# Mathématiques outils pour les sciences et l'ingénierie 1

## Cahier d'exercices A

---

NOM:

---

Prénom:

---

Numéro d'étudiant :

---

Parcours:

---

*Édouard Oudet (polycopié rédigé par Bozhidar Velichkov)*
Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble Alpes
edouard.oudet@univ-grenoble-alpes.fr

# Table des matières



---

Exercice 43 (**TD**). Exercice à faire en classe.
Exercice 17 (**E**). Exercice d'entraînement.
Exercice 73 (**A**). Exercice d'approfondissement.
Exercice 102 (**PEF**). Exercice de préparation à l'examen final.

---

# 1 Nombres complexes

## 1.1 Nombres complexes sous forme algébrique

**Exercice 1 (TD).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$(1+i)^2 =$

$(2-i)^2 =$

$(3-2i)^2 =$

$(a+ib)^2 =$

$(1+i)(4-i) =$

$(1-i)(2+3i) =$

$(1+i)^3 =$

$(1-2i)^3 =$

$(1+3i)(1-3i) =$

$(3-4i)(3+4i) =$

$(1+3i)^2+(1-3i)^2 =$

**Exercice 2 (E).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$(1-i)^2 =$

$(3-i)^2 =$

$(1+2i)^2 =$

$(4+3i)^2 =$

$(a-ib)^2 =$

$(2+i)(4+3i) =$

$(3+2i)(2-5i) =$

$(2+3i)^3 =$

$(1-4i)(1+4i) =$

$(2+3i)(2-3i) =$

$(a+bi)(a-bi) =$

$(a+bi)^2+(a-bi)^2 =$

**Exercice 3 (TD).** *Simplifier les expressions suivantes :*

$Re\,(4+7i) =$ $\qquad$ $Re(-\sqrt{7}+2i) =$

$Im\,(2+3i) =$ $\qquad$ $Im(1-2i) =$

$Re\Big[(1+i)(2+i)\Big] =$

$Im\Big[(1-i)(3+i)\Big] =$

$Re\Big[(1+2i)^2\Big] - \Big[Re\,(1+2i)\Big]^2 =$

$Im\Big[(3-i)^2\Big] - \Big[Re\,(2+i)\Big]^2 =$

**Exercice 4 (E).** *Simplifier les expressions suivantes :*

$Re\Big[i(1+i)\Big] =$

$Im\Big[(1-2i)^2\Big] - \Big[Im\,(1-i)\Big]^3 =$

$Im\Big[(2+i)^2\Big] - \Big[Re\,(2+i)\Big]^2 =$

**Exercice 5 (TD).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$\dfrac{1-5i}{1+i} =$

$\dfrac{2+i}{1-i} =$

$\dfrac{3+i}{2-i} =$

$\dfrac{1-i}{1+2i} =$

**Exercice 6 (E).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$$\frac{1+i}{3+4i} =$$

$$\frac{a+ib}{a-ib} =$$

$$\frac{3+2i}{3-2i} =$$

$$\frac{(2-i)^2}{(1+i)^2} =$$

### 1.2 Nombres complexes sous forme exponentielle

**Exercice 7 (TD).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$e^{2i\pi} =$ $\qquad$ $e^{i\pi} =$ $\qquad$ $e^{-i\pi} =$

$e^{i\frac{\pi}{3}} =$

$2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

$e^{i\frac{\pi}{4}} =$

$e^{i\frac{\pi}{6}} =$

$2\,e^{i\frac{7\pi}{6}} =$

**Exercice 8 (E).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$e^{-i\frac{\pi}{2}} =$ $\qquad$ $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ $\qquad$ $e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$e^{-i\frac{\pi}{3}} =$

$e^{i\frac{3\pi}{4}} =$

$e^{i\frac{5\pi}{6}} =$

$e^{-i\frac{\pi}{6}} =$

**Exercice 9 (TD).** *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$i =$ $\qquad$ $-1 =$ $\qquad$ $-i =$

---

$\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} =$ $\qquad$ $\dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}} =$ $\qquad$ $(e^{i\frac{\pi}{6}})^{-2} =$

---

$(e^{i\frac{\pi}{3}})^5 =$ $\qquad$ $(e^{i\frac{\pi}{3}})^7 =$

---

$\left(\overline{2e^{i\frac{\pi}{7}}}\right)^{-3} =$ $\qquad$ $\overline{\left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}} =$

---

$\left(\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{-2} =$

---

$\left(\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{-1} =$

---

$-2e^{i\frac{\pi}{3}} =$ $\qquad$ $ie^{-i\frac{\pi}{6}} =$

---

$-ie^{i\frac{\pi}{4}} =$ $\qquad$ $(-i)^7 =$

---

$\dfrac{\left(ie^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6}{\left(-\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-2}} =$

---

**Exercice 10 (E).** *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 =$ $\qquad$ $(2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{-3} =$

---

$\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2} =$ $\qquad$ $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 =$

---

$\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^6 =$

---

$\left(\overline{3e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^2 =$ $\qquad$ $\overline{\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-2}} =$

---

$\left(\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{-2} =$

---

$\dfrac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^7\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4} =$

---

$\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-3}\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 =$

---

## 1.3 Forme algébrique et forme exponentielle

**Exercice 11 (TD).** *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$1+i=$ $\qquad$ $1-i=$ $\qquad$ $\dfrac{1}{1+i}=$

$-2+2i=$ $\qquad$ $(1+i)^9=$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=$

$i+\sqrt{3}=$

$\dfrac{1+i}{i+\sqrt{3}}=$

$\dfrac{(-1+i)^4}{1+i\sqrt{3}}=$

$(1-i\sqrt{3})^{10}=$

$\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i\sqrt{3})^5}=$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17}=$

**Exercice 12 (E).** *Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}=$

$(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}=$

$\dfrac{1-i}{i-\sqrt{3}}=$

$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8}=$

$\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{57}=$

### 1.4 Équations du second degré à coefficients complexes

**Exercice 13 (TD).** *Trouver les solutions des équations suivantes :*

$X^2 + 3 = 0$

$X^2 - X + 6 = 0$

$X^2 - 4X + 5 = 0$

$X^2 - 2X + 4 = 0$

$Z^2 = 8 - 6i$

$Z^2 = -3 + 4i$

$Z^2 = 7 + 24i$

$Z^2 = 9 + 40i$

**Exercice 14 (E).** *Trouver les solutions des équations suivantes :*

$$Z^2 = 7 - 24i \qquad et \qquad Z^2 = 3 + 4i.$$

**Exercice 15 (A).** • *Résoudre l'équation* $Z^2 = 1 + i$.
• *Mettre sous forme algébrique le nombre complexe* $e^{i\frac{\pi}{8}}$.

**Exercice 16 (TD).** *Résoudre les équations suivantes.*

$z^2 + (1 - 5i)z + 2i - 6 = 0$

$z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$

$2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$

$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$

## Nombres complexes. Exercices complémentaires

**Exercice 17 (A).** *Trouver les valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le nombre complexe $z$ a module $|z| = 1$. Pour les valeurs de $a$ trouvées, mettre $z$ sous forme exponentielle.*

$$(a)\ z = \frac{(1+i)}{(1-ai)}\ ; \qquad (b)\ z = \frac{(1+i)^2}{(1+ai)}\ ; \qquad (c)\ z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}+2i)^2}{7(\sqrt{3}+ai)^2}\ ; \qquad (d)\ z = \frac{a+2i}{1-ai}\ .$$

**Exercice 18 (A).** *Montrer que pour $z, w \in \mathbb{C}$, nous avons :*

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

*Donner une interprétation géométrique.*

**Exercice 19 (A).** *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Montrer que $\dfrac{z+i}{1+iz}$ est un nombre réel si et seulement si $|z| = 1$.*

**Exercice 20 (A)**(Feuilles de TD MAT116)**.** *On considère les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.*

1. *Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme algébrique.*
2. *Déterminer les écritures sous formes algébriques et exponientielles de $z_1 z_2$.*
3. *En déduire la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$.*

**Exercice 21 (A)**(Feuilles de TD MAT116)**.** *Résoudre de deux façons différentes :*

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

*et en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.*

**Exercice 22 (A)**(Feuilles de TD MAT116)**.** *Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.*
*a) Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ ;*
*b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\sin\frac{\pi}{5}$.*

**Exercice 23 (A)**(Feuilles de TD MAT116)**.** *On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

1. *Trouver les racines troisièmes de l'unité et les exprimer en fonction de $j$.*
2. *Les représenter sur le cercle trigonométrique.*
3. *Montrer que la somme des racines troisièmes de $1$ vaut $0$.*
4. *Trouver les racines troisièmes de $-8i$.*
5. *Résoudre $z^n + 1 = 0$.*

**Exercice 24 (A).** *Déterminer les nombres complexes $z$ tels que*

$$(a)\quad z^2 + |z| - 2 = 0\,; \qquad (b)\quad z|z| - 2z = i\,; \qquad (c)\quad z^2 = \bar{z}\,; \qquad (d)\quad z^2 - z = |z|^2 - |z|\,.$$

**Exercice 25 (A).** *Déterminer les nombres complexes $z$ et $w$ tels que*

$$(a)\quad \begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2 \end{cases} \qquad\qquad (b)\quad \begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1. \end{cases}$$

**Exercice 26** (**A**)(Feuilles de TD MAT116)**.** *Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que :*

*(a)* $|1-z| \le \dfrac{1}{2}$ ; *(b)* $|(1-i)z - 3i| = 3$ ; *(c)* $Re(1-z) \le 2$ ; *(d)* $Re(iz) \ge 1$ ;

*(e)* $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$ ; *(f)* $z^7$ *et* $\dfrac{1}{z^2}$ *soient conjugués ;* *(g)* $\dfrac{|z-3|}{|z+3|} > 2$ ; *(h)* $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} < 1$.

# 2 Sommes et produits

## 2.1 Introduction

**Exercice 27 (TD).** *Calculer les sommes et les produits.*

$$\sum_{k=1}^{3} k =$$

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{2} 2^k =$$

$$\sum_{k=-2}^{2} k =$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 =$$

$$\sum_{k=1}^{3} (2k+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{3} (2k+1) =$$

$$\prod_{k=1}^{4} k =$$

$$\prod_{k=2}^{4} k =$$

$$\prod_{k=1}^{5} 2 =$$

**Exercice 28 (TD).** *Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles* $\sum$ *et* $\prod$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=$

$4+5+6+7+8+9=$

$0+1+2+3+4+5=$

$3+3+3+3+3+3=$

$2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7=$

$1\times \frac{1}{2}\times \frac{1}{3}\times \frac{1}{4}\times \frac{1}{5}=$

$7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7=$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=$

$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=$

$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21=$

$1+3+5+7+9+11+13+15=$

**Exercice 29 (TD).** *Écrire la somme de tous les nombres pairs de* 2 *à* 100 *en utilisant le symbole* $\sum$

$$2+4+6+8+10+\cdots+98+100=$$

**Exercice 30 (TD).** *Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles* $\sum$ *et* $\prod$

*Exemple :* $a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} a_k$

$a_0 + \sum_{k=1}^{n+2} a_k =$ $\sum_{k=0}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{n} a_k =$

$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k =$ $a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+2} =$

$\frac{1}{10}\prod_{k=1}^{10} k =$ $\frac{1}{3}\prod_{k=3}^{7} k =$

$\frac{\prod_{k=1}^{10} 2^k}{\prod_{k=1}^{3} 2^k} =$ $\frac{\prod_{k=1}^{10} 3^k}{\prod_{k=7}^{10} 3^k} =$ $\frac{\prod_{k=1}^{2n+1} 3^k}{\prod_{k=1}^{n} 3^k} =$

$\sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{4} 2^k =$ $\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n+2} k =$

$\sum_{k=1}^{n+4} k - \sum_{k=1}^{n-1} k =$ $\sum_{k=1}^{3n+2} k - \sum_{k=2n}^{3n+2} k =$

## 2.2 Sommes et produits é termes constantes

**Exercice 31 (TD)**(Compter le nombre des terms)**.** *Calculer les sommes et les produits.*

$\sum_{k=1}^{n} 5 =$ $\sum_{k=1}^{n+2} 7 =$

$\sum_{k=2}^{n} 6 =$ $\sum_{k=0}^{n} 4 =$

$\prod_{k=0}^{n+3} 5 =$ $\sum_{k=n}^{2n+1} 8 =$

**Exercice 32 (E).** *Calculer les sommes et les produits.*

$\sum_{k=0}^{n-1} 3 =$ $\prod_{k=3}^{n+1} 2 =$ $\sum_{k=m}^{n} a =$

$\prod_{k=3}^{n+1} 2 =$ $\prod_{k=n+1}^{3n+5} 7 =$ $\sum_{k=n-2}^{2n+2} 8 =$

**Exercice 33 (PEF).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes*

$$\prod_{k=1}^{4n+3} i =$$

---

$$\prod_{k=1}^{8n+5} (1+i) =$$

---

---

$$\prod_{k=3}^{200} e^{i\pi/3} =$$

---

### 2.3 Factorielle et changement des variables

**Exercice 34 (TD).** *Calculer les sommes et les produits.*

$$\prod_{k=1}^{n+2} k = \qquad \prod_{k=3}^{n} k =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n} 3k^2 =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1) =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3} =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} k(k+1) =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{2} =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k(k+1)}{k-1} =$$

---

**Exercice 35 (E).** *Calculer les sommes et les produits.*

$$\prod_{k=2}^{n+1} 5k =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n+2} (k+3) =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1)(k+1) =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} =$$

---

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2-1} =$$

---

**Exercice 36 (TD).** *Calculer les sommes et les produits.*

$$\sum_{k=1}^{n} \log(k+1) =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n} \log \frac{1}{k} =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n} \log(2k^3) =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(2\,\log k + \log(k+1)\Big) =$$

---

**Exercice 37 (E).** *Calculer les sommes et les produits.*

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\log 3 + 3 \log k\Big) =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(2 \log k - \log(k+1)\Big) =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(\log \frac{k+1}{3} + \log \frac{2}{k}\Big) =$$

---

**Exercice 38 (A).** *Écrire le produit suivant en utilisant le symbol* $\prod$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right) =$$

---

**Exercice 39 (A).** *Calculer les produits suivants.*

$$\prod_{k=1}^{n} 2k =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) =$$

---

## 2.4 Progressions géométriques et arithmétiques

**Exercice 40 (TD)**(Somme de progression géométrique). *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n+2} 7^k =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \qquad\qquad \sum_{k=2}^{n} 5^k =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^k =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n+1} 7^{2k+1} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{2^k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{2n-1} 3^{k/2} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3^k 5^{2-k} =$$

**Exercice 41** (**E**)(Somme de progression géométrique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{3k-1} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{3^{k-2}} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{1+3k} 3^{-2(k+1)} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k 3^{k+2}}{7^{k+1}} =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n+2} (-3)^k =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}} =$$

---

**Exercice 42** (**TD**)(Somme de progression arithmétique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=1}^{n} 4k =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+5) =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n+2} 3k =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n} (k+4) =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} (k-2) =$$

---

$$\sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{2} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{3n} (2k-1) =$$

---

**Exercice 43 (E)**(Somme de progression arithmétique)**.** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{3} =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=1}^{n} (ak+b) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=0}^{n} (3-k) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=1}^{2n} 3(k+1) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=2}^{3n} \frac{2-k}{3} =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

**Exercice 44 (A).** *En utilisant les formules* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *calculer les sommes suivantes.*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2+1) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+2)(3k-2) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k+1) =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+1}{k+1} =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

### 2.5 Binéme de Newton

**Exercice 45 (TD).** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} 5^{n-k} =$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2n-k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k} 3^{-k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{n-k}} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-n} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} 3^{n-k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^{k} 4^{n-k} =$$

---

**Exercice 46 (E).** *Calculer les sommes.*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-n} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} 3^{2n-k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2-k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{2k}} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3^k)^2 =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k} 3^{n+k} =$$

---

**Exercice 47** (**TD**)(Exercice récapitulatif)**.** *Calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{5} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{k-2}2^{3-k} =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k+1} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^k 2^{n-k}}{5^k} =$$

---

$$\prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} j\Big) =$$

---

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k}2^{2n-k} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{2n} (k+2) =$$

---

$$\sum_{k=2}^{n} 2^{2-k} =$$

---

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n+k}5^{2n-k} =$$

---

---

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

---

---

**Exercice 48** (**A**)**.** *Calculer les sommes*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k 3^{n-k} =$$

---

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^k 3^{n-k} =$$

## 2.6 Sommes et produits de nombres complexes

**Exercice 49 (PEF).** *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.*

$$\sum_{k=1}^{n}(1+2ik) =$$

$$\sum_{k=1}^{10}(2+ik) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5k}{2+i} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+i}{1+i} =$$

**Exercice 50 (PEF).** *Calculer le module des nombres complexes*

$$z_1 = \prod_{k=1}^{n}\frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2} \qquad et \qquad z_2 = \prod_{k=1}^{n}\frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}.$$

$|z_1| =$

$|z_2| =$

**Exercice 51 (PEF).** *Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle les nombres complexes*

$$\prod_{k=1}^{20} e^{ik\pi/3} =$$

$$\prod_{k=1}^{7} 2e^{ik\pi/8} =$$

$$\prod_{k=1}^{6} (1+i)^k =$$

**Exercice 52 (PEF).** *Mettre sous forme algébrique le nombre complexe*

$$\sum_{k=0}^{7} \left(-2+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k =$$

**Exercice 53 (PEF).** *Mettre sous forme algébrique et forme exponentielle le nombre complexe*

$$\sum_{k=0}^{7} \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{12} (-1+e^{i\pi/3})^k =$$

## 2.7 Sommes télescopiques

**Exercice 54 (A).** *En utilisant l'identité*

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} = \frac{a}{k(k+a)},$$

*calculer les sommes suivantes.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} =$$

**Exercice 55 (A).** *En utilisant l'identité*

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

*calculer la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} =$$

**Exercice 56 (A).** *Calculer la somme*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} =$$

**Exercice 57 (A).** *On considére une expérience à deux issues possibles : positive (P) et négative (N). Soit $p \in ]0,1[$ la probabilité de P. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de façon indépendante.*

*(a) Calculer la probabilité $p_k$ que la première expérience positive est la $k$-ième.*

*(b) Soit $X$ la probabilité que parmi les 100 premières expériences au moins une est positive. Exprimer $X$ en fonction de $p_1, \ldots, p_{100}$ et en fonction de $p$.*

*(c) Soit $Y$ la probabilité que toutes les 100 premières expériences sont négatives. Exprimer $Y$ en fonction de $p$.*

*(d) En utilisant le fait que $X + Y = 1$ comparer les résultats obtenus en (b) et (c).*

**Exercice 58 (A).** *Exprimer en fonction de $x$ et $n$ les sommes suivantes :*

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(xk)\,; \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(x(2k+1))\,; \qquad (c) \quad \sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)\,.$$

# 3 Géométrie et algèbre linéaire

## 3.1 Déterminants d'ordre deux et trois

**Exercice 59 (TD).** *Calculer les déterminants suivants :*

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 3i & -1-i \end{vmatrix} =$

**Exercice 60 (E).** *Calculer les déterminants suivants :*

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 1+i \\ 1-i & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{vmatrix} =$

**Exercice 61 (TD).** *Trouver les valeurs du paramètre $t$ pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

$\overrightarrow{u} = (1-t, 2+t),\ \overrightarrow{v} = (3,4)$

$\overrightarrow{u} = (5t, 6),\ \overrightarrow{v} = (6t, 7)$

$\overrightarrow{u} = (2,1),\ \overrightarrow{v} = (3-t, 2-t)$

**Exercice 62 (E).** *Trouver les valeurs du paramètre $t$ pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.* $(a)$ $\overrightarrow{u} = (-1-t, 5+t),\ \overrightarrow{v} = (1,-1)$ $\qquad$ $(b)$ $\overrightarrow{u} = (1-t, 1),\ \overrightarrow{v} = (3, 1-t)$

**Exercice 63 (TD).** *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \\ 7 & 1 & c \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

**Exercice 64 (E).** *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ X & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} X & 1 & X \\ 1 & 1 & 2 \\ X & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

---

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

---

## 3.2 Droites dans le plan

**Exercice 65 (TD).** *Trouver le point d'intersection $M$ de la droite $D_1$ avec la droite $D_2$.*

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 0\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + y = 1\}$, $M =$

---

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + y = 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + 2y = 5\}$, $M =$

---

$D_1 = \{(1 + 4t, 2 + t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$, $D_2 = \{(x, y) \ : \ x + 2y = 11\}$, $M =$

---

$D_1 = \{(1 + \lambda, 2 - \lambda) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $D_2 = \{(x, y) \ : \ x + 4y = 3\}$, $M =$

---

$D_1 = \{(1 + t, 2 - t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$, $D_2 = \{(1 + s, 2 + s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}$, $M =$

---

$D_1 = \{(5 - t, 2t - 1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$, $D_2 = \{(1 + s, 2 + 3s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}$, $M =$

**Exercice 66 (E).** *Trouver le point d'intersection $M$ de la droite $D_1$ avec la droite $D_2$.*

$\underline{D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - y = 3\}, \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y = 1\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{D_1 = \{(1+2s, 3-s) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(x,y) \ : \ x - 2y + 1 = 0\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{D_1 = \{(t-2, t-1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}, \quad D_2 = \{(-1+2s, 3-s) \ : \ s \in \mathbb{R}\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

**Exercice 67 (TD).** *Trouver l'équation de la droite $D$ passant par les points $A$ et $B$.*

$\underline{A = (1,2) \ , \ B = (3,1)}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{A = (3,0) \ , \ B = (2,-1)}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{A = (1,0) \ , \ B = (2,3)}$

**Exercice 68 (E).** *Trouver l'équation de la droite $D$ passant par les points $A$ et $B$.*

$\underline{A = (2,3)\ ,\ B = (3,2)}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{A = (4,1)\ ,\ B = (2,2)}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{A = (-2,1)\ ,\ B = (1,3)}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{A = (1,2)\ ,\ B = (0,-1)}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

**Exercice 69 (TD).** *Trouver le point d'intersection $M$ de la droite $D_1$, passant par les points $A$ et $B$, avec la droite $D_2$ passant par les points $E$ et $F$, où* $\underline{A = (0,1)\ ,\ B = (4,3),\ E = (1,3)\ ,\ F = (3,1)}$.

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

**Exercice 70 (E).** *Trouver le point d'intersection $M$ de la droite $D_1$, passant par les points $A$ et $B$, avec la droite $D_2$ passant par les points $E$ et $F$, où* $\underline{A = (2,0)\ ,\ B = (4,4),\ E = (1,1)\ ,\ F = (5,3)}$.

### 3.3 Produit scalaire, distance et orthogonalité

**Exercice 71 (TD).** *Calculer le produit scalaire des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*.*

$\overrightarrow{u} = (1, 5)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1)$

$\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $\overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$

$\overrightarrow{u} = (2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$

$\overrightarrow{u} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{v} = (-4, 7, 2)$

$\overrightarrow{u} = (-2, 0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (0, 3, 8)$

$\overrightarrow{u} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 5)$

$\overrightarrow{u} = (1, 2, -1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1, 1, -3)$

**Exercice 72 (TD).** *Déterminer les valeurs du paramètre* $t$ *pour lesquelles les deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux.*

$\overrightarrow{u} = (t-1, 2t-3)$, $\overrightarrow{v} = (3, -1)$

$\overrightarrow{u} = (3t, 2+t, -t)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$

$\overrightarrow{u} = (t-1, 2t, 2)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$

**Exercice 73 (TD).** *Trouver la projection du point $M$ sur la droite $D$, dans les cas suivants :*
*(La projection de $M$ est le point $P \in D$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ soit orthogonal à $D$.)*

$M = (1, 2)\ ,\ D = \{(2t, 1 + t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}$

---

$M = (1, 3)\ ,\ D = \{(4 - t, 2 + 2t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}$

---

$M = (1, 5)\ ,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x - y = 2\}$

---

$M = (1, -3)\ ,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + 2y + 3 = 0\}$

---

$M = (-1, 1)\ ,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -2x + y = 3\}$

---

$M = (1, 0, 1)\ ,\ D = \{(2t, t - 1, -t + 4)\ :\ t \in \mathbb{R}\}$

**Exercice 74 (E).** *Trouver la projection du point $M$ sur la droite $D$, dans les cas suivants :*
*(La projection de $M$ est le point $P \in D$ tel que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ soit orthogonal à $D$.)*

$\underline{M = \left(\frac{3}{2}, 2\right)\ ,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x + y = 3\}}$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$\underline{M = (4, 0)\ ,\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 3x - y = 2\}}$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$\underline{M = (1, -2, 1)\ ,\ D = \{(t - 2, 1 - 2t, 2t + 1)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

**Exercice 75 (TD).** *Calculer la norme $|\overrightarrow{u}|$ du vecteur $\overrightarrow{u}$.*

$\overrightarrow{u} = (3, 4)$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$\overrightarrow{u} = (-x, 1)$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$\overrightarrow{u} = (1, -2, 2)$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

**Exercice 76 (TD).** *Calculer la distance entre les points $A$ et $B$.*

$A = (3, 4),\ B = (2, 1)$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$A = (1, 6),\ B = (4, 2)$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$A = (3, 1, 2),\ B = (1, -1, 1)$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

**Exercice 77 (A).** *On considére dans $\mathbb{R}^2$ le parallèlogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (c, d) \neq (0, 0)$, c'est-à-dire le parallèlogramme $EFGH$, oé $E = (0, 0)$, $F = (a, b)$, $G = (a + c, b + d)$ et $H = (c, d)$.*

*(a) Trouver la projection $P$ de $H$ sur la droite $D$ déterminée par les points $E$ et $F$.*

*(b) Calculer la distance entre $P$ et $H$.*

*(c) Calculer l'aire du $EFGH$.*

### 3.4 Aire et volume

**Exercice 78 (TD).** *Calculer l'aire du triangle ABC*

$A = (1, 0),\ \ B = (2, 3), C = (4, 4)$

---

$A = (0, 1),\ \ B = (2, 1), C = (-1, 2)$

---

**Exercice 79 (TD).** *Calculer l'aire du triangle déterminé par les droites $D_1$, $D_2$ et $D_3$.*
$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x + y = 0\}$, $\quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x - y = 2\}$,
$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 4x + y + 2 = 0\}$.

---

**Exercice 80 (TD).** *Calculer le volume du tétraèdre ABCD*

$A = (0, -1, 0),\ \ B = (0, 4, 1), C = (1, 4, 2), D = (0, 0, 2)$

---

$A = (1, 0, 0),\ \ B = (0, 2, 3), C = (1, 4, 4), D = (0, -1, 0)$

### 3.5 Produit vectoriel

**Exercice 81 (TD).** *Calculez le produit vectoriel des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (0,0,-1)$

---

$\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (1,1,1)$

---

$\overrightarrow{u} = (2,3,1),\ \overrightarrow{v} = (1,2,1)$

---

$\overrightarrow{u} = (1,1,1),\ \overrightarrow{v} = (-3,2,1)$

---

$\overrightarrow{u} = (1,0,1),\ \overrightarrow{v} = (x,0,-1)$

---

$\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0),\ \overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

---

$\overrightarrow{u} = (3,2,-1),\ \overrightarrow{v} = (2,1,z)$

---

$\overrightarrow{u} = (1,2,2),\ \overrightarrow{v} = (3,1,1)$

### 3.6 Droites et plans dans l'espace

**Exercice 82 (TD).** *Trouver l'équation paramétrique de la droite $D$ passante par le point $M$ et orthogonale au plan $P$.*

$M = (1, 2, 4),\ \ P = \{(x, y, z)\ :\ x + y + z = 3\}$

---

$M = (-1, 0, 0),\ \ P = \{(x, y, z)\ :\ x + 2y + 3z = 7\}$

---

$M = (1, 2, 4),\ \ P = \{\alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 0)\ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

---

$M = (1, -2, 1),\ \ P = \{\alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 1)\ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

---

**Exercice 83 (TD).** *Trouver l'équation implicite du plan $P = \{M + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}\ :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$.*

$M = (1, 0, 1),\ \ \overrightarrow{u} = (1, 1, 0),\ \ \overrightarrow{v} = (1, 0, 0)$

---

$M = (1, 0, 0),\ \ \overrightarrow{u} = (1, 2, 3),\ \ \overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$

**Exercice 84 (TD).** *Trouver l'équation implicite du plan $P$ déterminé par les points $A$, $B$ et $C$.*

$\underline{A = (1,0,1),\ B = (1,1,0),\ C = (1,0,0)}$

---

$\underline{A = (2,0,1),\ B = (1,1,1),\ C = (-1,0,-1)}$

---

**Exercice 85 (TD).** *Trouver l'équation implicite du plan $P$ contenant le point $A$ et la droite $D$.*

$\underline{A = (1,0,1),\ D = \{(1+t, 2-t, -1+t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

---

$\underline{A = (-1,1,0),\ D = \{(1+2t, t, 1-t)\ :\ t \in \mathbb{R}\}}$

---

**Exercice 86 (TD).** *Trouver une représentation paramétrique du plan $P$.*

$\underline{P = \{(x,y,z)\ :\ x+y+z = 3\}}$

---

$\underline{P = \{(x,y,z)\ :\ x+2y-2z = 1\}}$

**Exercice 87 (TD).** *Soient $P_1$ et $P_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la forme paramétrique de la droite $D = P_1 \cap P_2$.*

$\underline{P_1 = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 3\}, \ P_2 = \{(x, y, z) \ : \ x - 2y + z = 0\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{P_1 = \{(x, y, z) \ : \ x + y - z = -1\}, \ P_2 = \{(x, y, z) \ : \ x + 2y + 3z = 0\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{P_1 = \{(x, y, z) \ : \ 2x - z = 1\}, \ P_2 = \{(x, y, z) \ : \ x + y = 2\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

**Exercice 88 (TD).** *Trouver une représentation implicite de la droite $D$*

$\underline{D = \{(1, 0, 2) + t(1, 1, 1) \ : \ t \in \mathbb{R}\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$\underline{D = \{(1 + t, 2 - t, t - 3) \ : \ t \in \mathbb{R}\}}$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

**Exercice 89 (A).** *On suppose que un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1, 0, 1)$ en direction $\overrightarrow{v}$. Trouvez le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ pour lequel la réflexion du rayon dans le miroir d'équation $P : x - y + z = 1$ passe par le point $T = (3, 2, 3)$.*

**Exercice 90 (A).** *On suppose que un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1, 1, 2)$ en direction $\overrightarrow{v} = (-1, -1, -1)$. Trouvez l'équation du plan $P$ passant par le point $M = (2, 0, 0)$ pour lequel la réflexion du rayon dans le miroir plain $P$ passe par le point $T = (-2, -2, 1)$.*