(3) $\Rightarrow$ (4) Supposons (3). $\exists K>0$ tq $f(B_V(0,1)) \subseteq B_W(0,K)$
en multipliant par les scalaires de $\mathbb{R}$ et en utilisant le fait que f est linéaire, on voit que
$\forall r \in \mathbb{R}$, $f(B_V(0,r)) \subseteq B_W(0,K\cdot r)$
d'où $\underbrace{\bigcap_{r'>r} f(B_V(0,r'))}_{} \subseteq \underbrace{\bigcap_{r'>r} B_W(0,Kr')}_{}$

$$f\Big(\bigcap_{r'>r} B_V(0,r')\Big) \subseteq K.\bigcap_{r'>r} B_W(0,r')$$

Nous on a

$$\bigcap_{r'>r} B(0,r') = B_f(0,r)$$

d'où $f\big(B_{f,V}(0,r)\big) \subseteq K \cdot B_{f,W}(0,r) = B_{f,W}(0,rK)$

Ceci est donc vrai pour les boules fermés

Si $\|x\|_V = r$ alors $x \in B_{f,V}(x,r)$ donc $f(x) \in B_{f,W}(f(x),rK)$
donc $\|f(x)\|_W \leq k.r \leq K\|x\|_V$ ceci est vrai $\forall x$ de norme r, et pour tout r donc vrai $\forall x \in V$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Supposons $\forall x \in V$ $\|f(x)\|_W \leq K\|x\|_V$
alors $\forall x,y \in V$, $\|f(x-y)\|_W \leq K\|x-y\|_V$
$\quad\|$ f linéaire
$\|f(x)-f(y)\|_W$

donc f est Lipschitzienne

(5) $\Rightarrow$ (6) Supposons f Lipschitzienne. Alors
$\|f(x)\|_W \leq \|x\|_V . K$, en prenant $y=0$ dans la déf
Soit $(x_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$, $x_n \to 0$, donc $\|x_n\| \to 0$ dans $\mathbb{R}$.
Alors $\|f(x_n)\|_W \leq \|x_n\|_V . K$ comme $K.\|x_n\| \to 0$, on trouve que $\|f(x_n)\|_W \to 0$ et donc $f(x_n) \to 0$ dans W.

23

(9)

(5) ⇒ (1) Par la proposition précédente f est continue en 0.
Montrons que f est continue en tout point $x \in V$ par le critère séquentiel de continuité (ie prop précédente)
On doit montrer que si $(x_n)_n$ est une suite dans V tq $x_n \to x$ alors $f(x_n) \to f(x)$

$x_n \to x \iff \|x_n - x\| \to 0 \iff (x_n - x) \to 0$ dans V
donc $\underbrace{f(x_n - x)}_{= f(x_n) - f(x)} \to 0$ dans W donc $\|f(x_n) - f(x)\| \to 0$

Ainsi $f(x_n) \to f(x)$ donc f est cont en x $\forall x \in V$ $\square$

Définition $L(V,W)$ = espace des applications linéaires de V vers W
$\mathcal{L}(V,W)$ = espace des applications linéaires continues de V vers W.
$\mathcal{L}(V,W) \subseteq L(V,W)$ → on le prouvera
$\mathcal{L}(V,W)$ est un EVN avec la norme suivante :
pour tout $f \in \mathcal{L}(V,W)$, on pose $\|f\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ = plus petite constante de Lipschitz pour f = $\sup\limits_{\substack{x,y \in V \\ x \neq y}} \dfrac{\|f(x) - f(y)\|_W}{\|x - y\|_V}$
qu'on notera $\|f\|$ par la suite

Proposition On a

(1) $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \dfrac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}$

(2) $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|f(x)\|_W = \sup\limits_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} \|f(x)\|_W$

C'est-à-dire que $\|f\|$ est le rayon de la plus petite boule fermée de W, centrée en 0, et contenant $f(B_{F,V}(0,1))$

$z = x - y$

$f(x) - f(y) = f(x-y)$

Preuve . $\|f\| \overset{déf}{=} \sup_{\substack{x,y \in V \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_W}{\|x-y\|_V} = \sup_{\substack{z \in V \\ z \neq 0}} \frac{\|f(z)\|_W}{\|z\|_V}$ donc (1) est vrai.

. si $\|x\|_V = r \neq 1$ alors $\|r^{-1} x\|_V = r^{-1}\|x\| = 1$ ($x \neq 0$)

alors $\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \frac{r^{-1}\|f(x)\|_W}{r^{-1}\|x\|_V} = \frac{\|f(r^{-1}x)\|_W}{\underbrace{\|r^{-1}x\|_V}_{=1}} = \|f(r^{-1}x)\|_W$

$\leq$

$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|f(x)\|_W$

car l'inégalité $\leq$ est claire à droite car on prend le sup sur un ensemble plus petit (seulement les x de la norme 1) et l'inégalité $\geq$ suit de l'égalité $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|$

Pour terminer si $\|x\|_V < 1$ alors $\left\|\frac{x}{\|x\|_V}\right\|_V = 1$ et
$\|f(x)\|_W = \left\| f\left(\|x\|_V \cdot \frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|_W = \underbrace{\|x\|_V}_{\leq 1} \cdot \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|$
$\leq \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|_W$

donc $\sup_{\|x\|_V \leq 1} \|f(x)\| \leq \sup_{\|x\|_V = 1} \|f(x)\|$.

Mais l'inégalité dans l'autre sens est claire car à droite on a un sup sur un ensemble plus petit (les normes $= 1$)

$\| \ \|_{\mathcal{L}(V,W)}$ est une norme

1) Soient $T, S \in \mathcal{L}(V,W)$, soit $x \in V$, $\|x\| \leq 1$
$\|(T+S)(x)\|_W = \|T(x) + S(x)\|_W \leq \|T(x)\|_W + \|S(x)\|_W$

$\|T+S\| = \sup_{\|x\|_V = 1} \|(T+S)(x)\| \leq \|T\| + \|S\|$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_V = 1} \|(\lambda T)(x)\|_W = \sup_{\|x\|_V = 1} \|\lambda \cdot T(x)\|_W$

$= \sup_{\|x\|_V=1} |\lambda| \, \|T(x)\|_W = |\lambda| \cdot \sup \cdots\cdots = |\lambda| \cdot \|T\|$

3) Si $\|T\| = 0$, alors $\sup_{\|x\|_V=1} \|T(x)\|_W = 0$

donc $\|T(x)\|_W = 0 \ \forall x \in V$ tq $\|x\|_V = 1$ d'où $T(x) = 0$
car $\forall x$ car $\|\cdot\|_W$ est une norme.

$y \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\|y\|_V} \neq 0$

Donc $\forall y \in V$, $y \neq 0$, $\underbrace{T\left(\frac{y}{\|y\|_W} \cdot \|y\|_V\right)}_{= T(y)} = \|y\|_V \, T\left(\frac{y}{\|y\|_V}\right) = 0$

Ainsi $T \equiv 0$. $\square$

Proposition

Soient $(V, \|\cdot\|_V)$; $(W, \|\cdot\|_W)$ et $(U, \|\cdot\|_U)$ des EVN
Soient $V \xrightarrow[S]{} W \xrightarrow[T]{} U$ continues et linéaires

Alors $T \circ S$ est continue et $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$

Preuve

On sait que la composée de fonctions linéaires (et de f° continues) reste linéaire (continue).

$\|T \circ S\| = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\|T(S(x))\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V}} \left(\frac{\|T(S(x))\|_U}{\|S(x)\|_W} \cdot \frac{\|S(x)\|_W}{\|x\|_V} \right)$

$\leq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V}} \frac{\|T(S(x))\|_U}{\|S(x)\|_W} \cdot \underbrace{\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V}} \left(\frac{\|S(x)\|_W}{\|x\|_V} \right)}_{= \|S\|}$

Or, $\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V}} \frac{\|T(S(x))\|_U}{\|S(x)\|_W} \leq \sup_{\substack{y \in W \\ y \neq 0}} \frac{\|T(y)\|_U}{\|y\|}$

Problème : et si $S(x) = 0$