Examen Topologie B

le 6 Janvier 2020 de 9h00 à 13h00

Les documents, calculatrices, téléphones portables ainsi que tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte. Notamment

- *Des phrases comme "il est clair que", "on voit que", "il est évident que", ou des affirmations non justifiés ... ne sont pas accepté. Par contre on peut faire appel à des énoncés du cours qu'on doit explicitement indiquer sans ambiguïté.*
- *Si on utilise un théorème ou un résultat du cours, il faut le mentionner.*
- *Des réponses trop courtes telles que "Oui" ou "Non" sans argument ultérieur ou, plus généralement, toute réponse sans justification sera considéré comme vide. L'explication est plus importante que la réponse elle même.*

Le barème appliqué est indiqué à la fin du corrigé.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
La notation EVN signifie Espace Vectoriel Normé sur $\mathbb{R}$.
Soit $[0,1] = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$. Notons par

- $\mathcal{B} := \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées à valeur dans $\mathbb{R}$.
- $C^0 := C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- C^1 le sous-espace de C^0 formé par les fonctions dérivables sur $[0,1]$ (i.e. qui sont dérivables sur $]0,1[$, et qui sont dérivables à droite en 0 et à gauche en 1) et dont la dérivée est continue.
- Rappelons que pour toute fonction $f \in C^0$ on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Exercice 1. (Ouverts et fermés). Soit $(V, \|.\|)$ un EVN. Dans cet exercice, nous appelons "*doublette*" un sous-ensemble de V qui est l'*union d'un ouvert et d'un fermé*.
Supposons d'abord que $V = \mathbb{R}$ et posons

$$A := \{\frac{1}{n}, n \geq 1\} \qquad \text{et} \qquad B := A \cup \{0\}. \tag{1}$$

1. Montrer que B est fermé, mais que A ne l'est pas.
2. Donner en justifiant les intérieurs $Int(A)$ et $Int(B)$ de A et de B respectivement.
3. Montrer que tout segment $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$ est une doublette.

On suppose maintenant que V est un EVN général.

4. Montrer que si $E \subset V$ est un ouvert ou un fermé, alors E est une doublette.
5. Montrer qu'un ensemble $E \subset V$ est une doublette si et seulement si $E \setminus Int(E)$ est un fermé.
6. En déduire que parmi les ensembles A et B de l'équation (1), l'un est une doublette et l'autre non.

7. Donner dans $V = \mathbb{R}^2$ un exemple d'ensemble qui n'est pas une doublette et un exemple d'ensemble qui est une doublette mais n'est ni ouvert ni fermé (si cela est bien évident, on ne demande pas de justifier en détail que les ensembles utilisés sont ouverts ou fermés).
8. Montrer que l'union de deux doublettes est une doublette et en déduire que l'union finie de doublette est une doublette.
9. Démontrer que l'union arbitraire de doublette n'est pas forcement une doublette. Donner un contre exemple explicite.
10. A l'aide des ensembles A et B, montrer que l'intersection de deux doublettes n'est pas forcément une doublette (indication : on pourra chercher une doublette C telle que $B \cap C = A$).

Exercice 2. (Equivalence de normes). Soit $V = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ l'application linéaire $P \mapsto P(0)$. Posons

$$\|P\| := \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|$$

et

$$N(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) := \max_{k\geq 0} \frac{|a_k|}{k+1}$$

1. Montrer que $\|.\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que ϕ est continue par rapport à N et calculer sa norme.
3. Soit $P_n := (1 - \frac{X}{2})^n$, $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$ calculer $\|P_n\|$.
4. Est-ce que ϕ est continue pour $\|.\|$?
5. Est-ce que $\|.\|$ et N sont équivalentes ?
6. Montrer que l'ensemble $U := \{P \in \mathbb{R}[X],\ \phi(P) \neq 0\}$ est un ouvert pour N mais pas pour $\|.\|$ (Considérer $(1 - P_n)$).

Exercice 3. (Intérieur et frontière). Si E est un sous-ensemble d'un EVN, notons comme d'habitude par ∂E la frontière de E et par $Int(E)$ son intérieur.

1. Trouver deux sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}$ tels que $Int(E) \cup Int(F) \neq Int(E \cup F)$.
2. Montrer que si E est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $Int(\partial E) = \emptyset$ (Indication : montrer que ∂E ne peut pas contenir d'intervalle ouvert).
3. Montrer que si E est un fermé de $\mathbb{R}$, alors $Int(\partial E) = \emptyset$ (Indication : déduire cela par passage au complémentaire du point précédent).
4. Trouver un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ t.q. $Int(\partial E)$ n'est pas vide.

Exercice 4. (Espaces de fonctions). Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$ on pose

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| \ , \qquad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On considère deux suites de fonctions continues $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ données par

$$f_n(t) = t^n \qquad \text{et} \qquad g_n(t) := \min((2t)^n, 1) \ . \tag{2}$$

Remarque : *On sait d'après le cours que* $\|.\|_\infty$ *est une norme sur* $\mathcal{B}$ *et donc aussi sur* C^0. *On rappelle également qu'il existe des fonctions bornées non nulles avec intégrale nul. Par exemple, toute fonction qui est nulle partout sauf sur un nombre fini de points a intégrale nul.*

1. (a) Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur C^0.
   (b) Montrer que $\|.\|_1$ vérifie l'inégalité triangulaire et la compatibilité à la multiplication par scalaires sur $\mathcal{B}$, mais que ce n'est pas une norme sur $\mathcal{B}$ (Indication : utiliser la remarque).
2. Pour tout $n \geq 0$ donner rapidement l'allure du graphe de f_n et g_n et calculer la *limite ponctuelle* des f_n et des g_n.
3. Est-ce que ces suites sont convergentes dans $(C^0, \|.\|_\infty)$?
4. Pour tout n, calculer $\|f_n\|_1$.
5. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge dans $(C^0, \|.\|_1)$ et trouver sa limite (Indication : exploiter la remarque initiale et le point précédente).
6. On se propose maintenant de montrer que la suite $(g_n)_n$ ne converge pas dans $(C^0, \|.\|_1)$.
   (a) Observer (sans le démontrer) que le point (1.a) de l'exercice reste vrai si l'on remplace l'intervalle $[0,1]$ par un sous-intervalle $I \subseteq [a,b]$ quelconque et $\|.\|_1$ par $\|f\|_1^I := \displaystyle\int_I |f(t)|dt$;
   Puis montrer que pour tout $h \in \mathcal{B}$ et tout $I \subseteq [0,1]$ on a $\|h\|_1 \geq \|h\|_1^I$.
   (b) Si g est la limite ponctuelle des g_n, calculer $\|g_n - g\|_1^I$ et montrer que $\lim_n \|g_n - g\|_1^I = 0$ pour tout I ;
   (c) Supposer par qu'une limite $\widetilde{g}$ existe dans $(C^0, \|.\|_1)$ et calculer $\|g - \widetilde{g}\|_1^I$ pour $I = [1/2, 1]$ et $I = [0, r]$ pour tout $r < 1/2$ à l'aide des fonctions g_n. Puis conclure grâce au point (6.a) appliqué sur ces intervalles.
7. Est-ce que les suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sont de Cauchy dans $(C^0, \|.\|_\infty)$?
8. Montrer que $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sont des suites de Cauchy dans $(C^0, \|.\|_1)$.
9. Est-ce que $(C^0, \|.\|_1)$ est un espace de Banach ?

Exercice 5. (Compacité). Soit

$$K = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x_1 + \cdots + x_n = 1, \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

1. Démontrer que K est compact ;
2. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in K$. Démontrer que $\inf_{x \in K} f(x) > 0$.

Corrigé

Exercice 1 (Ouverts et fermés).

1. (a) La suite $(1/n)_n$ est à valeurs dans A, son limite est 0, donc 0 est un point d'adhérence pour A. Mais 0 n'appartient pas à A, donc $Ad(A) \neq A$ et A n'est pas fermé.

   (b) Si $x \notin B$, alors $x \neq 0$ et $x \neq 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Il en suit que le complémentaire de B est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$, $]1, +\infty[$, et $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ pour tout $n \geq 1$. Le complémentaire de B est donc ouvert, et par conséquence B est fermé.

2. Soit $x \in B$, et $r > 0$. Alors $I_{x,r} :=]x-r, x+r[$ n'est pas contenu dans B. En effet, si $x = 0$, alors $]x-r, 0[$ n'est pas dans B et si $x = 1/n$ alors pour $1/(n+1) < s < 1/n$ suffisamment proche de $1/n$ l'intervalle $]s, 1/n[$ est contenu dans $I_{x,r}$ et n'intersecte pas B. Comme cela est vrai pour tout $r > 0$, cela montre que aucun intervalle n'est contenu dans B. Donc $Int(B)$ est vide.

   Par ailleurs, comme $A \subseteq B$ on a $Int(A) \subseteq Int(B)$ et donc $Int(A)$ est aussi vide.

3. (a) $[a, b] = [a, b] \cup \emptyset$ c'est la réunion du fermé $[a, b]$ et de l'ouvert vide ;

   (b) $]a, b[=]a, b[\cup\emptyset$ c'est la réunion de l'ouvert $]a, b[$ et du fermé vide ;

   (c) $]a, b] =]a, b[\cup\{b\}$ c'est la réunion de l'ouvert $]a, b[$ et du fermé $\{b\}$;

   (d) $[a, b[=]a, b[\cup\{a\}$ c'est la réunion de l'ouvert $]a, b[$ et du fermé $\{a\}$.

4. Tout ouvert (resp. fermé) est la réunion de lui même avec le vide qui est un fermé (resp. ouvert) ;

5. Supposons que $E = O \cup F$ soit une doublette, avec O ouvert et F fermé. Alors O est un ouvert dans E, et par définition de $Int(E)$ on a $O \subseteq Int(E)$. Donc

   $$E - Int(E) = (F \cup O) - Int(E) = F - Int(E) = F \cap (V - Int(E)) .$$

   Comme F et $V - Int(E)$ sont fermés, $E - Int(E)$ est fermé.

   Réciproquement supposons que $E - Int(E)$ est fermé. Alors $E = Int(E) \cup (E - Int(E))$ est la réunion de l'ouvert $Int(E)$ et du fermé $E - Int(E)$.

6. L'ensemble B est fermé, donc c'est une doublette par le point (4) déjà démontré. Par contre A n'est pas une doublette. En effet si A est une doublette, alors par le point (5) $A - Int(A)$ est fermé, mais $Int(A)$ est vide par le point (2), et donc $A - Int(A) = A$ qui n'est ni fermé par le point (1). Cela étant absurde, A n'est pas une doublette.

7. (a) On peut prendre l'ensemble $E := \{0\} \times A \subseteq \mathbb{R}^2$. En effet, son intérieur est vide car toute boule ouverte centrée dans $(0, 1/n)$ contient un ensemble du type $\{0\}\times](1/n)-r, (1/n)+r[$ et donc (par la preuve faite au point (2)) ça contient des points qui ne sont pas dans $\{0\} \times A$. Par ailleurs, il n'est pas fermé car $(0, 0)$ est dans son adhérence, mais pas dans E. Donc $E - Int(E) = E$ n'est pas fermé, et E n'est pas une doublette.

   Un autre exemple possible est $E = \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. On a $Int(\mathbb{Q}^2) = \emptyset$ (car toute boule centrée en un point $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ a des points non rationnels) et $\mathbb{Q}^2$ n'est pas fermé (car son complémentaire a également intérieur vide). Comme avant $\mathbb{Q}^2 - Int(\mathbb{Q}^2) = \mathbb{Q}^2$ n'est pas fermé, et donc $\mathbb{Q}^2$ n'est pas une doublette.

(b) Soit $B(0,1) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\| < 1\}$ la boule unité ouverte et soit $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ un point de norme 1. L'ensemble $E = B(0,1) \cup \{(x_1,y_1)\}$ est l'union de l'ouvert $B(0,1)$ et du fermé $\{(x_1,y_1)\}$ et est donc une doublette. Ce n'est pas un ouvert car toute boule ouverte centrée en (x_1,y_1) contient des points qui ne sont pas dans E (ce qui contredit la caractérisation des ouverts vue en cours : tout point de l'ouvert est contenu dans une boule ouverte contenue dans l'ouvert). Ce n'est pas non plus un fermé car le bord de la boule $B(0,1)$ contient une infinité de points (dont (x_1,y_1)). En effet, on a vu en cours que la fermeture de la boule ouverte est la boule fermée. On a donc $Ad(E) \neq E$ et E n'est alors pas fermé.

8. Si O_1 et O_2 sont des ouverts et F_1, F_2 sont des fermés, alors la réunion des doublettes $E_1 = O_1 \cup F_1$ et $E_2 = O_2 \cup F_2$ est l'ensemble $E_1 \cup E_2 = (O_1 \cup O_2) \cup (F_1 \cup F_2)$. Comme la réunion de deux ouverts est ouverte et la réunion de deux fermés est fermée $E_1 \cup E_2$ est une doublette.

   Montrons maintenant que l'union d'un nombre fini de doublette est une doublette. On peut procéder par récurrence. On vient de démontrer que l'affirmation est vraie pour 2 doublettes. Supposons d'avoir démontré que toute réunion de $n-1$ doublettes est une doublette, alors si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des doublettes, par récurrence $(E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$ est une doublette et donc la réunion $E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1} \cup E_n$ est aussi réunion des 2 doublettes $(E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$ et E_n et c'est alors une doublette par le point précédent.

9. Si l'on passe de deux à une infinité de doublettes, on a le problème que la réunion de fermés n'est pas forcement un fermé. On peut trouver plusieurs démonstrations et contre-exemples du fait que la réunion arbitraire de doublettes n'est pas forcement une doublette. La plus rapide consiste probablement à remarquer que dans tout EVN les points sont des doublettes (car fermés) et que tout sous-ensemble de l'EVN est réunion de ses points. Par conséquence *tout sous-ensemble de l'EVN est réunion de doublettes*. On a par ailleurs montré qu'il existe des sous-ensembles qui ne sont pas des doublettes, donc cela prouve bien que la réunion arbitraire de doublettes n'est pas toujours une doublette.

   Des contre-exemples explicites sont les ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Ou aussi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ construits au point (7).

10. On a $A = B \cap]0,\infty[$. On a vu que B est fermé, donc une doublette et on sait que $]0,+\infty[$ est ouvert, donc une doublette. Par contre, A n'est pas une doublette.

Exercice 2 (Equivalences de normes).

1. (a) Démontrons que $\|.\|$ est une norme. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et soit $r \in \mathbb{R}$. Alors

   (i) $\|P+Q\| = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)+Q(t)| \leq \sup_{t\in[1,2]} |P(t)| + |Q(t)| \leq \sup_{t\in[1,2]} |P(t)| + \sup_{t\in[1,2]} |Q(t)| = \|P\| + \|Q\|$;

   (ii) $\|rP\| = \sup_{t\in[1,2]} |rP(t)| = \sup_{t\in[1,2]} |r||P(t)| = |r| \sup_{t\in[1,2]} |P(t)| = |r|\|P\|$;

   (iii) Si $\|P\| = 0$ cela signifie que pour tout $t \in [1,2]$ on a $P(t) = 0$. Le polynôme P a alors une infinité de zéros dans $\mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $P = 0$.

   Il est intéressant de le voir d'une autre manière. On sait que $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ est une norme sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Or, l'application $i : \mathbb{R}[X] \to C^0([1,2],\mathbb{R})$ qui associe à tout polynôme Q la fonction sur $[1,2]$ définie par Q est une application linéaire injective entre ces deux espaces vectoriels. Donc $\|.\|_\infty \circ i$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et on a $\|.\| = \|.\|_\infty \circ i$.

(b) Démontrons que N est une norme. Soient $P = \sum_{i\geq 0} p_i x^i$ et $Q = \sum_{j\geq 0} q_j x^j$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et soit $r \in \mathbb{R}$. Alors

   (i) $N(P+Q) = \max_{k\geq 0} \frac{|p_k + q_k|}{k+1} \leq \max_{k\geq 0} \frac{|p_k| + |q_k|}{k+1} \leq \max_{k\geq 0} \frac{|p_k|}{k+1} + \max_{k\geq 0} \frac{|q_k|}{k+1} = N(P) + N(Q)$;

   (ii) $N(rP) = \max_{k\geq 0} \frac{|rp_k|}{k+1} = \max_{k\geq 0} \frac{|r||p_k|}{k+1} = |r| \max_{k\geq 0} \frac{|p_k|}{k+1} = |r|N(P)$;

   (iii) Si $N(P) = 0$, alors $\max_{k\geq 0} \frac{|p_k|}{k+1} = 0$ comme pour tout k la quantité $|p_k|/(k+1)$ est positive ou nulle cela signifie que pour tout k on a $|p_k|/(k+1) = 0$. Donc pour tout k on a $|p_k| = 0$ ce qui entraine $P = 0$.

2. $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est une application linéaire. Pour montrer qu'elle est continue (par rapport à la topologie définie par N) il suffit de trouver une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$|\phi(P)| \leq C \cdot N(P).$$

   Or, si $P = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ on a $\phi(P) = P(0) = a_0$. Donc $|\phi(P)| = |a_0|$ et on a

$$|\phi(P)| = |a_0| \leq \max_{k\geq 0} \frac{|a_k|}{k+1} = N(P)\ .$$

   La constante cherchée est alors $C = 1$. L'application ϕ est bien continue.

3. Pour tout $n \geq 0$ soit $P_n = (1 - \frac{X}{2})^n$. On a $\|P_n\| = \sup_{t\in[1,2]} |(1 - \frac{t}{2})^n|$.

   Si $n = 0$, alors $P_n = 1$ et $\|P_n\| = 1$.

   Si $n \geq 1$, la dérivée $P_n'(t) = n(1 - \frac{t}{2})^{n-1} \cdot (-\frac{1}{2})$ n'a au plus qu'un seul zéro possible en $t = 2$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires elle est de même signe sur l'intervalle $[1, 2]$. Par conséquence P_n est soit croissant, soit décroissant sur $[1, 2]$ et le maximum de $P_n(t)$ est alors atteint en $t = 1$ ou en $t = 2$. Donc

$$\|P_n\| = \sup_{t\in[1,2]} |P_n(t)| = \max(|P_n(1)|, |P_n(2)|) = \max(\frac{1}{2^n}, 0) = \frac{1}{2^n}$$

4. Si par l'absurde ϕ était continue pour $\|.\|$, alors par le critère séquentiel de continuité toute suite convergente vers 0 dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$ a pour image dans $\mathbb{R}$ une suite qui tend vers 0.

   Dans notre cas, la suite $(P_n)_n$ tends vers 0 car $\|P_n\| = \frac{1}{2^n} \to 0$, mais $\phi(P_n) = 1$ pour tout n. Donc la suite $(\phi(P_n))_n$ ne tends pas vers zéro et ϕ n'est pas continue pour $\|.\|$.

5. Si N et ϕ étaient équivalentes, alors elles donneraient lieu à la même topologie sur $\mathbb{R}[x]$ et comme la continuité d'une fonction s'exprime à l'aide des ouverts, la continuité est une notion qui ne dépend que de la topologie. Par conséquence toute fonction $\psi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ qui est continue pour N serait continue aussi pour $\|.\|$. Mais on vient de voir que la fonction $\psi = \phi$ est continue pour N, mais pas pour $\|.\|$. Cela signifie que N et $\|.\|$ ne sont pas équivalentes.

6. L'ouvert U est l'image inverse par la fonction ϕ de l'ouvert $\mathbb{R} - \{0\}$. Comme ϕ est continue pour la topologie définie par N, U est ouvert dans $(\mathbb{R}[X], N)$.

   Par contre U n'est pas ouvert pour la topologie définie par $\|.\|$. Pour le voir, montrons que son complémentaire $C := \mathbb{R}[X] - U$ n'est pas fermé. En effet, pour tout n on a $\phi(1 - P_n) = 0$ donc $1 - P_n \in C$. Par ailleurs, on a montré que $\|P_n\| \to 0$, donc $\lim_n P_n = 0$ dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|)$ et par conséquence $\lim_n (1 - P_n) = 1$. Cela montre que 1 est un point adhérent à C, mais $\phi(1) = 1$ et donc $1 \notin C$. Cela montre que C n'est pas fermé.

Exercice 3 (Intérieur et frontière).

1. Soient $E = [0, 1]$ et $F = [1, 2]$. Alors $E \cup F = [0, 2]$, $Int(E) =]0, 1[$, $Int(F) =]1, 2[$, et $Int(E \cup F) =]0, 2[\neq Int(E) \cup Int(F)$.
2. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un sous ensemble et $E^c = \mathbb{R} - E$ son complémentaire. Par la formule

$$\partial E \ = \ Ad(E) \cap Ad(E^c) \ , \tag{3}$$

   vue en cours, un point x est dans l'adhérence de E si, et seulement si, pour tout intervalle ouvert I contenant x les ensembles $I \cap E$ et $I \cap (\mathbb{R} - E)$ sont non vides.

   Si E est un ouvert, alors $Int(E) = E$ et il suit de la formule $\partial E = Ad(E) - Int(E)$ vue en cours que $(\partial E) \cap E = \emptyset$. Si par l'absurde $Int(\partial E)$ est non vide, comme tout ouvert est réunion d'intervalles ouverts, alors on peut trouver un intervalle ouvert I entièrement contenu dans ∂E. Mais comme ∂E ne rencontre pas E, alors l'intersection $I \cap E$ est vide. Par la remarque faite au début, cela contredit le fait que les points $x \in I$ sont dans la frontière de E.
3. Si E est un fermé, la formule (3) montre que $\partial E = \partial(\mathbb{R} - E)$. Comme $\partial(\mathbb{R} - E)$ est un ouvert, on peut appliquer le cas précédent et on a $Int(\partial(\mathbb{R} - E)) = \emptyset$.
4. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels a pour adhérence $\mathbb{R}$, car tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels. Donc $Int(\partial\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est un ouvert. Comme $\mathbb{R}$ est un ouvert, on a $Int(\partial\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Exercice 4 (Espaces de fonctions).

1. Montrons d'abord les deux propriétés suivantes :
   - Pour tout $f, g \in \mathcal{B}$ on a

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(t)+g(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|+|g(t)|dt = \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

   - pour tout $f \in \mathcal{B}$ et tout $r \in \mathbb{R}$ on a

$$\|r \cdot f\|_1 = \int_0^1 |r \cdot f(t)|dt = \int_0^1 |r| \cdot |f(t)|dt = |r| \int_0^1 |f(t)|dt = |r| \cdot \|f\|_1$$

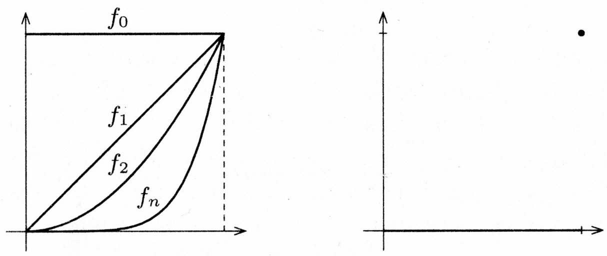
   Pour que $\|.\|_1$ soit une norme sur C^0 (ou $\mathcal{B}$) il faut voir si toute fonction non nulle de C^0 (ou $\mathcal{B}$) a norme non nulle. Il se passe que $\|.\|_1$ est une norme sur C^0, mais pas sur $\mathcal{B}$. Voici la preuve

   (a) Si $\|f\|_1 = 0$, alors $\int_0^1 |f(t)|dt = 0$. Si $f \neq 0$, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $|f(t_0)| > 0$. Comme f est continue, il existe un intervalle $I \subseteq [0, 1]$, qui n'est pas réduit à un point, tel que $t_0 \in I$ et tel que pour tout $x \in I$ on a $|f(x)| > |f(t_0)|/2$. Donc $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \geq \int_I |f(t)|dt \geq \int_I |f(t_0)|/2dt = |f(t_0)|/2 \cdot \int_I dt = A \cdot |f(t_0)|/2 > 0$, où A est la taille de I (i.e. si $I = [a, b]$ alors $A = b - a$). On a donc montré que si $f \neq 0$, alors $\|f\|_1 \neq 0$.

(b) Par contré, il existe des fonctions bornés (pas continues) dont l'intégrale est nul. Par exemple la fonction f ci plus bas. Donc $\|.\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{B}$.

2. (a) $f_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, donc son graphe est constant. Pour $n \geq 1$ la fonction $f_n(t)$ a pour graphe

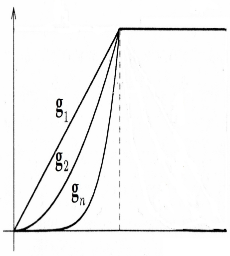
$$\lim_{j\to\infty} f_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$



Pour tout n on a $f_n(1) = 1$ et pour tout $t \in [0,1[$ on a $\lim_n t^n = 0$, donc la limite ponctuelle de la suite $f_n(t)$ est la fonction discontinue

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$$

(b) Pour tout n, la fonction $g_n(t)$ est le minimum de deux fonctions continues et elle est donc continue. On a



Pour tout n et tout $t \in [1/2,1]$ on a $g_n(t) = 1$ et pour tout $t \in [0,1/2[$ on a $\lim_n g_n(t) = \lim_n (2t)^n = 0$. Donc la limite ponctuelle de la suite $g_n(t)$ est la fonction discontinue

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0,1/2[\\ 1 & \text{si} \quad t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

3. D'après le cours, si une suite $(h_n)_n$ dans C^0 converge par rapport à $\|.\|_\infty$ vers une fonction $h \in C^0$, alors elle converge ponctuellement vers h. C'est à dire que pour tout $t \in [0,1]$, la suite de nombres réels $(h_n(t))_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel $h(t)$. Cela entraine par le point précédent que les suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ ne convergent pas dans $(C^0, \|.\|_\infty)$ car les fonctions f et g ne sont pas continues.

4. On a
$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |t^n| dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

5. La suite $(f_n)_n$ converge vers 0 (i.e vers la fonction nulle) dans $(C^0, \|.\|_1)$. En effet, on a vu dans le point précédent que $\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 \to 0$.

6. La suite g_n n'est pas convergente par rapport à la norme $\|.\|_1$. Pour le voir, suivons les étapes indiqués dans l'énoncé.
   (a) Pour tout sous-intervalle fermé $I \subseteq [0,1]$ et toute fonction $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ notons
   $$\|f\|_1^I = \int_I |f(t)|dt.$$
   Pour tout $I \subseteq [0,1]$ le point (1.) de l'exercice reste vrai : $\|.\|_1^I$ est une norme sur $C^0(I,\mathbb{R})$.
   Ensuite, pour toute fonction $h \in \mathcal{B}$ on a l'inégalité (vue en L2)
   $$\|h\|_1 = \int_0^1 |h(t)|dt \geq \int_I |h(t)|dt = \|h\|_1^I.$$
   (b) On a $\lim_n \|g_n - g\|_1 = 0$, en effet
   $$\|g_n - g\|_1 = \int_0^1 |g_n(t) - g(t)|dt = \int_0^{1/2} (2t)^n dt = 2^n[\frac{t^{n+1}}{n+1}]_0^{1/2} = \frac{1}{2(n+1)}.$$
   Cela entraine que pour tout $I \subseteq [0,1]$ on a $\|g_n - g\|_1^I \to 0$ car $\|g_n - g\|_1^I \leq \|g_n - g\|_1 = 1/2(n+1)$.
   (c) Supposons maintenant qu'il existe une limite $\widetilde{g}(t) = \lim_n g_n$ dans C^0 par rapport à la norme $\|.\|_1$. Cela signifie que $\|\widetilde{g} - g_n\|_1 \to 0$. Par conséquence on doit avoir aussi $\|\widetilde{g} - g_n\|_1^I \to 0$ pour tout $I \subseteq [0,1]$, car $\|\widetilde{g} - g_n\|_1 \geq \|\widetilde{g} - g_n\|_1^I$.
   Regardons maintenant le sous-intervalle $J = [1/2, 1]$. La fonction g est constante (donc continue) sur J et donc la fonction $\widetilde{g} - g$ appartient à l'espace $C^0(J,\mathbb{R})$. Comme pour tout n on a
   $$\|\widetilde{g} - g\|_1^J = \|\widetilde{g} - g_n + g_n - g\|_1^J \leq \|\widetilde{g} - g_n\|_1^J + \|g_n - g\|_1^J$$
   et comme on a observé que $\|g_n - g\|_1^J$ et $\|g_n - \widetilde{g}\|_1^J$ tendent vers 0 pour $n \to \infty$, il en suit que
   $$\|\widetilde{g} - g\|_1^J = 0.$$
   Comme $\|.\|_1^J$ est une norme sur $C^0(J,\mathbb{R})$ il en suit que $g = \widetilde{g}$ sur J.
   On peut répéter le même raisonnement sur l'intervalle $J_r = [0, r]$, pour tout $r < 1/2$ et il en suit que $g = \widetilde{g}$ sur J_r pour tout $r < 1/2$.
   Cela montre que $g(t) = \widetilde{g}(t)$ pour tout $t \in [0,1]$ (car soit $t \in J$ soit $t \in J_r$ pour $r < 1/2$ convenablement proche de 1/2).
   On a donc montré que $g = \widetilde{g}$, mais cela est absurde car $\widetilde{g}$ est continue sur $[0,1]$ alors que g est discontinue.
7. On a vu en cours que C^0 muni de la norme $\|.\|_\infty$ est de Banach. Par conséquence les suites de Cauchy convergent dans C^0. On en déduit que les suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ ne peuvent pas être de Cauchy car elle ne sont pas convergentes.
8. (a) On a vu que $(f_n)_n$ est convergente dans $(C^0, \|.\|_1)$, elle est donc de Cauchy par rapport à $\|.\|_1$ (les suites convergentes sont de Cauchy dans tout EVN).
   (b) La suite $(g_n)_n$ par contre ne converge pas par rapport à $\|.\|_1$, mais elle est de Cauchy. En effet, pour tout $n \leq m$ elle vérifie
   $$\|g_n - g_m\|_1 = \int_0^1 |g_n(t) - g_m(t)|dt = \int_0^{1/2} (2t)^n - (2t)^m dt \leq \int_0^{1/2} (2t)^n dt = \frac{1}{2(n+1)}$$

Donc, si $\varepsilon > 0$, on peut trouver N t.q. $\dfrac{1}{2(N+1)} < \varepsilon$ et pour tout $m \geq n \geq N$ on a $\|g_n - g_m\|_1 \leq \dfrac{1}{2(n+1)} \leq \dfrac{1}{2(N+1)} \leq \varepsilon$. La suite est donc de Cauchy.

9. Rappelons qu'un espace de Banach est un EVN $(V, \|.\|)$ tel que toute suite de Cauchy dans $(V, \|.\|)$ converge dans $(V, \|.\|)$.

   Dans le point (7.b) on a montré que $(g_n)_n$ est une suite de Cauchy et dans le point (5) on a montré qu'elle ne converge pas dans C^0. L'EVN $(C^0, \|.\|_1)$ n'est donc pas un espace de Banach.

Exercice 5 (Compacité).

1. (a) Montrons que l'ensemble K est fermé et borné par rapport à la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty$ (On peut utiliser n'importe quelle norme car elles sont toutes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ et d'après le cours les ensembles fermé et ceux borné sont les mêmes pour n'importe quelle norme).

   i. *K est fermé :* La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ est continue. L'image inverse d'un fermé est donc fermée. Donc $F := f^{-1}(1)$ est un fermé. De même les projections $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ sont continues et $G_i := \pi_i^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, car c'est l'image inverse du fermé $[0, +\infty[$. On a

   $$K = F \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n \ .$$

   Donc K est intersection finie de fermés et c'est alors un fermé.

   ii. *K est borné :* Comme la somme des x_i est 1 et qu'ils sont tous positifs, on a $|x_i| \leq 1$ pour tout i. Cela entraine $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_i |x_i| \leq 1$.

   Par le théorème de Bolzano-Weierstrass K est compact car il est fermé et borné.

   (b) Par le théorème vu en cours, l'image d'un compact par une fonction continue est un compact. En particulier toute fonction continue sur K à valeurs réels a une image fermée e bornée qui a donc un minimum et un maximum. Soit $x \in K$ le minimum de f. Comme $x \in K$ on a $f(x) > 0$ par hypothèse sur f. Donc pour tout $y \in K$, on a $f(y) \geq f(x) > 0$.