Corollaire Il n'y a qu'une seule topologie sur $\mathbb{K}^m$ provenant d'une norme.

Corollaire Une suite de $\mathbb{K}^m$ converge par rapport à une norme si et seulement si elle converge par rapport à toute norme

Corollaire Un sous-ensemble de $\mathbb{K}^m$ est séquentiellement compact par rapport à une norme ssi il est séquentiellement compact par rapport à toutes normes

Même chose pour les propriétés de
- fermé
- borné
- convexe par arcs

Corollaire Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^m$, alors un sous ensemble $K \subseteq \mathbb{K}^m$ est séquentiellement compact ssi il est fermé-borné

Corollaire Théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{K}^m$
Soit B un sous-ensemble borné de $\mathbb{K}^m$ (par rapport à une norme quelconque $\|\cdot\|$). Soit $(x_m)_m$ une suite d'éléments de B, alors elle a une valeur d'adhérence dans $\mathbb{K}^m$ (càd qu'il existe une sous-suite convergente $(x_{m_k})_k$). De plus, si B est aussi fermé, cette valeur d'adhérence appartient à B.

Preuve B est borné : il existe $r>0$ tq $B \subseteq B_f(0,r)$.
$(x_n)_n$ est une suite dans $B_f(0,r)$ qui est fermé et borné donc seq compact. Ainsi, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente et $\lim_k x_{n_k} \in B_f(0,r)$
Si B est fermé, on a vu que il coïncide avec son adhérence donc $x \in B$ $\square$.

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN quelconque, et $K \subseteq V$ un sous-ens

Rappels * On dit que K est compact si pour tout recouvrement ouvert $K \subseteq \bigcup_i U_i$, U_i = ouvert de V on peut trouver $U_{i_1}, \dots U_{i_m}$ tq $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$, ie K est en réalité contenu dans un nombre fini d'ouverts

* K est séquentiellement compact si pour toute suite $(x_n)_n$ d'élé's de K, on peut en extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ tq $\lim_k x_{n_k}$ existe et appartient à K.

Proposition (vrai pour les espaces métriques) Un sous ens K d'un EVN V est compact si et seulement si il est séquentiellement compact

Lemme Si K est séquentiellement compact, alors $\forall \varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_ε et $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon} \in K$ tel que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$

Preuve du lemme Par l'absurde, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tq $\forall n_\varepsilon$ $\forall x_1, \dots, x_{n_\varepsilon} \in K$, $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$

Soit $x_0 \in K$, $\exists x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$, $x_1 \in K$

$\rightarrow \exists x_2 \notin B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$, $x_2 \in K$

Par récurrence, $\forall n$, on peut trouver une suite $(x_n)_n$, $x_n \in K$ telle que $\forall n$, $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon) \rightarrow$

$\|x_n - x_i\| \geq \varepsilon$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

donc $\forall n, m$, $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$

donc pour toute sous suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ on a la même propriété $\forall k_1, k_2$ $\|x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}\| \geq \varepsilon$

→ Aucune sous suite n'a la propriété de Cauchy → aucune sous-suite ne converge. Ceci contredit le fait que K est seq. compact. Absurde □

Preuve de la prop

On suppose K seq compact

1) Seq compact $\Longrightarrow$ compact Soit $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de K. On veut mq K est contenu dans une réunion fini de ces ouverts.

Par le lemme, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut recouvrir K avec un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ centrées dans des pts de K. Soit $\mathcal{B}_m$ cette famille finie de boules.

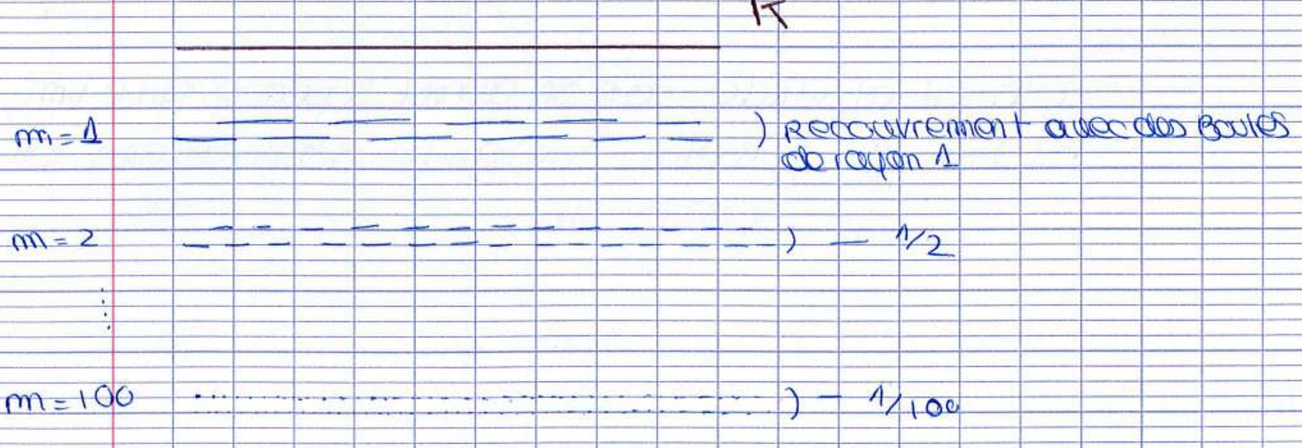
On veut mq il existe $m \in \mathbb{N}$ tq pour toute boule $B \in \mathcal{B}_m$, on peut trouver i_B tq $B \subseteq U_{i_B}$.

Dans ce cas, la réunion finie $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_m} U_{i_B}$ sera un recouvrement fini de K car

$K \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}_m} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}_m} U_{i_B}$ (réunion finie dans les deux cas)

Procédons par l'absurde et supposons que cela ne soit pas possible. Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, on peut trouver une boule $B_{\bar{m}} \in \mathcal{B}_m$ tq $B_{\bar{m}}$ n'est contenue dans aucun des ouverts $(U_i)_i$.

Soit x_m le centre de $B_{\bar{m}}$. Alors $B_{\bar{m}} = B(x_m, \frac{1}{2^m})$ et $\forall i$ $B(x_m, \frac{1}{2^m}) \not\subseteq U_i$

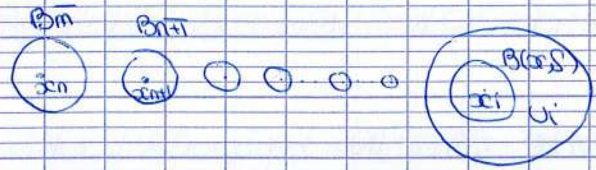


On construit ainsi une suite $(x_m)_m$

K est seq compact alors il existe une sous suite $(x_{m_k})_k$ tq $\lim_k x_{m_k} = x \in K$

Maintenant il existe un ouvert U_i du recouvrement qui contient x par déf de limite ($K \subseteq \bigcup U_i$)

U_i est ouvert, donc $\exists \delta$ tq $B(x,\delta) \subseteq U_i$



~~Par définition de limite, $\exists \bar{k}$ tq $\forall k \geq \bar{k}$ $x_{m_k} \in B(x,\delta)$ si $\|x_{m_k} - x\| \longrightarrow 0$ Pour tout $k \geq \bar{k}$, $\|x_{m_k} - x\| \leq \delta$~~

Par déf de limite, on a $\|x_{m_k} - x\| \longrightarrow 0$ Donc on peut trouver $\bar{k}$ tq $\forall k \geq \bar{k}$

- $\|x_{m_k} - x\| \leq \frac{\delta}{2}$ $(\Leftrightarrow x_{m_k} \in B(x, \delta/2))$
- $\frac{1}{2^{m_k}} < \frac{\delta}{2}$

donc $\forall k \geq \bar{k}$ $B\left(x_{m_k}, \frac{1}{2^{m_k}}\right) \subseteq B(x,\delta) \subseteq U_i$

car si $\|y - x_{m_k}\| < \frac{1}{2^{m_k}}$ alors $\|y - x\| \leq \|y - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - x\| \leq \frac{1}{2^{m_k}} + \frac{\delta}{2} < \delta$

Cela est absurde car on avait supposé que $\forall m$, $B(x_m, \frac{1}{2^{m_k}})$ n'était contenue dans aucun des ouverts U_i