WIKIPÉDIA
L'encyclopédie libre

Développement limité

En physique et en mathématiques, un **développement limité** (noté **DL**) d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme :

- d'une fonction polynomiale, et
- d'un reste négligeable au voisinage du point considéré.

En physique, il est fréquent de *confondre* la fonction avec son développement limité, à condition que l'erreur (c'est-à-dire le reste) ainsi faite soit inférieure à l'erreur autorisée. Si l'on se contente d'un développement d'ordre un, on parle d'**approximation linéaire** ou d'approximation affine.

En mathématiques, les développements limités permettent de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes.

Sommaire

Définitions

Soit f une fonction à valeurs réelles[1] définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité d'**ordre** $\boldsymbol{n}$[2] (abrégé par $\mathbf{DL}_n$) en x_0, s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que la fonction $R : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + R(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i + R(x)$$

vérifie : $R(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, et ce « plus rapidement » que le dernier terme de la somme, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Les fonctions R vérifiant ceci sont notées $o((x - x_0)^n)$ (voir l'article « Comparaison asymptotique », et plus précisément la famille des notations de Landau). On écrit donc :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n).$$

Il est fréquent d'écrire un développement limité en posant $x = x_0 + h$:

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + o(h^n).$$

Conséquences immédiates

- Si f admet un DL_0 en x_0, alors $a_0 = f(x_0)$.
- Si f admet un DL_n en x_0, alors elle admet un DL_k en x_0 pour tout entier $k < n$.
- Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un DL_n en x_0 est l'existence d'un polynôme P tel que $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$. S'il existe un tel polynôme P, alors il en existe une infinité d'autres, mais **un seul** d'entre eux est de degré inférieur ou égal à n : le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - x_0)^{n+1}$[3]. On l'appelle la **partie régulière**, ou **partie principale**, du DL_n de f en x_0. On identifie parfois, par abus de langage[2], le DL_n avec sa partie régulière.

Opérations sur les développements limités

Somme[4]

Si f et g admettent deux DL_n en x_0, alors $f + g$ admet un DL_n en x_0, dont la partie régulière s'obtient en ajoutant les deux parties régulières des DL_n de f et g.

Multiplication par un scalaire

Si f admet un DL_n en x_0, alors λf admet un DL_n en x_0, dont la partie régulière s'obtient en multipliant la partie régulière du DL_n de f par λ.

Produit[4]

Si f et g admettent deux DL_n en x_0, de parties régulières respectives P et Q, alors fg et PQ admettent un DL_n en x_0, de même partie régulière.

Si $x_0 = 0$, cette partie régulière est le reste de la division euclidienne de PQ par X^{n+1}.

Inverse

Si $u(x_0) = 0$ et si u admet un DL_n en x_0, alors $\frac{1}{1-u}$ admet un DL_n. La partie régulière de ce développement limité est celle du DL_n de $\sum_{k=0}^{n} u^k$ en x_0.

Quotient

On peut combiner le produit et l'inverse, ou faire une division suivant les puissances croissantes de la partie régulière du numérateur par celle du dénominateur.

Composition[5]

Si u admet un DL_n en x_0 de partie régulière P et si v admet un DL_n en $u(x_0)$ de partie régulière Q, alors $v \circ u$ et $Q \circ P$ possèdent un DL_n en x_0, de même partie régulière.

« Intégration »[6]

Si f admet un DL_n en x_0, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$, alors toute *primitive* F de f admet un DL_{n+1} en x_0 qui est

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(x - x_0)^{i+1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

Dérivation

Il n'existe pas de théorème général sur l'existence d'un DL_n en x_0 pour la dérivée d'une fonction admettant un DL_{n+1} en x_0.

Par exemple, en 0, la fonction $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ – prolongée par $0 \mapsto 0$ – admet un DL_2 (il s'agit de $0 + o(x^2)$) mais sa dérivée n'admet pas de DL_1.

Par contre, comme déjà dit, si F' admet un DL_n en x_0, alors la partie régulière de ce DL est la dérivée de la partie régulière du DL_{n+1} de F en x_0.

Développement limité et fonctions dérivables

Le théorème de Taylor-Young assure qu'une fonction f dérivable n fois au point x_0 (avec $ne \geq 1$) admet un DL_n en ce point :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

soit en écriture abrégée

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n).$$

On le démontre[7] par récurrence sur n, grâce au théorème ci-dessus d'« intégration » terme à terme d'un DL.

L'existence d'un DL_0 en x_0 équivaut à la continuité en x_0, et l'existence d'un DL_1 en x_0 équivaut à la dérivabilité en x_0. En revanche, pour $n \geq 2$, l'existence d'un DL_n en x_0 n'implique pas que la fonction soit n fois dérivable en x_0 (par exemple $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ — prolongée par continuité en 0 — admet, en 0, un DL_2 mais pas de dérivée seconde).

Quelques utilisations

Le développement d'ordre 0 en x_0 revient à écrire que f est continue en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + o((x - x_0)^0) = f(x_0) + o(1)$$

Le développement limité d'ordre 1 en x_0 revient à approcher une courbe par sa tangente en x_0 ; on parle aussi d'**approximation affine** :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Son existence équivaut à la dérivabilité de la fonction en x_0.

Le développement limité d'ordre 2 en x_0 revient à approcher une courbe par une parabole, ou loi quadratique, en x_0. Il permet de préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de x_0, pourvu que le coefficient du terme de degré 2 soit non nul : le signe de ce coefficient donne en effet cette position (voir également l'article fonction convexe).

Le changement de variable $h = \frac{1}{x}$ permet, à l'aide d'un DL_0 en 0, de chercher une limite à l'infini, et, à partir d'un DL_1 en 0, de déterminer l'équation d'une asymptote (comme pour la tangente, le DL_2 permet de préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote).

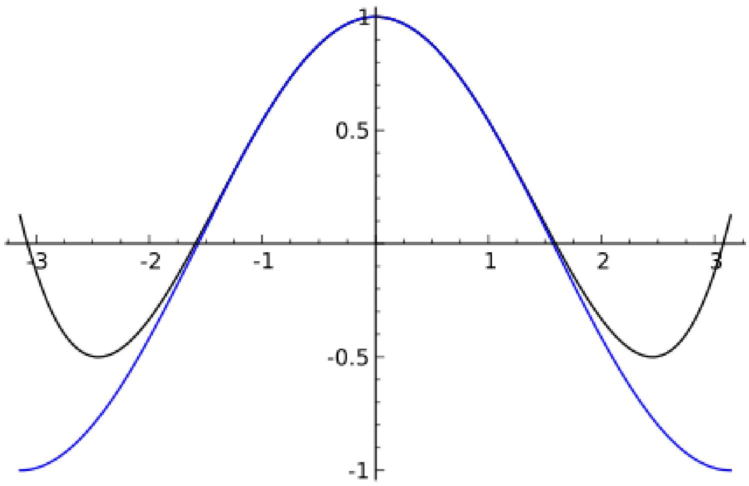
Quelques exemples

Les fonctions suivantes possèdent des DL_n en 0 pour tout entier n.

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$ (une conséquence en est la somme de la série géométrique).
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^m)$ par intégration de la formule précédente pour $n = m - 1$, changement de x en $-x$ et changement d'indice $k = i + 1$
- $e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i + o(x^n)$ (en utilisant la formule de Taylor)
- $\sin x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2n+2})$ à l'ordre $2n + 2$. La partie principale du DL à l'ordre $2n + 1$ est la même car le terme en x^{2n+2} est nul (comme tous les termes d'exposant pair) et $o(x^{2n+2}) = o(x^{2n+1})$.

- $\cos x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} + o(x^{2n+1})$ à l'ordre $2n + 1$. La partie principale du DL à l'ordre $2n$ est la même, car le terme en x^{2n+1} est nul (comme tous les termes d'exposant impair) et $o(x^{2n+1}) = o(x^{2n})$.
- $(1 + x)^a$ $= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (a - j) \right) x^i + o(x^n)$.

Ces exemples sont en outre développables en séries entières.



Fonction cosinus (courbe bleue) et son développement limité d'ordre 4 en 0 (courbe noire).

Formulaire

Plusieurs fonctions usuelles admettent un développement limité en 0, qui peuvent être utilisés pour développer des fonctions spéciales :

- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$, où les B_n sont les nombres de Bernoulli.
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{B_{2n}4^n(4^n-1)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2})$

- arctan$x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- arsinh $x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \cdot (2n+1)} + o(x^{2n+2})$
- artanh $x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

Approximations affines : développements limités d'ordre 1

On utilise fréquemment des développements limités d'ordre 1 (encore appelés « approximations affines », ou « approximations affines tangentes »), qui permettent de faciliter les calculs, lorsqu'on n'exige pas une trop grande précision ; ils sont donnés, au point x_0, par :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$$

(on retrouve l'équation de la tangente au graphe de f).

En particulier, on a, au point 0 :

- $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$ et donc
  - $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ et
  - $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$;
- $\ln(1+x) = x + o(x)$;
- $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$.

Développements usuels en 0 de fonctions trigonométriques

- À l'ordre 2 :
  - $\sin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + o(x^2)$,
  - $\tan x = x + o(x^2)$, $\arctan x = x + o(x^2)$,
    ces formules étant souvent connues sous le nom d'approximations des petits angles, et
- à l'ordre 3 :
  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Notes et références

1. La notion de développement limité peut se généraliser au cas où la fonction est à valeurs complexes ou vectorielles, mais ce cas n'est pas abordé dans cet article ; pour d'autres généralisations, voir l'article développement asymptotique.
2. Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, *Cours de mathématiques*, t. 2 : *Analyse*, Bordas, 1977, 4e éd., p. 148, définition IV.7.2 ; le polynôme lui-même (qui est unique s'il existe) est appelé par eux *développé limité* de f, et noté $\mathrm{DL}_n(f)$ ou, si la précision est nécessaire, $\mathrm{DL}_n(f, x_0)$.
3. Pour une démonstration, voir par exemple le § « Définition » du chapitre « Développements limités » sur Wikiversité.
4. Pour une démonstration, voir par exemple le § « Somme et produit » du chapitre « Développements limités » sur Wikiversité.
5. Un exemple est présenté dans le § « Composition » du chapitre « Développements limités » sur Wikiversité.
6. C'est une application de la règle de L'Hôpital. Pour une démonstration, voir par exemple le § « Dérivation et intégration terme à terme » du chapitre « Développements limités » sur Wikiversité.

7. Voir par exemple le § « Formules de Taylor » du chapitre « Développements limités » sur Wikiversité.

Articles connexes

- Série de Taylor
- Interpolation polynomiale
- Développement asymptotique
