Proposition Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN, $K \subseteq V$ un compact ($=$ seq compact)
Alors K est automatiquement complet

Preuve Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans K, on doit montrer que $\lim_m x_m$ existe et que $\lim_m x_m \in K$.
K est seq compact, alors il existe une sous-suite $(x_{m_k})_k$ convergeant vers un élément $x \in K$

exercice → Une suite de Cauchy qui a une sous suite convergente vers la même limite (exercice).
Ainsi $\lim_m x_m = x \in K$ et K est donc complet □

Un complet n'est pas forcément compact (exemple $\mathbb{K}^n$)

Exemples d'espaces de Banach

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné (compact).
On note $\mathcal{B} = \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ f en particulier, f est bornée (!) f n'est pas forcément continue.
On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée donc $C^0 = \underbrace{C^0([a,b],\mathbb{R})}_{\text{Fonctions continues}} \subset \mathcal{B}$.

Proposition 1 $\mathcal{B}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach

Preuve Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ de fonctions bornées, on doit montrer qu'il existe $f \in \mathcal{B}$ telle que $f_n \to f$
Par déf, $\forall \varepsilon > 0\ \exists m_\varepsilon$ tq $\forall n \geq m \geq m_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$
en particulier $\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ et $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de nombres réels : $\lim_m f_m(x)$ existe. On note $f(x)$ sa limite.

Posons $f(x) := f_x$, $\forall x \in [a,b]$

On a $\forall x \in [a,b]$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$ (limite ponctuelle)

Il faut mq $f \in B$ et que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

f bornée par hypothèse $f_n \in B$ $\forall n$ si $n \geq n_\varepsilon$

$\to \|f_n - f_{n_\varepsilon}\|_\infty < \varepsilon$ car c'est de Cauchy

$\to \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_\infty = M$

$\to \forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq M \to \lim_n f_n(x) \leq M$

donc $\|f\|_\infty \leq M$

Montrons que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ on a $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$

Comme $m \geq n \geq n_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ (Cauchy)

$\to \forall x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x$ (le même ε, $\forall x$)

~~$\to \forall x \lim_m f_m(x) = f(x)$ vérifié~~

Si l'on fixe n, et l'on fait tendre m vers $+\infty$, on voit que ceci donne $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ même $n \geq n_\varepsilon$ et même ε, $\forall x$

$\to \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ □

Proposition 2 $C^0 \subset B$ est fermé (donc complet). Donc C^0 muni de $\|\cdot\|_\infty$ est de Banach.

Preuve Il suffit de mq si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues qui est convergente vers B, la limite est continue par rapport à $\|\cdot\|_\infty$

On sait que $\forall n\ \exists \delta_n > 0$ tel que $|y-x| < \delta_n \Rightarrow |f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Nous savons de plus que $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

Si $|x-y| < \delta_{n_0}$, on trouve

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{continuité}} + \|f_{n_0} - f\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$\rightarrow f$ est continue. $\square$