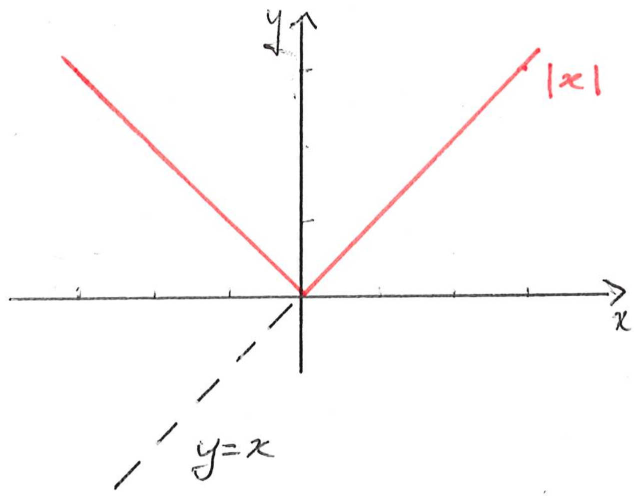
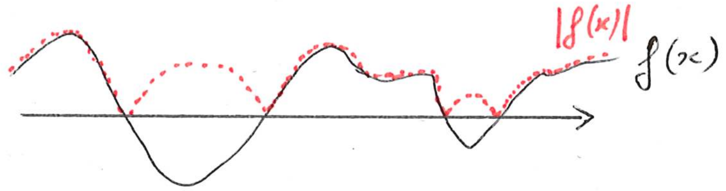
② On rappelle la définition de la valeur absolue :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

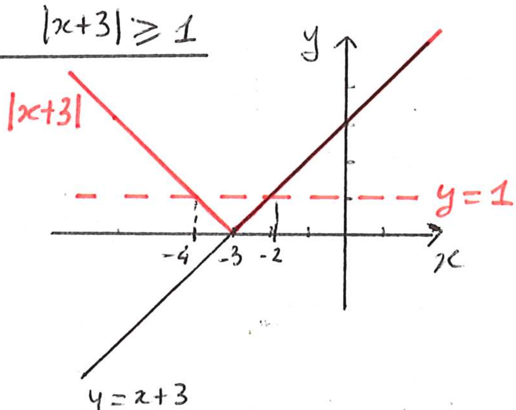


D'une façon générale, on obtient la valeur absolue d'une expression en la laissant inchangée si elle est positive, et en prenant son symétrique par rapport à l'axe horizontal si elle est négative.



On déduit de cela les solutions des (in)équations suivantes.

(a) $|x+3| \geq 1$



Le dessin ci-contre représente les fonctions $|x+3|$ et 1. On constate que $|x+3| \geq 1$ pour tout x en dehors de l'intervalle $[-4,-2]$.

Démontrons cela par le calcul :

$x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$. Donc $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$

* Si $x \geq -3$: $|x+3| \geq 1 \iff x+3 \geq 1$

$\iff x \geq -2$ (ce qui est compatible avec $x \geq -3$)

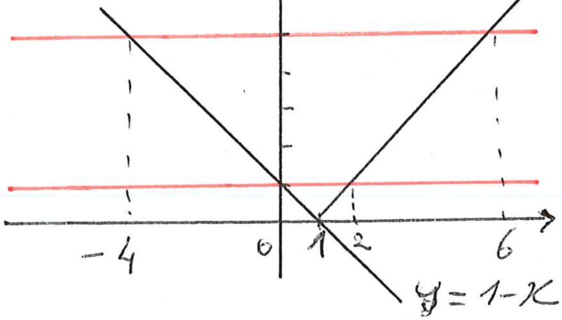
* Si $x \leq -3$: $|x+3 \geq 1 \iff -x-3 \geq 1$

$\iff -x \geq 4$

$\iff x \leq -4$ (ce qui est compatible avec $x \leq -3$)

D'où $|x+3| \geq 1 \iff x \in]-\infty, -4] \cup [-2, +\infty[$

(b) $1 < |1-x| \leq 5$



Graphiquement, on voit que $x \in [-4, 0[\cup]2, 6]$.

Par le calcul : $1-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$. Donc $\begin{cases} |1-x| = 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \\ |1-x| = -1+x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

* Si $x \leqslant 1$, $1 < |1-x| \leqslant 5 \iff 1 < 1-x \leqslant 5$

$\iff -1 > -1+x \geqslant -5$

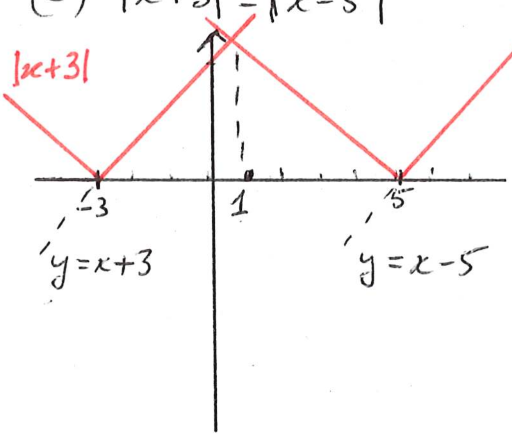
$\iff 0 > x \geqslant -4$ (ce qui est compatible avec $x \leqslant 1$)

* Si $x \geqslant 1$, $1 < |1-x| \leqslant 5 \iff 1 < -1+x \leqslant 5$

$\iff 2 < x \leqslant 6$ (ce qui est compatible avec $x \geqslant 1$)

D'où les solutions : $x \in [-4, 0[\cup]2, 6]$.

(c) $|x+3| = |x-5|$



Graphiquement, on voit qu'il y a une unique solution $x = 1$.

Par le calcul :

$$|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \leqslant -3 \\ x+3 & \text{si } x \geqslant -3 \end{cases}$$

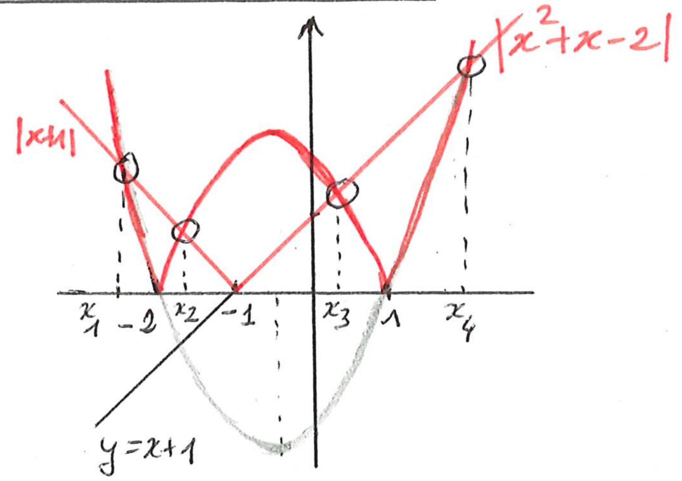
et

$$|x-5| = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x \leqslant 5 \\ x-5 & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

D'où le tableau :

x	$-\infty$ -3	-3 5	5 $+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$ 0	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$	$-x+5$ 0	$x-5$
$\lvert x+3\rvert = \lvert x-5\rvert$	$-x-3 = -x+5 \iff -3 = 5$	$x+3 = -x+5 \iff 2x = 5-3$	$x+3 = x-5 \iff 3 = -5$
Conclusion	impossible	$x = 1$	impossible

d) $|x+1| = |x^2+x-2|$



$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ s'annule en $x=1$ et $x=-2$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ minimum en $x = -\frac{1}{2}$

Il y a visiblement 4 solutions, notées x_1, x_2, x_3, x_4 sur le dessin, avec

$x_1 < -2 < x_2 < -1 < 0 < x_3 < 1 < x_4$

Par le calcul : $x^2+x-2=0 \iff x=1$ ou $x=-2$. $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
Signe de $(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\|x^2+x-2\|$		x^2+x-2	0	$-x^2-x+2$		$-x^2-x+2$	0	x^2+x-2	
$\|x+1\|$		$-x-1$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\|x^2+x-2\| = \|x+1\|$		$x^2+x-2=-x-1 \iff x^2+2x-1=0$		$-x^2-x+2=-x-1 \iff x^2-3=0$		$-x^2-x+2=x+1 \iff x^2+2x-1=0$		$x^2+x-2=x+1 \iff x^2-3=0$	

$x^2+2x-1=0$ admet 2 solutions $x_1 = -1-\sqrt{2}$ et $x_3 = -1+\sqrt{2}$

$x^2-3=0$ admet 2 solutions $x_2 = -\sqrt{3}$ et $x_4 = \sqrt{3}$

(et on a bien $x_1 \leq -2$, $-2 \leq x_2 \leq -1$, $-1 \leq x_3 \leq 1$ et $1 \leq x_4$)