Proposition Un sous-ensemble K de $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ est seq compact ssi il est fermé et borné

Preuve $\Rightarrow$ Vrai en general.

$\Leftarrow$ Soit K un fermé et borné. Par la proposition precedente, les Boules fermées sont des compacts. En effet $\forall r>0$ $B_f(0,r) = \underbrace{[-r,r] \times \cdots \times [-r,r]}_{m \text{ fois}}$

Cela veut dire que $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \mid \|(x_1, \dots, x_m)\| \leq r \right\} = \prod_{i=1}^{n} \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq r\}$

On sait que sur $\mathbb{R}$ les fermés bornés sont seq compacts donc $[-r,r]$ est seq compact

donc $B_f(0,r)$ est produit de seq compact

donc $B_f(0,r)$ est seq compact par rapport à la norme produit $\|\ \|_\infty$

Maintenant si K est borné, $\exists r>0$ tq $K \subseteq B_f(0,r)$

Si K est de plus fermé $\rightarrow$ il est fermé dans le seq compact $B_f(0,r)$ donc K est seq compact.

Theoreme Toutes les normes sur $\mathbb{K}^m$ sont equivalentes

Preuve Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^m$, Mq $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$

Regardons la fonction identité :

$(\mathbb{K}^m, \|\ \|_\infty) \xrightarrow{id} (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|)$

Étape 1 $id : (\mathbb{K}^m, \|\ \|_\infty) \rightarrow (\mathbb{K}^m, \|\ \|)$ est continue

Preuve id est lineaire $\rightarrow$ il suffit de voir que

$$\sup_{\|x\|_\infty = 1} \frac{\|id(x)\|}{\|x\|_\infty} < \infty$$

ie il faut mq $\|X\| \leq C \|X\|_\infty$ $\forall X$

27

13

ième place

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $e_i = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0)$

$\rightarrow \|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| . \|e_i\|$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| . (\max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|)$ Soit $M = \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|$

$M \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M . \sum_{i=1}^{n} \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = M . n . \|x\|_\infty$

$\Rightarrow \|x\| \leq C \|x\|_\infty$ avec $C = M.n$ ne dépend pas du choix de x

$\Rightarrow \|\cdot\| \leq C \|\cdot\|_\infty$

Montrons l'autre sens, ie $\exists C' > 0$ tq $\|\cdot\|_\infty \leq C' \|\cdot\|$

Regardons $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ elle est linéaire et continue car on a dq $\|x\| \leq C \|x\|_\infty$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \arrow[r, "id", "cont"'] \arrow[rr, bend right, "\text{cont. } (f)"'] & (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|) \arrow[r, "\|\cdot\|", "cont"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Nous avons vu que dans $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ les ensembles qui sont séquentiellement compacts sont les fermés et bornés (démontré pour le moment pour la norme $\|\cdot\|_\infty$)

$\rightarrow C_1 := \{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty = 1\}$ est séq compact car $C_1 \subseteq B_f(0,1)$ donc C_1 est borné et

$C_1 = \underbrace{B_f(0,1)}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{(\mathbb{K}^n - B(0,1))}_{\text{fermé}}$ donc C_1 est fermé

Maintenant $f(C_1)$ est un compact de $\mathbb{R}$ car f est continue (ie l'image de compacts par une f° continue est compacte)

En réalité, $f = \|\cdot\|$ et donc $f(C_1) \subset \mathbb{R}_+$.
$f(C_1)$ compact $\rightarrow$ $f(C_1)$ a un min et un max, et $\min(f(C_1)) \geq 0$ car $f(C_1) \subseteq \mathbb{R}_+$
Soit $m = \min f(C_1)$ et soit $x \in C_1$ tq $f(x) = m$.
Comme $0 \notin C_1$, on a $x \neq 0$ donc $\|x\| \neq 0$, d'où $f(x) = \|x\| \neq 0$. Donc $\underline{\min f(C_1) = s > 0}$

On vient de mq $\forall x \in \mathbb{K}^n$ tq $\|x\|_\infty = 1$, on a $\|x\| \geq s$
Soit $y \in \mathbb{K}^n$, notons $R := \|y\|_\infty$.
Alors $\left\| \frac{y}{r} \right\|_\infty = 1$, donc $\left\| \frac{y}{R} \right\| \geq s$

alors $\|y\| \geq R \cdot s = \|y\|_\infty \cdot s$
Ceci étant vrai pour tout y, s ne dépendant pas du choix de y alors $\underline{\|\cdot\|_\infty \leq s\|\cdot\|}$

Donc $\boxed{\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty}$ $\square$

Commentaire : L'équivalence des normes sur $\mathbb{K}^n$ est une conséquence de la ~~boule~~ compacité de la boule unité fermée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$

Corollaire

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN de dim finie. Soit $(W, \|\cdot\|)$ un EVN quelconque.
Alors toute application linéaire f de V dans W est automatiquement continue

Preuve Ici on exploite le fait que la continuité est une propriété topologique et ne dépend pas vraiment des normes choisies sur V et W mais seulement des topologies induites par ces normes.
Plus précisément il faut mq l'image inverse d'un ouvert de W est un ouvert de V, et être un ouvert ne dépend que de la topologie.

Pour tester la continuité on peut remplacer les normes par des normes équivalentes.
Sur $V \simeq \mathbb{K}^m$ on prend la norme $\|\cdot\|_\infty$
$\forall x \in V$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, $x_i \in \mathbb{K}$ $(e_1, \ldots, e_m)$ base de $V = \mathbb{K}^m$, pour rappel $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$

$$
\begin{aligned}
\to \|f(x)\|_W &= \|f(\textstyle\sum x_i e_i)\|_W \\
&= \|\textstyle\sum_i x_i f(e_i)\|_W \\
&\leq \textstyle\sum_i |x_i| \cdot \|f(e_i)\|_W \\
&\leq \textstyle\sum_i (\max_i(x_i))(\max_i \|f(e_i)\|_W \\
&= m \cdot \|x\|_\infty \left(\max_i \|f(e_i)\|_W\right)
\end{aligned}
$$

$\to$ Si $C := m \cdot \max_i(\|f(e_i)\|_W)$ on a
$\|f(x)\|_W \leq C \cdot \|x\|_\infty$

On a montré que f est continue $\square$