⚠ Le contraire (fermé borné ⇒ compact) n'est pas vrai, mais on verra que c'est vrai en dimension finie

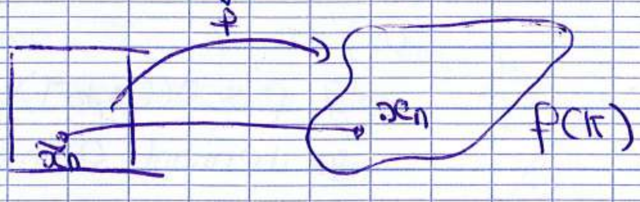
Proposition $(V, \|\cdot\|)$ EVN
Soit K seq compact, $F \subseteq V$ fermé alors $K \cap F$ est seq compact

Preuve On doit mq $\forall$ suite $(x_n)_n$ d'éléments de $K \cap F$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente vers un élément de $K \cap F$. Comme $x_n \in K$ $\forall n$ et K est seq compact, alors il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers un élément $x \in K$. Reste à voir que $x \in K \cap F$. Mais cela est vrai car F est fermé et $(x_{n_k})_k$ est une suite convergente d'éléments de F (donc $x \in Ad(F) = F$)

Remarque Pour dq fermé + borné ⇒ seq compact en dimension finie, on va mq les boules fermés sont seq compacts en dimension finie et donc un fermé borné est un fermé contenu dans une boule fermée et donc il est seq compact par la proposition précédente

Proposition $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ EVN, $K \subseteq V$ seq compact
$f : K \to W$ continue. Alors $f(K)$ est seq compact

Preuve Il faut mq si $(x_n)_n \in (f(K))^{\mathbb{N}}$, alors elle a une sous-suite convergente vers un élément de $f(K)$



$\forall n$ soit $\tilde{x}_n \in K$ tq $x_n = f(\tilde{x}_n)$. Comme K seq compact, $\exists (\tilde{x}_{n_k})_k$ convergente dans K vers $\tilde{x}$. Comme f est continue, elle envoie des suites cv vers des suites cv (critère séquentiel de la continuité), alors $(f(\tilde{x}_{n_k}))_k = (x_{n_k})_k$ cv vers $f(\tilde{x}) \in f(K)$ □

Remarque La proposition mq la compacité est une propriété invariante par homéomorphisme : c'est une propriété topologique

Proposition $(V, \|\cdot\|)$ EVN, $K \subseteq V$ seq compact, $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est une fonction bornée et atteint ses bornes

Preuve $f(K)$ est compact donc fermé et borné dans $\mathbb{R}$ donc $f(K)$ a un max et un min. Si $M = \max(f(K))$, $m = \min(f(K))$ on peut trouver $x_M, x_m \in K$ tq $f(x_M) = M$, et $f(x_m) = m$ car max & min $\in f(K)$

Rappel $(V, \|\cdot\|_V)(W, \|\cdot\|_W)$ EVN, $S \subseteq V$

Une fonction $f : S \to W$ est uniformément continue (UC) si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta,\ \forall x \forall y\ \|x-y\|_V < \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_W < \varepsilon$

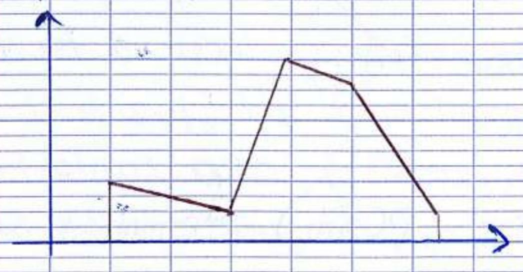
Remarque $(\mathcal{C}^0[a,b], \|\cdot\|_\infty) \subseteq \underbrace{(f^{o} \text{ bornées}, \|\cdot\|_\infty)}_{B([a,b],\mathbb{R})}$

Thm $B([a,b], \mathbb{R})$ est complet.

On peut mq la fermeture de $\mathcal{C}^1$ dans B est $(\mathcal{C}^0, \|\cdot\|_\infty)$

Application La fonction I (intégrale) peut être définie à l'aide de cette proposition.

$A([a,b])$ = fonctions affines par morceaux et continues sur $[a,b] \to \mathbb{R}$



Si $f \in A([a,b])$ on sait définir facilement l'intégrale $I(f)$ def

On peut mq $(A([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \subseteq (\mathcal{C}^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est DENSE. Donc I est continue sur $A([a,b])$ et linéaire donc lipschitzienne sur $A([a,b])$ donc UC sur $A([a,b])$ donc elle se prolonge automatiquement à $\mathcal{C}^0$ par un résultat vu dans les transparents.

Plus précisément, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une $\mathcal{C}^0$ cont qui est limite uniforme de fonctions affines par morceaux ($f_n \to f$ en norme sup, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$)

Alors $I(f) = \lim\limits_{n} I(f_n)$

Théorème de Heine — Soient $(V, \|\cdot\|)$ = EVN, $(W, \|\cdot\|_W)$ = EVN, $K \subseteq V$ seq compact et $f : K \to W$ continue

Alors f est automatiquement uniformément continue.

Preuve — Par l'absurde, si f n'est pas UC alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tq $\forall \eta > 0$, on peut trouver $x_\eta, y_\eta \in K$ tq $\|x_\eta - y_\eta\|_V < \eta$ mais $\|f(x_\eta) - f(y_\eta)\|_W \geq \varepsilon$

On prend $\eta = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n, y_n \in K$ tels que $\|x_n - y_n\|_V < \frac{1}{n}$ mais $\|f(x_n) - f(y_n)\|_W \geq \varepsilon$

K est seq compact donc $\exists (x_{n_k})_k$ une sous suite de $(x_n)_n$ qui est CV dans K, soit x sa limite.

De plus, $\exists (y_{n_{k_s}})_s$ sous-suite de $(y_{n_k})_k$ qui est CV dans K, soit y sa limite.

Donc $(x_{n_{k_s}})_s$ et $(y_{n_{k_s}})_s$ sont convergentes dans K et telles que $\|x_{n_{k_s}} - y_{n_{k_s}}\| < \frac{1}{n_{k_s}}$ $\forall s$ donc $x = y$

Or f est continue, donc $f(x_{n_{k_s}})$ CV vers $f(x)$ et $f(y_{n_{k_s}})$ CV vers $f(y) = f(x)$ (critère seq de la continuité; donc $\|f(x_{n_{k_s}}) - f(y_{n_{k_s}})\|_W \leq \|f(x_{n_{k_s}}) - f(x)\|_W + \|f(y_{n_{k_s}}) - f(y)\|_W$

Pour s suffisamment grand, on a

$\|\beta(x_{n_{k_s}}) - \beta(y_{n_{k_s}})\|_W < \varepsilon$ ABSURDE par le choix de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$. □

Produits de seq compacts

Définition Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux EVN. Alors l'espace vectoriel produit $V \times W$ est un EVN par la norme $\|(v,w)\| = \max(\|v\|_V, \|w\|_W)$ $\forall v \in V$ $\forall w \in W$

exercice C'est bien une norme sur $V \times W$, et s'appelle la norme produit

Exemple La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ est la norme produit de $(\mathbb{R}, |\cdot|) \times (\mathbb{R}, |\cdot|)$: $\|\binom{x}{y}\|_\infty = \max(|x|, |y|)$
On peut itérer et mq $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^m$ est la norme produit de $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \times (\mathbb{R}^s, \|\cdot\|_\infty)$ si
" $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k$ " (ie $(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow ((x_1, \dots, x_k), (x_{k+1}, \dots, x_m))$)
$k + s = m$

Proposition $(V, \|\cdot\|_V)$ $(W, \|\cdot\|_W)$ deux EVN, $K \subseteq V$ et $K' \subseteq W$ seq compacts. Alors $K \times K' \subseteq V \times W$ est encore seq compact par rapport à la norme produit de $V \times W$

Preuve Il faut mq toute suite dans $K \times K'$ a une SS suite cv vers un élément de $K \times K'$. Toute suite de $K \times K'$ est de la forme $((x_n, y_n))_n$ $\forall n$ $x_n \in K$, $y_n \in K'$ et $(x_n)_n$ est une suite de K, et $(y_n)_n$ — K'. Comme K et K' sont compacts $\exists (x_{n_k})_k$ tq $x_{n_k} \to x \in K$
$\exists (y_{n_{k_s}})_s$ tq $\lim\limits_s y_{n_{k_s}} = y \in K'$
Montrons que $((x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}}))_s$ cv vers $(x,y) \in K \times K'$
en effet, $\|x_{n_{k_s}} - x\|_V \xrightarrow[s]{} 0$, $\|y_{n_{k_s}} - y\|_W \xrightarrow[s]{} 0$
et donc $\|(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}}) - (x,y)\|_{V \times W} = \max(\|x_{n_{k_s}} - x\|_V, \|y_{n_{k_s}} - y\|_W)$ tend également vers 0.