DOCUMENT 15

La fonction exponentielle complexe

La fonction exponentielle $x \to e^x$ est d'une grande importance en analyse réelle. Nous allons introduire ici différentes généralisations de cette fonction au cas complexe et voir les analogies mais aussi les différences, entre les exponentielles réelles et complexes. Cette introduction est faite à partir des fonctions circulaires dont différentes définitions sont proposées en appendice.

1. L'application $t \mapsto e^{it}$

1.1. Les fonctions exponentielles réelles. On peut définir les fonctions exponentielles réelles comme étant les fonctions réciproques des fonctions logarithmes. En particulier, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien, $x \mapsto \ln\ x$, est la fonction exponentielle de base e, $x \mapsto e^x$. Plus gnralement, la fonction réciproque de la fonction logarithme de base $a > 0$ et différent de 1, $x \mapsto log_a\ x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, est la fonction exponentielle $x \mapsto e^{x \ln a}$.

Les fonctions exponentielles possèdent plusieurs caractérisations intéressantes et en particulier les deux suivantes qui permettrons d'introduire la notation exponentielle e^{it}.

Proposition 15.1. *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *La fonction f est une fonction exponentielle ;*

(2) *La fonction f est continue, n'est pas constante, et vérifie*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x + y) = f(x)f(y);$$

(3) *La fonction f n'est pas constante et il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que f soit la solution de l'équation différentielle*

$$y\prime + ay = 0$$

verifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

En particulier, la fonction exponentielle $x \mapsto e^{ax}$ est la solution de l'équation $y' - ay = 0$ vérifiant la condition $y(0) = 1$.

1.2. La notation e^{it}. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(t) = \cos t + i \sin t.$$

Les fonction sinus et cosinus étant indéfiniment dérivables, il en est de même pour la fonction φ. En particulier, cette fonction est continue,

$$\varphi'(t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i\varphi(t).$$

et plus généralement on a $\varphi^{(n)}(t) = i^n \varphi(t)$.

La fonction φ est donc solution de l'équation différentielle $y' - iy = 0$ et elle vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.

Pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(t+t') &= \cos(t+t') + i\sin(t+t') \\
&= \cos t\cos t' - \sin t\sin t' + i(\sin t\cos\ t' + \sin t'\cos t) \\
&= (\cos t + i\sin t)(\cos t' + i\sin t') \\
&= \varphi(t)\varphi(t').
\end{aligned}$$

On voit donc que la fonction φ vérifie la même équation fonctionnelle que les fonctions exponentielles réelles et qu'elle est la solution du même type d'équation différentielle avec la même condition ininiale $y(0) = 1$. Tout cela justifie d'adopter une nouvelle notation pour la fonction φ en posant :

$$\varphi(t) = e^{it}.$$

On verra en appendice que la définition des fonctions exponentielles à l'aide des séries entières procure un argument supplémentaire pour l'adoption de cette notation exponentielle.

1.3. Etude de l'application $t \mapsto e^{it}$.

PROPOSITION 15.2. *L'application $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = e^{it}$ est indéfiniment dérivable avec $\varphi^{(n)}(t) = i^n\varphi(t)$. C'est un homomorphisme surjectif et 2π-périodique du groupe $(\mathbb{R},+)$ sur le groupe $(\mathbb{U},.)$. Son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.*

Preuve. Il est clair que $\varphi(\mathbb{R} \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}b$ et pour montrer que l'image de φ est $\mathbb{U}$ considérons $z \in \mathbb{U}$. On a $z = a + ib$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos t$ et $b = \sin t$ (voir le document "Représentations paramétriques des coniques" du fascicule 1) d'où $\varphi(t) = z$ et la surjectivité de φ.

Il est clair que φ est 2π-périodique et que $\varphi(t) = 1$ équivaut à $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ d'où $\ker\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarques. 1) Le résultat précédent entraine que le groupe quotient $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{U},.)$ grâce à l'application $\overline{\varphi} : (t+2\pi\mathbb{Z}) \mapsto \varphi(t)$. Ce résultat est en génral utilisé lors de la définition de la mesure des angles orientés et de l'argument d'un nombre complexe, l'application argument étant $\overline{\varphi}^{-1}$.
2) La restriction de φ à $[0,2\pi[$ est une bijection de cette intervalle sur $\mathbb{U}$ mais ce n'est pas un isomorphisme car $[0,2\pi[$ n'est pas stable pour $+$.

2. Définition de e^z et appplications $t \in \mathbb{R} \to e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$.

2.1. Définition de e^z. On a vu que $e^{it_1+it_2} = e^{it_1}e^{it_2}$. Pour deux imaginaires purs z_1 et z_2 on a donc $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Si plus généralement, on veut associer à tout nombre complexe z un nombre complexe, noté e^z, ayant les propriétés suivantes :

- l'application $z \to e^z$ prolonge à $\mathbb{C}$ l'exponentielle réelle;
- pour $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, $e^z = \varphi(t)$;
- pour tout couple $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$; $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

alors la seule définition possible de e^z pour un nombre complexe $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, est donc

$$e^z = e^{x+iy} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ on a alors:

$$\begin{aligned} e^{(z_1+z_2)} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} \\ &= [e^{x_1}e^{iy_1}][e^{x_2}e^{iy_2}] \\ &= e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

On peut donc énoncer :

Proposition 15.3. *La fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$, définie par*

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy,$$

prolonge la fonction exponentielle relle et pour $z = it$, $t \in \mathbb{R}$, $e^z = \varphi(t)$. C'est un homomorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, .)$, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ et de période $2i\pi$.

Preuve. Il est clair que $e^z \neq 0$ car $|e^z| = e^x$ et si $0 \neq z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ alors $z = e^{\ln\rho}e^{i\theta} = e^{\ln\rho+i\theta}$ ce qui montre que l'image de $z \to e^z$ est $\mathbb{C}^*$. D'autre part, $e^{x+iy} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}$, équivaut à $e^x \cos y = 1$ et $e^x \sin y = 0$ ce qui est réalisé si et seulement si $x = 0$ et $y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Il est clair que $2i\pi$ est une période de $z \to e^z$.

Remarques. 1) La proposition précédente entraine que le groupe $(\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{C}^*, .)$.
2)Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. L'application

$$z \to e^{\alpha x+\beta y}e^{i(\gamma x+\delta y)}$$

est un homomorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, .)$ si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. (Cette condition est utile seulement pour la sujectivité).
3) On a $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x$ et $\arg e^z = y + 2\pi\mathbb{Z}$ car $e^x(\cos y + i \sin y)$ est la forme trigonométrique de e^z.

2.2. Les appplications $t \in \mathbb{R} \to e^{at}$, $a \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 15.4. *Pour tout $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}^*$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $t \to e^{at}$, est un homomorphisme indéfiniment dérivable du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, .)$. Il est injectif si et seulement si $\alpha \neq 0$ et lorsque $\alpha = 0$ son noyau est $\frac{2\pi}{\beta}\mathbb{Z}$.*

Preuve. L'application $t \to e^{at}$ est le produit des deux fonctions indéfiniment dérivable $t \to e^{\alpha t}$ et $t \to e^{i\beta t}$. Elle est donc indfiniment dérivable et

$$(e^{at})' = (e^{\alpha t})'e^{i\beta t} + e^{\alpha t}(e^{i\beta t})' = \alpha e^{\alpha t}e^{i\beta t} + e^{\alpha t}i\beta e^{i\beta t} = (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}e^{\beta t} = ae^{at}.$$

Elle est aussi composée de l'homomorphisme $t \to at$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, +)$ et de l'homomorphisme $z \to e^z$ de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, .)$. C'est donc un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, .)$.

Si $\alpha = 0$ alors $e^{at} = \varphi(\beta t)$ et l'application $t \to e^{at}$ est donc une application périodique, de période $\frac{2\pi}{\beta}$. Elle est en particulier non injective. Si $\alpha \neq 0$ alors $|e^{at}| = e^{\alpha t}$ et l'injectivité de l'exponentielle réelle entrainent que $t \neq t'$ implique $e^{at} \neq e^{at'}$ d'où l'injectivité de l'application $t \to e^{at}$.

On a $e^{(\alpha+i\beta)t} = 1$ si et seulement si $e^{\alpha t}\cos\beta t = 1$ et $e^{\alpha t}\sin\beta t = 0$. Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et les deux égalités précédentes équivalent à $t \in \frac{2\pi}{\beta}\mathbb{Z}$ d'où le noyau de l'homomorphisme $t \to e^{i\beta t}$.

Remarque. Soit $a = \alpha + i\beta$, $\alpha\beta \neq 0$, et $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. La courbe Γ d'équations paramétriques $x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ et $y(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ dans $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une spirale qui s'enroule autout du point O. Si $M(t)$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ alors, en supposant $\alpha > 0$, $||\overrightarrow{OM}|| = e^{\alpha t}$ est une fonction strictement croissante de t avec $\lim\limits_{t\to-\infty} ||\overrightarrow{OM}|| = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} ||\overrightarrow{OM}|| = +\infty$. On a $mes(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}) = t + 2\pi\mathbb{Z}$ qui est une fonction 2π-périodique de t.

3. Applications

3.1. Applications en algèbre. Les différentes fonctions exponentielles introduites ici permettent de construire plusieurs isomorphismes de groupes, certains d'entre eux ayant déjà été remarqués.

L'application $t \in \mathbb{R} \to e^{it}$ est un homomorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, .)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Par passage au quotient, on obtient un isomorphisme $\overline{\varphi}$ entre le groupe $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et le groupe $(\mathbb{U}, .)$, l'isomorphisme réciproque $\overline{\varphi}^{-1}$ étant l'application argument.

A partir de l'application ϕ qui à l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ fait correspondre le nombre complexe de module 1 $a + ib$, a et b étant les éléments de la première colonne de la matrice dans une base directe de l'unique rotation ρ telle que $\rho(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$, on obtient l'isomorphisme $\mu = \arg\circ\phi$ entre le groupe des angles et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. C'est la mesure en radians.

On vérifie facilement que l'application $z \in \mathbb{C}^* \to (|z|, \dfrac{z}{|z|})$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, .)$ sur $(\mathbb{R}^*, .) \times (\mathbb{U}, .)$ d'où un isomorphisme, réalisé par l'application qui à un nombre complexe non nul fait correspondre son module et son argument, entre $(\mathbb{C}^*, .)$ et $(\mathbb{R}^*, .) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$. Cet isomorphisme traduit le fait qu'un nombre complexe non nul est entièrement déterminé par son module et son argument et que pour multiplier deux nombres complexes non nuls on multiplie leurs modules et on ajoute leurs arguments.

Plus généralement, les applications $t \to e^{i\beta t}$, $\beta \in \mathbb{R}$, permettent d'obtenir des isomorphismes entre les groupes $(\mathbb{R}/\dfrac{2\pi}{\beta}\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, .)$. Cela montre que tous les groupes quotients $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$, $a \neq 0$, sont isomorphes entre eux , contrairement aux groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

L'application $z \in \mathbb{C} \to e^z$ est un homomorphisme surjectif entre les groupes $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, .)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ d'où on déduit un isomorphisme entre $(\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, .)$.

On peut aussi montrer que les isomorphismes précédents sont en fait des isomorphismes entre groupes topologiques.

3.2. Applications à la trigonométrie.

3.2.1. *Formule de Moivre.* L'application $\varphi : t \to e^{it} = \cos t + i\sin t$ étant un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{U}, .)$ on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(nt) = (\varphi(t))^n$ ce qui se traduit par la formule de Moivre :

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

On peut évidemment aussi démontrer cette formule par récurrence sur n, pour $n \geq 0$, et ensuite la déduire pour $n < 0$.

Par la formule du binme on a, pour n¿0,

$$(\cos t + i\sin t)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, i^{n-k}\cos^k t\sin^{n-k} t = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, i^k\cos^{n-k} t\sin^k t$$

d'où, en utilisant la formule de Moivre et l'identification des parties réelles et imaginaires,

$$\cos nt = \sum_{k=0}^{k=E(n/2)} C_n^{2k}(-1)^k \cos^{n-2k} t \sin^{2k} t$$

et

$$\sin nt = \sum_{k=0}^{k=E((n-1)/2)} C_n^{2k+1}(-1)^k \cos^{n-2k-1} t \sin^{2k+1} t.$$

Ces expressions permettent d'obtenir $\tan nt$ sous forme d'une fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$ lorsque $t \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Après division du numérateur et du dénominateur par $\cos^n t$ on a $\tan nt$ sous forme d'une fraction rationnelle en $\tan t$:

$$\begin{aligned}\tan nt &= \frac{\sum_{k=1}^{k=E(n/2)} C_n^{2k+1}(-1)^k \tan^{2k+1} t}{\sum_{k=0}^{k=E(n/2)} (-1)^k \tan^{2k} t} \\ &= \frac{C_n^1 \tan t - C_n^3 \tan^3 t + C_n^5 \tan^5 t - \dots}{1 - C_n^2 \tan^2 t + C_n^4 \tan^4 t - \dots}.\end{aligned}$$

On remarque que dans $\cos nt$ toutes les puissances de $\sin t$ sont paires. En utilisant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ on peut donc exprimer $\cos nt$ sous forme d'un polynôme en $\cos t$, c'est-à-dire écrire $\cos nt = T_n(\cos t)$ avec $T_n(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Les polynômes T_n sont connus sous le nom de polynômes de Tchbytchev. Leur suite est déterminée par la relation de récurrence

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), \quad n \geq 0,$$

et ses deux premiers termes : $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. On a $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ d'où $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, $\cos 4t = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$.

Les polynômes de Tchébitchev sont des solutions de l'quation différentielle, dite de Tchébitchev,

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Ce sont aussi les coefficients de la division suivant les puissances croissantes des deux polynômes en t, $1 - xt$ et $1 - 2xt + t^2$.

On peut aussi montrer que si n est pair alors $\cos nt$ est un polynôme en $\sin t$ et si n est impair $\sin nt$ est un polynôme en $\sin t$.

3.2.2. *Formules d'Euler.* On a $\overline{e^{it}} = \cos t - i \sin t = \cos -t + i \sin -t = e^{-it}$ d'où les formules d'Euler, obtenues en utilisant les relations donnant la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

En utilisant ces formules, on peut exprimer $\cos^n t$ et $\sin^n t$ en fonctions linéaires des $\cos kt$ et des $\sin kt$, $0 \leq k \leq n$. Cela est particulirement utile pour déterminer une primitive de

$t \to \cos^{2p} t \sin^{2q} t$. (On rappelle que si l'un des exposants est impair c'est le changement de variable $u = \cos t$ ou $v = \sin t$ qui est le plus efficace.)

Par exemple :

$$\begin{aligned} \cos^5 t &= (\frac{e^{it}+e^{-it}}{2})^5 \\ &= \frac{1}{2^4}\frac{e^{5it}+e^{-5it}+5(e^{3it}+e^{-3it})+10(e^{it}+e^{-it})}{2} \\ &= \frac{1}{16}\cos 5t + \frac{5}{16}\cos 3t + \frac{5}{8}\cos t. \end{aligned}$$

3.2.3. *Application aux calculs trigonométriques.* Un exemple classique est le calcul des sommes

$$C = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

et

$$S = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

On a pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} C + iS &= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix} \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{(n+1)i\frac{x}{2}} \frac{e^{-(n+1)i\frac{x}{2}} - e^{(n+1)i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \\ &= e^{ni\frac{x}{2}} \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Il reste à remplacer $e^{ni\frac{x}{2}}$ par $\cos n\frac{x}{2} + i\sin n\frac{x}{2}$ et à identifier parties réelles et parties imaginaires pour obtenir

$$C = \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos n\frac{x}{2}, \quad S = \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin n\frac{x}{2}.$$

Le calcul de C et S pour $x \in \pi\mathbb{Z}$ est trivial.

3.3. Applications à l'analyse.

3.3.1. *Application aux équations différentielles linéaires.* On a vu que la fonction $x \to e^{ax}$, $a \in \mathbb{C}$, est solution de l'équation différentielle $y' - ay = 0$. On peut résoudre cette équation avec la mme méthode que dans le cas $a \in \mathbb{R}$.

Une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de $y' - ay = 0$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) - af(x) = 0.$$

La fonction $x \to e^{-ax}$ ne prenant jamais la valeur 0 cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-ax}f'(x) - ae^{-ax}f(x) = 0.$$

La fonction $x \to e^{-ax}$ étant dérivable cela équivaut encore à

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^{-ax}f(x))' = 0$$

d'où l'existence d'une contante $C \in \mathbb{C}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-ax}f(x) = C.$$

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$, ou plus généralement sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, de $y' - ay = 0$ sont les fonctions

$$f(x) = Ce^{ax} \quad C \in \mathbb{C}.$$

La résolution de ce type d'équation différentielle est utile ensuite pour résoudre

$$y'' + ay' + by = 0$$

lorsque $\Delta = a^2 - 4b < 0$. (Voir le document concernant le trinme du second degré.)

3.3.2. *Définition de nouvelles fonctions.* Comme dans le cas réel, on peut associer à la fonction exponentielle complexe les fonctions hyperboliques complexes définies par les formules

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

En s'inspirant des formules d'Euler, on peut aussi introduire les fonctions cosinus et sinus complexes par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Dans le cas complexe ces fonctions ne sont pas trs différentes des fonctions hyperboliques car $\cos z = \cosh iz$ et $\sin z = -i \sinh iz$

3.4. Applications aux phénomènes périodiques. L'étude du courant alternatif, de phénomènes optique ou acoustique fait souvent appel aux fonctions trigonométriques et l'usage de l'exponentielle complexe permet de traiter simplement de nombreux problèmes.

Par exemple, l'intensité du courant produit par un alternateur est donnée par

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Les constantes I_0, ω et φ sont appelées amplitude, pulsation et phase. On a

$$I(t) = \Re(Ae^{i\omega t})$$

avec $A = I_0 e^{i\varphi}$.

Notons que $I_0 = |A|$ et que φ est un argument de A qui est appelé l'amplitude complexe de la fonction.

Si deux fonctions de même fréquence interviennent, $I_1(t) = \Re(A_1 e^{i\omega t})$ et $I_2(t) = \Re(A_2 e^{i\omega t})$ alors

$$I_1(t) + I_2(t) = \Re((A_1 + A_2)e^{i\omega t}).$$

La somme est encore une fonction sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude $I = |A_1 + A_2|$ et dont la phase φ est un argument de $A_1 + A_2$.

Si $A_k = I_k e^{i\varphi_k}$, $k = 1, 2$, alors :

$$\begin{aligned} I^2 &= |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2 \\ &= I_1^2 + I_2^2 + 2\Re(A_1\overline{A_2}) \\ &= I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Le calcul pratique de φ est plus compliqué. On peut en avoir une approximation par la construction géométrique des nombres complexes A_1, A_2 et $A_1 + A_2$ (construction de Fresnel).

4. Appendice

4.1. Définition de l'exponentielle complexe à l'aides des séries. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini car $\frac{1}{(n+1)!}/\frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Elle définie donc une fonction analytique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on note $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Cette fonction coïncide avec sa fonction dérivée et vérifie l'identité fonctionnelle $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Comme $e^0 = 1$, la proposition 15.1 entraine qu'elle prolonge la fonction exponentielle réelle.

En posant $z = x+iy$, on a $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ et

$$e^{iy} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{y^{2p}}{(2p)!} + i\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Ici, soit on connait déjà les fonctions circulaires et leurs développements en séries entières et on constate alors que $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, soit on pose :

$$\cos y = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{y^{2p}}{(2p)!}, \quad \sin y = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Dans les deux cas,

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

On a retrouvé la formule donnant la définition de e^z en supposant connu les fonctions circulaires et la fonction exponentielle réelle.

4.2. La définition des fonctions circulaires. On vient de voir une définition des fonctions circulaires à l'aide des séries entières mais il y a d'autres possibilités pour définir ces fonctions.

4.2.1. *La définition géométrique.* Dans l'enseignement secondaire on donne une définition géométrique des fonctions circulaires. Donnons en les grandes lignes avec des notions mathématiques qui ne figurent plus dans les programmes de l'enseignement secondaire.

Il est assez facile de définir le cosinus ou le sinus d'un angle orienté de vecteurs unitaires d'un plan euclidien de la façon suivante : soit $((O_i,\overrightarrow{u_i}),(O_i,\overrightarrow{v_i}))$, $i = 1,\ 2$, deux couples de demi-droites, $A_i \in (O_i,\overrightarrow{v_i})$, $A_i \neq O_i$, et H_i la projection orthogonale de A_i sur la droite $(O_i,\overrightarrow{u_i})$. Si $(\widehat{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}})$ alors il existe une rotation $\overrightarrow{\rho}$ telle que $\overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_2}$. On va montrer qu'alors

$$\frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{O_1A_1}} = \frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{O_2A_2}}.$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{s} = \dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\overrightarrow{\rho}$. On a $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{u_1}) = \dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{v_1}) = \dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\overrightarrow{v_2}$. La similitude affine s, telle que $s(O_1) = O_2$ et d'application linéaire associée $\overrightarrow{s}$, transforme donc la demi-droite $(O_1, \overrightarrow{v_1})$ en la demi-droite $(O_2, \overrightarrow{v_2})$ $(\dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}} > 0)$ et la droite $(O_1, \overrightarrow{u_1})$ à pour image la droite $(O_2, \overrightarrow{u_2})$. On a

$$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{O_1A_1}) = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\,\overrightarrow{\rho}(\overrightarrow{O_1A_1}) = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\,\overrightarrow{\rho}(\overline{O_1A_1}\,\overrightarrow{v_1}) = \overline{O_2A_2}\,\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{O_2A_2}$$

et donc $s(A_1) = A_2$. L'image par s de la perpendiculaire à $(O_1, \overrightarrow{u_1})$ passant par A_1 est donc la perpendiculaire à $(O_2, \overrightarrow{v_2})$ passant par A_2 (car les similitudes conservent l'orthogonalité) d'où $s(H_1) = H_2$ et $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{O_1H_1}) = \overrightarrow{O_2H_2}$. On a

$$\overline{O_2H_2}\,\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{s}(\overrightarrow{O_1H_1}) = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\,\overrightarrow{\rho}(\overline{O_1H_1}\,\overrightarrow{u_1})) = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\,\overline{O_1H_1}\,\overrightarrow{u_2}$$

d'o $\overline{O_2H_2} = \dfrac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}}\,\overline{O_1H_1}$ et le résultat cherché.

Le rapport $\dfrac{\overline{O_1H_1}}{\overline{O_1A_1}}$ ne dépend donc que de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}})$ et on peut donc poser

$$Cos\,(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}}) = \frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{O_1A_1}}$$

et ainsi définir une application du groupe des angles dans $\mathbb{R}$. (On utilise la notation Cos pour différencier cette fonction de la fonction cosinus usuelle qui est définie sur $\mathbb{R}$.)
Pour définir de façon analogue la fonction Sinus d'un angle, on oriente le plan et on pose

$$Sin\,(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}}) = \frac{\overline{H_1A_1}}{\overline{O_1A_1}},$$

la perpendiculaire à $(O_1, \overrightarrow{u_1})$ étant orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{w_1}$ tel que la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{w_1})$ soit directe.

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un couple de vecteurs unitaires et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ une base orthonormée directe alors on a

$$Cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}, \quad Sin\,(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

et $Cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ et $Sin\,(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ forment la première colonne de la matrice $M(\rho)$ dans une base directe de la rotation ρ telle que $\rho(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$:

$$M(\rho) = \begin{pmatrix} Cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) & -Sin\,(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \\ Sin\,(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) & Cos\,(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \end{pmatrix}$$

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est appelé l'angle de la rotation ρ et l'angle d'un composé de deux rotations étant la somme des angles de chacune des rotations, la formule donnant le produit de deux matrices conduit à

$$Cos\,(\widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2) = Cos\,\widehat{\theta}_1\,Cos\,\widehat{\theta}_2 - Sin\,\widehat{\theta}_1\,Sin\,\widehat{\theta}_2$$

et à la formule analogue pour le Sinus.

La relation

$$Cos^2\,(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}) + Sin^2\,(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}) = 1$$

résulte du fait que la base $(\vec{u}\,,\vec{w})$ est orthonormée ou encore que $M(\rho)$ est une matrice orthogonale.

La relation usuelle exprimant le produit scalaire à l'aide du cosinus est aussi facile à établir. Avec les notations du début de ce paragraphe, soit B_1 un point de $(O_1, \vec{u_1})$. On a

$$\overrightarrow{O_1B_1}\,.\,\overrightarrow{O_1A_1} = \overrightarrow{O_1B_1}\,.\,\overrightarrow{O_1H_1} = \overline{O_1B_1}\,.\,\overline{O_1H_1} = \overline{O_1B_1}\,.\,\overline{O_1A_1}\,Cos\,(\widehat{\overrightarrow{O_1B_1},\overrightarrow{O_1A_1}}).$$

Les autres formules classiques de la trigonométrie où figurent des angles (Al-Kashi,...) se démontrent facilement.

Remarque. Si le couple $(\cos x, \sin x)$ ne détermine le réel x qu'à un multiple de 2π près, en revanche dans un plan orienté l'angle $(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}})$ est entièrement déterminé par $(Cos\,(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}), Sin\,(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}))$ car ce couple définie l'unique rotation ρ telle que $\rho(\vec{u}) = \vec{v}$.

Le problème difficile est maintenant de passer du Cosinus d'un angle au cosinus d'un nombre réel. En général on admet (ou on affirme) qu'à tout nombre réel $x \in [0, 2\pi[$ correspond un arc du cercle trigonométrique de longueur x. Si O est le centre du cercle, A et B les extrémités de cet arc, on pose alors $\cos x = Cos\,(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ et on prolonge la fonction cosinus à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. On fait de même pour la fonction sinus mais le point faible de cette définition est le passage d'un angle à un nombre réel de $[0, 2\pi[$. Pour la rendre rigoureuse, on peut utiliser l'isomorphisme μ déjà introduit entre le groupe des angles et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et poser

$$\cos x = Cos(\mu^{-1}(x + 2\pi\mathbb{Z})) \qquad \sin x = Sin(\mu^{-1}(x + 2\pi\mathbb{Z})).$$

Cette définition est moins compliquée qu'il ne paraît : le cosinus d'un réel x est le Cosinus de l'angle dont une mesure en radians est x. Malheureusement, la construction de l'isomorphisme μ repose sur la fonction $t \to e^{it}$ et donc sur les fonctions circulaires si l'application $t \to e^{it}$ a été introduite comme ici.

Si la méthode utilisée dans l'enseignement secondaire présente des défauts, elle permet cependant de mettre en évidence les propriétés suivantes des fonctions sinus et cosinus, plus ou moins identifiées avec les fonctions Cosinus et Sinus précédentes :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

On peut alors montrer que ces trois propriétés suffisent pour établir les formules trigonométriques usuelles et pour montrer que les fonction circulaires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles peuvent donc permettre une approche de nature axiomatique des fonctions circulaires, la méthode géométrique servant de justification intuitive aux axiomes.

Remarque. C'est l'application $t \to e^{it}$ qui permet de relier les fonctions Cos et Sin aux fonctions cos et sin. Plus généralement on peut considérer, pout tout $a > 0$, l'application $\varphi_a : t \to e^{i\frac{a}{2\pi}t}$ et l'isomorphisme μ_a entre le groupe des angles et $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ qui s'en déduit. On peut alors définir deux applications $\cos_a$ et $\sin_a$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même par

$$\cos_a\, x = Cos\,(\mu_a^{-1}(x + a\mathbb{Z})), \qquad \sin_a\, x = Sin\,(\mu_a^{-1}(x + a\mathbb{Z})).$$

Si $a = 2\pi$, on retrouve les fonctions circulaires usuelles et si par exemple $a = 360$ on obtient la fonction $\cos_{360}$ qui fait correspondre à un réel x le Cosinus de l'angle dont une mesure en degrés est x. Cette fonction figure sur les calculatrices : pour calculer $\cos_{360}(x)$ on appuie successivement sur les touches x, *DRG* (ou degré) et cos.

On vérifie facilement que $\cos_a x = \cos \frac{2\pi}{a} x$ et $\sin_a x = \sin \frac{2\pi}{a} x$ ce qui entraine que les fonctions $\cos_a$ et $\sin_a$ verifient des relations semblables aux formules trigonométriques usuelles. Une différence cependant : $\cos_a(x)' = -\frac{2\pi}{a} \sin_a(x)$ et $\sin_a(x)' = \frac{2\pi}{a} \cos_a x$.

4.2.2. *Définition à l'aide des fonctions réciproques.* Chaque fonction circulaire possède une restriction ayant une fonction réciproque qui peut être définie comme primitive d'une fonction continue. Rappelons les définitions de ces fonctions réciproques :

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ x \in]-1,1[\qquad \arccos x = \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}},\ x \in]-1,1[\qquad \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

On peut donc, soit introduire les trois fonctions circulaires à partir de leurs fonctions réciproques, soit introduire seulement l'une d'entre elles et définir les autres à l'aide de formules trigonométriques. Cette méthode demande les mêmes outils mathématiques que celle utilisée pour définir la fonction exponentielle à partir de la fonction logarithme, celle-ci étant considérée comme la primitive de $x \to \frac{1}{x}$ prenant la valeur 0 pour $x = 1$.

Par exemple, si on choisi de définir la fonction cosinus on montre d'abord que

$$\lim_{x\to -1, x>-1} \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = a, a > 0 \qquad \lim_{x\to 1, x<1} \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

Il en résulte que $x \to \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est une application strictement décroissante de $]-1,1[$ sur $]0,a[$. On pose $\cos x = \arccos^{-1}(x)$ si $x \in]0,a[$ et $\cos 0 = 1$, $\cos a = -1$. On prolonge ensuite cette fonction à $[0, 2a]$ grce à $\cos(x + a) = -\cos x$, $x \in [0,a]$. Finalement la fonction cosinus est étendue à $\mathbb{R}$ par $2a$-périodicité.

Ensuite on peut définir la fonction sinus par $\sin x = \cos(x - \frac{a}{2})$ et, pour $x \neq k\frac{a}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Il reste à montrer que $a = \pi$, 2π étant par définition la longueur du cercle de rayon 1. Pour cela on prouve la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ d'où l'on déduit que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ avec $t \in [0, 2a]$ est une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^1$ du cercle trigonométrique, injective sur $[0, 2a[$. On a donc

$$2\pi = \int_0^{2a} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2a} dt = 2a$$

et donc $a = \pi$. Le calcul de l'intégrale suppose que l'on à montré auparavant que $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$.

4.3. L'équation $e^z = a$ et les logarithmes complexes. L'une des différences entre la fonction exponentielle réelle et la fonction exponentielle complexe est la non injectivité de cette dernière. La résolution de l'équation $e^z = a$ va mettre en évidence cette propriété.

Si $a = 0$ l'équation n'a pas de solution car $|e^z| = e^{\Re(z)} \neq 0$ et si $0 \neq a = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, $\rho > 0$, alors

$$e^z = a = \rho e^{i\theta} = e^{\ln \rho + i\theta}$$

équivaut à $e^{z-(\ln\rho+i\theta)} = 1$ et donc aussi à $z - (\ln\rho + i\theta) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ d'où

$$e^z = a \Leftrightarrow z \in \ln\rho + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z}).$$

L'équation possède donc une infinité de solutions qui, dans le plan complexe, sont situées sur la droite d'équation $y = \ln|a|$.

Si on appelle logarithme de $a \in \mathbb{C}^*$, tout nombre complexe z tel que $e^z = a$, on voit donc qu'un nombre complexe possède une infinité de logarithmes. On peut néanmoins définir une fonction logarithme complexe par une méthode élémentaire de la façon suivante.

Chaque nombre complexe $a \neq 0$ peut s'écrire $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$. Si l'on pose $L(a) = \ln\rho + i\theta$ alors $L : a \to L(a)$ est une fonction bien définie sur $\mathbb{C}^*$ et $e^{L(a)} = a$. Un inconvénient de la fonction $L : a \to L(a)$ est sa discontinuité pour chaque nombre réel négatif. Pour éliminer ce défaut on la restreint à $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ et on l'appelle alors la détermination principale du logarithme que l'on note *log*. Cette fonction possède en particulier les propriétés suivantes.

- Elle est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ et $(log\, z)' = \dfrac{1}{z}$;
- Pour $x \in \mathbb{R}^{*+}$ on a $log\, x = \ln x$;
- $z = e^{log\, z}$ mais $log\, e^z = z$ seulement si $-\pi < \Im(z) < \pi$;
- La relation $log(z_1.z_2) = log\, z_1 + log\, z_2$ est seulement une congruence modulo $2\pi i$ et encore à condition que $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}^-$ (Penser à $log\, i + log\, i$.).