$\forall u \in W,\ \|T(u)\|_U \leq \|T\| . \|u\|_W$

$$\|T \circ S\| = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \|T(S(x))\|_U \leq \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \|T\| . \|S(x)\|_W$$

$$= \|T\| . \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \|S(x)\| = \|T\| . \|S\|$$

Remarque 1 C'est en fait plus general. Si $f, g$ sont des fonctions Lipschitziennes de constantes de Lip $K_f$ et $K_g$, alors on peut mq $K(f \circ g) \leq K_f . K_g$

Remarque 2 En general on peut avoir une inegalite STRICTE si $\mathrm{Im}(S) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$ alors $T \circ S = 0$ mais $\|S\|$ et $\|T\|$ peuvent ne pas être $> 0$

Exemple $V = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$
$W = \mathcal{C}^1(\text{———})$, $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_\infty$

$I : V \longrightarrow W$
$f \longrightarrow I(f) = \int_a^x f(t)\,dt$

<u>I est lineaire et continue</u>

linearite $I(f+g) = \int_a^x f(t)+g(t)\,dt = \int_a^x f + \int_a^x g = I(f) + I(g)$
$I(\lambda f) = \int_a^x \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^x f = \lambda I(f)$

Continuite $\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_a^x 1\,dt \leq \|f\|_\infty (b-a)$

$\forall x \in [a,b]$ on a $|I(f)(x)| \leq \|f\|_\infty . |b-a|$

donc $\|I(f)\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |I(f)(x)| \leq \|f\|_\infty |b-a|$

d'où I est continue et $\|I\| \leq |b-a|$

$I$ n'est pas bijective : $D(I(f)) \neq f$ à une cst près

Si $f = 1$ alors $|I(1)(x)| = |b-a|$

$I(1) = x - a$ donc $\frac{\|I(1)\|_\infty}{\|1\|_\infty} = \frac{|b-a|}{1} = |b-a|$

donc $|b-a| = \|I\|$.

Soit $D : W \longrightarrow V$ Alors $D$ est linéaire

$f \longrightarrow f'$ $\quad (f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$

Mais $D$ n'est pas continue

Corollaire — $I$ envoie des suites convergentes vers des suites CV

Traduction du corollaire : Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui CV uniformément vers $f$ ($\|f_n - f\|_\infty \to 0$) (Nous savons que $f$ est alors continue sur $[a,b]$), Alors $\int_a^x f_n(t)dt$ CVU à $\int_a^x f(t)dt$ $\left( \left\| \int_a^x f_n - \int_a^x f \right\|_\infty \to 0 \right)$

en d'autres termes : $\lim_n \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x (\lim_n f_n(t))dt$.

Proposition — On considère encore $C^1([a,b], \mathbb{R})$ et $C^0([a,b], \mathbb{R})$ munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors la dérivée

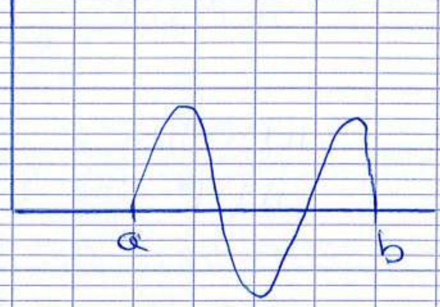
$$D : C^1 \longrightarrow C^0$$
$$f \longrightarrow D(f) = f' = \frac{d}{dt}(f)$$

est linéaire mais pas continue.

Preuve — Idée : on peut trouver des fonctions $f \in C^1$ petites mais avec dérivée grande de sorte que $\frac{\|D(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est grand

$(C^0, \|\cdot\|_\infty$ est complet

ex : $\cos(nx) = f_n$
$\forall n$, $\|f_n\|_\infty = 1$
$n$ assez grand




mais $D(f_n) = \cos(nx)' = -n\sin(nx)$

donc $\|D(f_n)\|_\infty = n \rightarrow \sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} \|D(f)\|$

$\geqslant \sup\limits_n \|D(f_n)\|_\infty = +\infty$

De manière équivalente, on peut montrer qu'on a une suite de fonctions $g_n \in C^1$ tq $g_n \to 0$ dans $C^1$ mais $D(g_n) \not\to 0$ dans $C^0$

ex $g_n = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ ; $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ $\forall n$ grand

donc $g_n \to 0$ dans $C^1$, Mais $D(g_n) = \cos(nx)$
et $\|D(g_n)\|_\infty = 1$ $\forall n$ grand d'où $f_n \not\to 0$

**Remarque** $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$ est complet (les suites de Cauchy cv)
cela veut dire que limite uniforme (i.e lim par rapport à $\|\cdot\|_\infty$) de fonctions continues est continue.
$\rightarrow (C^0, \|\cdot\|_\infty)$ est un "bon espace"
Mais $(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet. On peut avoir des suites de fonctions dérivables $(f_n)_n$ tq $\lim\limits_n f_n$ est continue, mais pas dérivable.

$(C^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas "bon"

Ce qu'on fait est de munir $C^1([a,b], \mathbb{R})$ de la norme $\|f\|^* = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. dans ce cas $(C^1, \|\cdot\|^*)$ est complet

Exercice : vérifier que $\|\cdot\|^*$ est une norme

**Proposition** $(C^1, \|\ \|^*) \xrightarrow{D} (C^0, \|\cdot\|_\infty)$ est continue

**Preuve** $\dfrac{\|D(f)\|_\infty}{\|f\|^*} = \dfrac{\|D(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty + \|D(f)\|_\infty} \leqslant 1$

donc $D$ est continue et $\|D\| = \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|D(f)\|_\infty}{\|f\|^*} \leq 1$

**Exercice**: ~~trouver $\|D\|$, prendre les fonctions $f_m = m x$~~
~~$\|f_m\|_\infty = m \cdot b^k$ $\|D(f)\| = m$~~
Montrer que $\|D\| = 1$

Soit $f_m(x) = x^m$. Supposons $a, b > 0$ (la preuve est la même dans les autres cas)

$\dfrac{\|D(f_m)\|_\infty}{\|f\|^*} = \dfrac{m b^{m-1}}{m b^{m-1} + b^m} = \dfrac{m}{m+b}$ (**) Pour tout $\varepsilon > 0$,

on peut trouver $m$ tq $\left| 1 - \dfrac{\|D(f_m)\|_\infty}{\|f\|^*} \right| < \varepsilon$.

donc 1 est bien le sup.