

---

CORRECTION DE L'EXERCICE 23 (f) DU TD 4

---

On cherche à calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$ .

$$\begin{aligned} x \ln x - x \ln(x+2) &= x \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \\ &= -x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= -2 \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \end{aligned}$$

On pose  $X = \frac{2}{x}$ .

$$\begin{aligned} x \ln x - x \ln(x+2) &= -2 \frac{\ln(1+X)}{X} \\ &= -2 \frac{\ln(1+X) - \ln 1}{1+X-1} \end{aligned}$$

Il s'agit d'un taux d'accroissement. Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2)) &= \lim_{X \rightarrow 0} -2 \frac{\ln(1+X) - \ln 1}{1+X-1} \\ &= -2 \ln'(1) \\ &= -2 \frac{1}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$