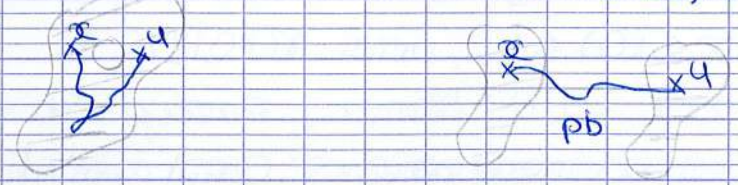
## Connexité par arcs

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $x, y \in V$.

**Définition** Un <u>arc joignant $x$ à $y$</u> ou chemin joignant $x$ à $y$ est une fonction <u>continue</u> $\gamma : [0,1] \to V$ tq $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$


⚠ Rien ne dit que $\gamma$ soit injective, par ex $\gamma$ peut passer plusieurs fois par $x$.

**Définition** Soit $C \subseteq V$ un sous-ens. On dit que $C$ est <u>connexe par arcs</u> si $\forall x, y \in C$ $\exists \gamma$ joignant $x$ à $y$ et $\gamma[0,1] \subseteq C$




connexe disconnexe

**Proposition** Soient $(V, \|\cdot\|)$ et $(W, \|\cdot\|)$ deux EVN, soit $S \subseteq V$ sous-ens, $f : S \to W$ fonction <u>continue</u>. Alors si <u>$C \subseteq S$ est connexe par arcs alors $f(C) \subseteq W$ est connexe par arcs</u>

**Preuve** Soient $x, y \in f(C)$, on veut trouver un chemin $\gamma : [0,1] \to f(C)$ joignant $x$ à $y$. On relève $x$ et $y$ dans $f(C)$ : $\tilde{x}, \tilde{y} \in C$ tq $f(\tilde{x}) = x$, $f(\tilde{y}) = y$.

$C$ est connexe par arcs $\to$ on a un arc $\tilde{\gamma} : [0,1] \to C$, $0 \mapsto \tilde{x}$, $1 \mapsto \tilde{y}$

Composons avec $f$ : $\gamma : [0,1] \to f(C)$

$\gamma = \cancel{\tilde{\gamma} \circ f}\ f \circ \tilde{\gamma}$ $\qquad 0 \mapsto \tilde{x} \mapsto f(\tilde{x})$, $\quad 1 \mapsto \tilde{y} \mapsto f(\tilde{y})$

$\gamma$ est une composée de fonctions continues. $\tilde{\gamma}([0,1]) \subseteq C \to f(\tilde{\gamma}([0,1])) \subseteq f(C) \to \gamma[0,1] \subseteq f(C)$



11

**Proposition** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs ssi c'est un intervalle (ouvert, fermé ou demi-ouvert)

**Preuve** Rappel : un sous ens de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi $\forall x, y \in I$, on tout point $z$ tq $x \leq z \leq y$ est encore dans $I$

1) Si $I$ est un intervalle, $I$ est connexe par arcs. En effet, si $x, y \in I$ ($y \geq x$), alors

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow I, \quad t \longmapsto tx + (1-t)y$$

$\forall t \in [0,1]$, $x \leq \gamma(t) \leq y$ car $\gamma(t) = tx + (1-t)y$, $t \geq 0$, $1-t \geq 0$

$$\gamma(t) = x + \underbrace{(1-t)(y-x)}_{\geq 0} \geq x$$

$$\gamma(t) = y + \underbrace{t(x-y)}_{\leq 0} \leq y$$

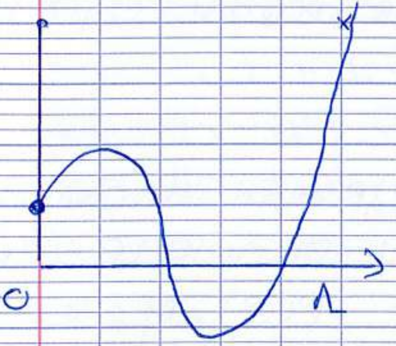
d'où $x \leq \gamma(t) \leq y$, ainsi $\gamma([0,1]) \subseteq I$

2) Si $C$ est connexe par arcs $C$ est un intervalle.

Mq $\forall a, b \in C$, $\forall z \in \mathbb{R}$ tq $a \leq z \leq b$ alors $z \in C$

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ un chemin joignant $a$ à $b$.

$$0 \longmapsto a$$
$$1 \longmapsto b$$




par le TVI (Théorème des valeurs intermédiaires) $\forall z$ tq $a \leq z \leq b$ $\exists t \in [0,1]$ tq $\gamma(t) = z$.
Comme $\gamma([0,1]) \subseteq C$ par hypothèse on a $\gamma(t) \in C \rightarrow z \in C \rightarrow C$ est un intervalle.

**Remarque** Dans $\mathbb{R}^n$, connexe = connexe par arcs

**Homéomorphisme** $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux EVN

Soit $S \subseteq V$, $T \subseteq W$ deux ss-ensembles, $f : S \to W$ continue telle que $f(S) = T$

**Définition** On dit que $f$ est un homéomorphisme de $S$ sur $T$ s'il existe une fonction $g : T \to V$ telle que
(i) $g(T) \subseteq S$
(ii) $g = f^{-1}$
(iii) $g$ est continue

Autrement dit, l'inverse de $f$ est continue.

**Définition** On dit qu'une propriété $\sigma$ est topologique si elle est préservée par homéomorphismes

ex La compacité et la connexité sont des propriétés topologiques

## Chapitre : compacité

**Rappel** Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN, soit $(a_m)_m$ une suite d'éléments de $V$, alors une valeur d'adhérence pour $(a_m)_m$ est un point $x \in V$ qui est tq $\forall \varepsilon > 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists m \geq m$ tq $\|a_m - x\| < \varepsilon$

**Définition** Un sous-ensemble $K \subseteq V$ est séquentiellement compact si toute suite $(a_n)_n$ d'éléments de $K$ a au moins un point d'adhérence dans $K$

**Proposition** Si $K \subseteq V$ est séquentiellement compact, $K$ est fermé et borné.

**Preuve** $K$ est fermé Il suffit de mq si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $K$ t.q $\lim_n x_n = x$ alors $x \in K$ (ie $K$ coincide avec son adhérence). Comme $K$ est seq compact, alors $(x_n)_n$ a une valeur d'adhérence $y \in K \to$ $\exists$ une sous-suite $(x_{m_k})_k$ tq $\lim_k x_{m_k} = y \in K$

Mais $x = \lim_m x_m$ et $x = y$ car toute sous-suite d'une suite cv converge vers la m̂ limite $\to x \in K$

$K$ est borné par l'absurde, si $K$ n'est pas borné, alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists x_m \in K - B(0,m)$, donc $\|x_m\| \to +\infty$ et $x_m$ ne cv pas. Pour toute sous-suite $(x_{m_k})_k$ de $(x_m)$, on a $\|x_{m_k}\| \xrightarrow[k]{} \infty$ et donc aucune ss suite ne converge, ce qui contredit le fait que $K$ est seq compact.

**Remarque** $(a_m)_m$ suite dans $V$, alors $x$ est une v a ssi il existe une sous suite de $(a_m)_m$ ayant $x$ pour limite