Règle de l'hôpital

Andrea Pulita

La règle de l'Hôpital affirme que, si certaines conditions sont vérifiées pour f et g, on a

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

Parfois il est beaucoup plus simple de étudier le rapport $f'(x)/g'(x)$ au lieu de $f(x)/g(x)$. Le conditions pour que cela soit vrai sont les suivantes.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. On considère les 3 situations suivantes.

1. c est un point de $\mathbb{R}$ adhérent à I;
2. $c = +\infty$ et I est illimité supérieurement (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $]M, +\infty[\subseteq I$);
3. $c = -\infty$ et I est illimité inférieurement (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $]-\infty, M[\subseteq I$).

Soient $f, g : I - \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

4. f et g sont dérivables sur $I - \{c\}$;
5. pour tout $x \in I - \{c\}$ on a $g'(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, pour c fini ou $c = \pm\infty$, supposons que*

(a) la limite $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée de type

$$\frac{0}{0} \qquad ou \qquad \frac{\textit{n'importe quoi}}{\infty}$$

(b) Soit $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et c'est soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

alors $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi et les deux limites coïncident:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 1: La règle de l'Hôpital marche aussi pour le calcul des limites à droite ou à gauche. Il suffit de prendre $c = \sup I$ ou $c = \inf I$.

Remarque 2: Le théorème affirme que si la limite de f'/g' existe, alors la limite de f/g existe et est égale à celui de f'/g'. Il peut arriver que la limite $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ existe sans que la limite

$$\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$$

existe. Par exemple si $f(x) = x + (\cos(x))/2$ et $g(x) = x + (\sin(x))/2$, alors:

- On a $f'(x) = 1 - (\sin(x))/2$ et $g'(x) = 1 + (\cos(x))/2$, donc $f'(x) > 0$ et $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions f et g sont strictement croissantes et de plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

- On a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+(\cos(x))/(2x)}{1+(\sin(x))/(2x)} \quad = \quad \frac{1+0}{1+0} \quad = \quad 1\,.$$

- Par contre on le rapport des dérivées
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad = \quad \frac{1-(\sin(x))/2}{1+(\cos(x))/2}$$
n'a pas de limite quand $x \to +\infty$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f'(x)/g'(x) = 2/3$ si $x = 2k\pi$ et $f'(x)/g'(x) = 1/2$ si $x = \pi/2 + 2k\pi$.

Remarque 3: La règle de l'hôpital est très utile mais il ne faut l'appliquer aveuglemennt car parfois cela empire les choses. Par exemple si l'on veut calculer $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}/x$ (c'est une forme indéterminée du type $0/0$), le rapport des dérivées est
$$\frac{e^{-1/x}(1/x^2)}{1} \quad = \quad \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$
qui est plus compliqué de la limite de départ. Si l'on dérive une deuxième fois le degré du dénominateur augmente de plus en plus. Dans ce cas particulier il est convenable de faire le changement de variable $t = 1/x$, qui donne $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t/e^t$. Ce dernier limite se fait maintenant facilement avec l'Hôpital car $f'/g' = 1/e^t$ qui tends vers 0. En résumant
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}/x \quad \overset{(t=1/x)}{=} \quad \lim_{t\to+\infty} t/e^t \quad \overset{\text{Hôpital}}{=} \quad \lim_{t\to+\infty} 1/e^t \quad = \quad 0\,.$$

Exemples d'applications directe:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$

Exemples d'applications itérée:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)} = 2$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \overset{\text{Hôpital}}{=} \cdots \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

Exemples d'applications aux formes indéterminées $0\cdot\infty$ et $\infty-\infty$:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x\ln(x)+x-1} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)+2} = \frac{1}{2}$

Exemple d'application aux puissances:

1. $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)} \overset{\text{Hôpital}}{=} \cdots = e^0 = 1.$

Remarquons que l'égalité $(*)$ est possible car la fonction e^x est continue.

Application à l'existence de la dérivée.

Corollaire. *Supposons que*

- $c \in I$;
- f *est dérivable en* $I - \{c\}$;
- f *est continue en* $x = c$;
- $\lim_{x\to c} f'(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$.

Alors $f'(c)$ *existe et*

$$f'(c) \; = \; \lim_{x\to c} f'(x) \; .$$

Preuve. Par définition $f'(c)$ est la limite $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, si elle existe. La preuve consiste à appliquer la règle de l'Hôpital à cette limite. Notamment, la continuité de f en c équivaut à l'égalité $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, donc le numérateur $h(x) = f(x) - f(c)$ tend vers 0, tout comme le dénominateur $x - c$. C'est donc une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$ et on peut appliquer la règle de l'Hôpital. Comme $h'(x) = f'(x)$, on trouve

$$f'(c) \; = \; \lim_{x\to c} \frac{h(x)}{x-c} \; \overset{\text{Hôpital}}{=} \; \lim_{x\to c} \frac{h'(x)}{1} \; = \; \lim_{x\to c} f'(x) \; .$$

Exemple. Soit $I = \mathbb{R}$ et $c = 0$. On considère la fonction

$$f(x) \; = \; \begin{cases} x^3 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• La fonction est continue en $x = 0$ car on a

$$-x^3 \; \leq \; |x^3 \sin(\frac{1}{x})| \; \leq \; x^3$$

et par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to 0} x^3 \sin(\frac{1}{x}) \; = \; 0 \; = \; f(0) \; .$$

• $f'(x)$ existe pour tout $x \neq 0$ car $f(x)$ est composition de fonctions élémentaires dérivables pour $x \neq 0$.

• Pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) \; = \; 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x^3 \cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) \; = \; 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x})$$

donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ et alors par le corollaire on trouve que $f'(0)$ existe et est nulle.

Remarque. Si dans l'exemple précédent on prend $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ou $x \sin(\frac{1}{x})$ au lieu de $x^3 \sin(\frac{1}{x})$, alors tout se passe pareil jusqu'au dernier point (f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable pour $x \neq 0$), mais $\lim_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas, et le Corollaire ne s'applique pas. On peut démontrer directement à partir de la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ que dans le premier cas avec $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ la dérivée existe en $x = 0$ (utiliser le théorème des gendarmes), alors que dans le deuxième cas avec $x \sin(\frac{1}{x})$ la dérivée n'existe pas en $x = 0$, car la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'existe pas.