2) K compact $\Rightarrow$ K seq compact

On suppose $K \subseteq V$ compact. Il faut mq pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K, on peut trouver une ss suite $(x_{n_k})_k$ qui CV vers un point de K.

Procédons par l'absurde. Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ qui n'a pas de sous suites convergentes vers un élément de K.

En particulier, on ne peut pas avoir une infinité de $n \in \mathbb{N}$ et un $x \in K$ tq $x_n = x$ car autrement ces indices définissent une sous-suite constante de valeur x qui est donc convergente

$\forall m \in \mathbb{N}$ on pose $T_m = \{ x_n, n \geq m \} \subseteq K$

T_m ne peut pas avoir de points d'accumulation dans K (ie $\forall x \in K$, il n'existe pas de suites $(y_k)_k \in T_m{}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall k$ $y_k \neq x$ et $\lim_k y_k = x$). La raison est que si une telle suite $(y_k)_k$ existait, on pourrait trouver une sous-suite de $(x_n)_n$ qui CV vers x. Précisément, par récurrence sur l'entier $s \in \mathbb{N}$, on montre que $\forall s \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_{n_s} \in B(x, \frac{1}{s})$ ~~tq $x_{n_s} = y_{k_s}$~~ et un k_s tq $x_{n_s} = y_{k_s}$, et $n_{s+1} \geq n_s$.
C'est possible car $y_k \neq x$ $\forall k$

Donc il existe un fermé $F_m \subseteq V$ tq $F_m \cap K = T_m$:
$Acc(T_m) \cap K = \emptyset$ (on vient de le montrer)
Soit $F_m = Ad(T_m) = T_m \cup Acc(T_m)$ est fermé dans V et $F_m \cap K = T_m$.
Soit $U_m = V - F_m$ ouvert

$\rightarrow$ (1) $T_m \subseteq K$ $\forall m$
(2) $T_{m+1} \subseteq T_m$ $\forall m$, $F_{m+1} \subseteq F_m$ $\forall m$
(3) $U_{m+1} \supseteq U_m$, $\forall m$ (passage au complémentaire)
(4) $\bigcap_{m \geq 0} T_m = \emptyset$

$\rightarrow \left(\bigcap_{m \geq 0} F_m \right) \cap K = \emptyset$ d'où $\bigcup_{m \geq 0} U_m \supseteq K$

29

15

Donc $((U_m)_m)$ est un recouvrement de K. Mais K est compact, donc il existe un sous-recouvrement fini

$K \subseteq U_{m_1} \cup \dots \cup U_{m_t}$ on peut supposer $m_1 < m_2 < \dots < m_t$ quitte à changer d'ordre.

Donc $K \subseteq U_{m_t}$

C'est absurde car $T_{m_t} \subseteq F_{m_t} = V - U_{m_t}$

$\to T_{m_t} \cap K = \emptyset$ ce qui est absurde car $T_m \subseteq K \ \forall m$.

$\square$ Vrai en général dans les espaces métriques.

Complétude

Soit $(V, \|\cdot\|)$ EVN, $S \subseteq V$

Définition On dit que $S \subseteq V$ est complet si pour toute suite $(x_n)_n$ de Cauchy à valeurs dans S, on a

- $\lim_m x_m$ existe dans V
- $\lim_m x_m \in S$

Définition Si $(V, \|\cdot\|)$ est complet, on dit que $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach

Proposition Si $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et $S \subseteq V$, alors S est complet $\iff$ S est fermé

La preuve est conséquence du lemme suivant

Lemme Si $(V, \|\cdot\|)$ est un EVN quelconque (pas forcément de Banach), et $S \subseteq V$ est complet, $F \subseteq V$ est un fermé alors $F \cap S$ est complet et fermé

Preuve Proposition 1) Si $S = V$ le lemme montre que tout fermé de V est complet
2) Si $F = V$, le lemme montre que tout complet est fermé

Preuve du lemme Montrons que $F \cap S$ est fermé ie que $Ad(F \cap S) = F \cap S$, c'est-à-dire que si $(x_n)_n$ suite d'éléments de $F \cap S$ qui est CV, alors $\lim_n x_n \in F \cap S$, comme $x_n \to x$ alors $(x_n)_n$ est de Cauchy, donc $x \in S$ car S est complet, d'autre part, $x_n \in F$, $\forall n$, mais F est fermé $\Rightarrow x \in F$
On vient donc $x \in F \cap S \Rightarrow ad(F \cap S) = F \cap S$
donc $F \cap S$ est fermé

Montrons que $F \cap S$ est complet. Soit $(x_n)_n$ de Cauchy à valeurs dans $F \cap S$, en particulier $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$, donc $\lim_n x_n$ existe et $\lim_n x_n \in S$. Comme F est fermé, et que $(x_n)_n$ est une suite CV d'éléments de F, alors $\lim_n x_n \in F$.
Ainsi • $\lim_n x_n$ existe
• $\lim_n x_n \in F \cap S$.
$F \cap S$ est complet □

Remarque Si deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors elles ont les mêmes suites CV, et les mêmes suites de Cauchy.
Montrons. On sait que $\exists C, C'$ tq $\|\cdot\|_1 < C \|\cdot\|_2$ et
$\|\cdot\|_2 < C' \|\cdot\|_1$
(x_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon', \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq m \geq n_\varepsilon$
$\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon' \rightarrow \|x_n - x_m\|_2 \leq C' \|x_n - x_m\|_1 < C' \varepsilon'$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon = n_{\varepsilon'}$ avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$ tq $\forall n \geq m \geq N_\varepsilon$ on a $\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$ $(= \varepsilon' C)$ donc $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$. En utilisant $\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_2$ on montre de la même manière que si $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$ alors elle est de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$

Conclusion la notion de complétude d'un sous-ensemble est topologique, elle ne dépend pas de la norme mais seulement de sa classe d'équivalence.

Exemple

* $\mathbb{K}^n$, muni d'une norme quelconque est de Banach

Preuve les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont toutes équivalentes, et la notion de complétude ne dépend pas de la norme choisie. Pour la preuve on choisit $\|\cdot\|_\infty$.

Pour cette norme $\|\cdot\|_\infty$, une suite $(x_k)_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{K}^n$ est de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall i = 1, \dots, n$ la suite $(x_{k,i})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. En effet, $(x_k)_k$ de Cauchy $\|\cdot\|_\infty$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ tq $\forall k_1 \geq k_2 \geq n_\varepsilon$, on a $\|x_{k_1} - x_{k_2}\| < \varepsilon$

Mais $\|x_{k_1} - x_{k_2}\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_{k_1,i} - x_{k_2,i}|$

et ce sup est $< \varepsilon \Leftrightarrow \forall i \ |x_{k_1,i} - x_{k_2,i}| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow (x_{k,i})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

Comme $\mathbb{K}$ est complet (c'est un axiome pour $\mathbb{R}$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ c'est un exercice), $\forall i$ $\lim_k x_{k,i}$ existe dans $\mathbb{K}$.
Ainsi, $\lim_k x_k$ existe dans $\mathbb{K}^n$ et c'est $(x_1, \dots, x_n)$ où $x_i = \lim_k x_{k,i}$ $\forall i$.
Donc $\mathbb{K}^n$ est complet $\square$.