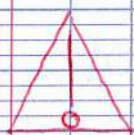


Proposition Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN, $K \subset V$ un compact (= seq compact)
Alors K est automatiquement complet

Preuve Soit $(x_m)_m$ une suite de Cauchy dans K , on doit montrer que $\lim_m x_m$ existe et que $\lim_m x_m \in K$.
 K est seq compact, alors il existe une sous-suite $(x_{m_k})_k$ convergente vers un élément $x \in K$

exercice \rightarrow Une suite de Cauchy qui a une sous suite convergente vers la même limite (exercice).

Ainsi $\lim_m x_m = x \in K$ et K est donc complet \square



Un compact m est pas forcément compact (exemple: \mathbb{R}^m)

Exemples d'espaces de Banach

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné (compact).
On note $B = B([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ bornée}\}$
 B est borné (!) B n'est pas forcément continue.
On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée
donc $C^0 = \{f \in B \mid f \text{ continue}\} \subset B$.

Fonctions continues

Proposition 1 B muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach

Preuve Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ de fonctions bornées, on doit montrer qu'il existe $f \in B$ tel que $f_n \rightarrow f$

Pour cela, $\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, m \geq m$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$
en particulier $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ et $(f_n(x))_n$
est une suite de Cauchy de nombres réels: $\lim_m f_m(x)$
existe. On note $f(x)$ sa limite.

Posons $f(x) := f_0, \forall x \in [a, b]$

On a $\forall x \in [a, b], \lim_m f_m(x) = f(x)$ (limite ponctuelle)

Il faut montrer $(f \in \mathcal{B})$ et que $(\|f_m - f\|_{\infty}) \rightarrow 0$

Théorème Par hypothèse $f_m \in \mathcal{B} \forall m$ si $m \geq m_\epsilon$

$$\rightarrow \|f_m - f_{m_\epsilon}\|_{\infty} < \epsilon \text{ car c'est la courbe}$$

$$\rightarrow \|f_m\|_{\infty} < \epsilon + \|f_{m_\epsilon}\|_{\infty} = M$$

$$\rightarrow \forall x \in \mathcal{B} [a, b], |f_m(x)| \leq M \Rightarrow \lim_m f_m(x) < M$$

donc $\|f\|_{\infty} < M$

Montrons que $\|f_m - f\|_{\infty} \rightarrow 0$

$$\forall m \geq m_\epsilon \text{ on a } \|f_m - f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f(x)|$$

Comme $m \geq m \geq m_\epsilon, \|f_m - f_{m_\epsilon}\|_{\infty} < \epsilon$ (courbe)

$$\rightarrow \forall x \in [a, b], |f_m(x) - f_{m_\epsilon}(x)| < \epsilon \quad \forall x \text{ (car } \epsilon, \forall x)$$

$$\rightarrow \forall x \frac{f_m - f_{m_\epsilon}}{m} = f(x) \text{ vérifie}$$

→ Si on fixe m , et on fait tendre m vers $+\infty$, on voit que
ceci donne $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$ même $m \geq m_\epsilon$ et même
 $\epsilon, \forall x$

$$\rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f(x)| < \epsilon$$

donc $\|f_m - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \square$

Proposition 2 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ est fermé (c'est complet). Donc
 \mathcal{C}_0 muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ est de Banach.

Preuve Il suffit de montrer si $(f_m)_m$ est une suite de
fonctions continues qui est convergente, la limite est
continue par rapport à $\|\cdot\|_{\infty}$ vers \mathcal{B}

On sait que $\forall n \exists \delta_n > 0$ tel que $|x-y| < \delta_n \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$

Nous savons de plus que $\exists m_0$ tel $\forall n > m_0, \|f_n - f\|_{\infty} < \frac{\epsilon}{3}$

Si $|x-y| < \delta_{n_0}$, on trouve

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_{\infty} + \frac{\epsilon}{3} + \|f_{n_0} - f\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

continuité

$\rightarrow f$ est continue. \square