Corollaire Soient $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ deux normes sur V, τ, τ' les topologies correspondantes.

$\boxed{\text{EQU}}$ (i) $\tau = \tau'$

(ii) $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$

(iii) $\exists C, C'$ tq $C B_{\|\cdot\|}(0,1) \subseteq B_{\|\cdot\|'}(0,1) \subseteq C' B_{\|\cdot\|}(0,1)$

(iv) L'identité $id : (V, \|\cdot\|) \to (V, \|\cdot\|')$ est bicontinue

(v) Une suite $(x_m)_m \in V^{\mathbb{N}}$ tend vers zéro par rapport à $\|\cdot\| \Leftrightarrow$ elle tend vers zéro par rapport à $\|\cdot\|'$

Preuve (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) déjà vue

* (i) $\Leftrightarrow$ (iv)

(i) $\Rightarrow$ (iv) Si $\tau = \tau'$ et $U \in \tau'$ ouvert alors $id^{-1}(U) = U$ et comme $U \in \tau$ on a mq l'image inverse de tout ouvert de τ' est un ouvert de τ, donc $id : (V, \|\cdot\|) \to (V, \|\cdot\|')$ est continue de m̂ $id^{-1} : (V, \|\cdot\|') \to (V, \|\cdot\|)$ est continue

(iv) $\Rightarrow$ (i) Si id est ~~bi~~continue alors $\forall U \in \tau'$, $id^{-1}(U) = U \in \tau$ d'où $\tau' \subseteq \tau$. Inversement on mq $\tau \subseteq \tau'$.

* Montrons (2) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (5) Supposons (2) si $x_m \to 0$ par rapport à $\|\cdot\|$ alors $\|x_m\| \to 0$ or $(\|\cdot\| \sim \|\cdot\|') \overset{\exists C''}{} \; 0 \leq \|x_m\|' \leq C\|x_m\|$ donc $x_m \to 0$ par rapport à $\|\cdot\|'$ (gendarmes).

Si $x_m' \to 0$ par rapport à $\|\cdot\|'$ un raisonnement analogue mq $x_m' \to 0$ par rapport à $\|\cdot\|$.

(5) $\Rightarrow$ (2) ~~Supposons ($x_m \to 0$ pour $\|\cdot\|' \Leftrightarrow x_m \to 0$ pour $\|\cdot\|$)~~

Montrons par l'absurde

Si $\|\cdot\| \not\leq C\|\cdot\|'$ $\exists (x_m)_m \to 0 \,/\, \|\cdot\|$ mais $(x_m)_m \not\to 0 \,/\, \|\cdot\|'$

22

Ainsi $\forall C>0 \ \exists x$ tq $\|x\|' > C\|x\|$
En particulier $\forall n \ \exists x_n$ tq $\|x_n\|' \geq n\|x_n\|$

Soit $(U_n)_n$ définie comme $U_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \|x_n\|} \cdot x_n \in V$

$\|U_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\|U_n\| \longrightarrow 0$ donc $U_n \to 0$ pour $\|\cdot\|$

$\|U_n\|' = \frac{\|x_n\|'}{\sqrt{n}\,\|x_n\|} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n]{} +\infty$

donc $\neg(U_n \to 0$ pour $\|\cdot\|')$

Limites des fonctions entre EVN

1) Rappel $(V, \|\cdot\|) = $ EVN, $S \subseteq V$ sous-ens
$Acc(S) = \{x \in V \mid \exists (x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}, x_n \neq x$ tq $\lim_n x_n = x\}$
(point d'accumulation)
$\bar{S} = S \cup Acc(S)$

Définition Soit $(W, \|\cdot\|_W)$ un EVN
$f : S \to W$ une fonction, $x_0 \in Acc(S)$ $w \in W$
On dit que $f(x)$ tend vers w pour x qui tend vers x_0
(et on écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = w$) si $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta,\ \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-w\|_W < \varepsilon$

Si $x_0 \in S$ Continuité de f en x_0 s'écrit
$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta$ tq $\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|_W < \varepsilon$
c'est-à-dire f est continue en $x_0 \Leftrightarrow (\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$

Proposition (1) f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n)_n$ tq $x_n \in S\ \forall n$, $x_n \to x_0$ on a $f(x_n) \to f(x_0)$

(2) f est continue (en tt pt) $\Leftrightarrow$ $\forall$ suite $(x_n)_n$, $x_n \in S$ convergente vers $x_0 \in S$ $f(x_n) \to f(x_0)$

Preuve (2) est conséquence directe de (1)

(1) Supposons f continue. Alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si $x_n \to x_0$, $\exists n_\delta$ tq $\|x_n - x_0\| < \delta$ $\forall n \geq n_\delta$ $\Rightarrow$ $\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$ donc $f(x_n) \to f(x_0)$

réciproquement supposons que $\forall$ suite $x_n \to x_0$ on ait $f(x_n) \to f(x_0)$ et montrons que f est continue. on procède par l'absurde, si f est non continue il existe $\varepsilon > 0$ tq $\forall n$ on peut trouver $x_n \in S$ tq $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$

alors $x_n \to x$ et $f(x_n) \not\to f(x_0)$ $\square$.

Définition $(W, \|\cdot\|_W)$ EVN, SCV sous-ensemble, $(V, \|\cdot\|_V)$ EVN

une fonction $f : S \to W$ est lipschitzienne s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ tq $\forall x, y \in S$ on ait

$\|f(x) - f(y)\|_W \leq K \|x - y\|_V$

CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux EVN. Soit $f : V \to W$ une application linéaire $\left(\begin{array}{l} \forall v, v' \in V \ f(v-v') = f(v) - f(v') \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in V \ f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{array} \right)$

Proposition $\boxed{\text{EQU}}$ (1) f est continue sur V

(2) f est continue en 0

(3) f est borné sur $B_V(0,1)$ ($f(B_W(0,1))$ est borné dans W)

(4) Il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ tq pour tout $x \in V$ on a $\|f(x)\|_W \leq k \|x\|_V$

(5) f est Lipschitzienne

(6) Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de V tq $x_n \to 0$ dans V, on a $f(x_n) \to 0$ dans W

Preuve Remarquons $(2) \Leftrightarrow (6)$: suite de la proposition précédente

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$: C'est la définition de la continuité.

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$: La continuité en 0 s'écrit avec les normes de la manière suivante :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \ \|x - 0\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_W < \varepsilon$

$\|x\|_V < \delta \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$

$B_{V(0,\delta)} = \{x \in V \mid \|x\|_V < \delta\}$

$B_{W(0,\delta)} = \{y \in W \mid \|y\|_W < \delta\}$

$f(B_V(0,\delta)) \subseteq B_W(0,\varepsilon)$

$B_V(0,\delta) = \delta \, B_V(0,1)$ car $\delta \|x\| = \|\delta x\|$

donc $f(B_V(0,\delta)) = f(\delta B_V(0,1)) \underset{\text{linéaire}}{=} \delta f(B_V(0,1)) \subseteq B_W(0,\varepsilon)$

d'où $f(B_V(0,1)) \subseteq \frac{1}{\delta} B_W(0,\varepsilon) = B_W(0, \frac{\varepsilon}{\delta})$

donc $f(B_V(0,1))$ est borné dans W