (4,0) \ , \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3x - y = 2\}$$

$M = (1, -2, 1) , D = \{ (t - 2, 1 - 2t, 2t + 1) : t \in \mathbb{R} \}$

Exercice 75 (TD). Calculer la norme $|\vec{u}|$ du vecteur \vec{u} .

$$\vec{u} = (3,4)$$

$$\vec{u} = (-x,1)$$

$$\vec{u} = (1,-2,2)$$

Exercice 76 (**TD**). Calculer la distance entre les points A et B.

$$A = (3, 4), B = (2, 1)$$

A = (1, 6), B = (4, 2)

A = (3, 1, 2), B = (1, -1, 1)

Exercice 77 (A). On considére dans \mathbb{R}^2 le parallèlogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a,b) \neq (0,0)$ et $\overrightarrow{v} = (c,d) \neq (0,0)$, c'est-à-dire le parallèlogramme EFGH, oé E = (0,0), F = (a,b), G = (a+c,b+d) et H = (c,d).

(a) Trouver la projection P de H sur la droite D déterminée par les points E et F.

(b) Calculer la distance entre P et H.

(c) Calculer l'aire du EFGH.

3.4 Aire et volume

Exercice 78 (TD). Calculer l'aire du triangle ABC

A = (1,0), B = (2,3), C = (4,4)

A = (0, 1), B = (2, 1), C = (-1, 2)

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Exercice 79 (TD). Calculer l'aire du triangle déterminé par les droites D_1 , D_2 et D_3 . $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 2\},$ $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + y + 2 = 0\}.$

_ _ _ _ _ _ _

Exercice 80 (TD). Calculer le volume du tétraèdre ABCD

A = (0, -1, 0), B = (0, 4, 1), C = (1, 4, 2), D = (0, 0, 2)

A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 3), C = (1, 4, 4), D = (0, -1, 0)

3.5 Produit vectoriel

Exercice 81 (TD). Calculez le produit vectoriel des vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} .

_ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

 $\overrightarrow{u} = (1,0,0), \ \overrightarrow{v} = (0,0,-1)$

 $\overrightarrow{u} = (1,0,0), \ \overrightarrow{v} = (1,1,1)$

 $\overrightarrow{u} = (2,3,1), \ \overrightarrow{v} = (1,2,1)$

 $\overrightarrow{u} = (1,1,1), \ \overrightarrow{v} = (-3,2,1)$

 $\underline{\vec{u}} = (1,0,1), \ \vec{v} = (x,0,-1)$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

 $\overrightarrow{u} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0), \ \overrightarrow{v} = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$

 $\overrightarrow{u} = (3, 2, -1), \ \overrightarrow{v} = (2, 1, z)$

 $\overrightarrow{u} = (1,2,2), \ \overrightarrow{v} = (3,1,1)$

3.6 Droites et plans dans l'espace

Exercice 82 (**TD**). Trouver l'équation paramétrique de la droite D passante par le point M et orthogonale au plan P.

_ _ _ _ .

 $M = (1, 2, 4), \ P = \{(x, y, z) : x + y + z = 3\}$

 $M = (-1, 0, 0), P = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 7\}$

 $M = (1, 2, 4), \ P = \{ \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 0) : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R} \}$

 $M = (1, -2, 1), \ P = \{ \alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 1) : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R} \}$

Exercice 83 (TD). Trouver l'équation implicite du plan $P = \{M + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}.$ $M = (1,0,1), \ \vec{u} = (1,1,0), \ \vec{v} = (1,0,0)$

 $M = (1,0,0), \ \overrightarrow{u} = (1,2,3), \ \overrightarrow{v} = (1,0,1)$

Exercice 84 (TD). Trouver l'équation implicite du plan P déterminé par les points A, B et C. A = (1,0,1), B = (1,1,0), C = (1,0,0)

A = (2, 0, 1), B = (1, 1, 1), C = (-1, 0, -1)

Exercice 85 (TD). Trouver l'équation implicite du plan P contenant le point A et la droite D.

 $A = (1,0,1), \ D = \{(1+t,2-t,-1+t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$

 $A = (-1, 1, 0), \ D = \{(1 + 2t, t, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 86 (**TD**). Trouver une représentation paramétrique du plan P.

 $P = \{(x, y, z) : x + y + z = 3\}$

 $P = \{(x, y, z) : x + 2y - 2z = 1\}$

Exercice 87 (TD). Soient P_1 et P_2 deux plans dans \mathbb{R}^3 . Trouver la forme paramétrique de la droite $D = P_1 \cap P_2$.

 $P_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 3\}, P_2 = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$

$$P_1 = \{(x, y, z) : x + y - z = -1\}, P_2 = \{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 0\}$$

$$P_1 = \{(x, y, z) : 2x - z = 1\}, P_2 = \{(x, y, z) : x + y = 2\}$$

Exercice 88 (TD). Trouver une représentation implicite de la droite D

 $D = \{ (1,0,2) + t(1,1,1) : t \in \mathbb{R} \}$

 $D = \{ (1+t, 2-t, t-3) : t \in \mathbb{R} \}$

Exercice 89 (A). On suppose que un rayon de lumière est envoyé depuis le point A = (1,0,1) en direction \vec{v} . Trouvez le vecteur directeur \vec{v} pour lequel la réflexion du rayon dans le miroir d'équation P: x - y + z = 1 passe par le point T = (3,2,3).

Exercice 90 (A). On suppose que un rayon de lumière est envoyé depuis le point A = (1, 1, 2) en direction $\vec{v} = (-1, -1, -1)$. Trouvez l'équation du plan P passant par le point M = (2, 0, 0) pour lequel la réflexion du rayon dans le miroir plain P passe par le point T = (-2, -2, 1).