$\|x\|_2 \le r \to \|x\|_1 \le C\|x\|_2 < Cr$

Rappel : Si $\exists C>0$ tq $\|\cdot\|_1 \le C\|\cdot\|_2$
Alors $\tau_1 \subseteq \tau_2$ $\forall r>0$ $B_2(0,r) \subseteq B_1(0,Cr)$

Corollaire : Si $\tau_1 = \tau_2$ alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

Preuve : Soit $B_1(0,1) = \{x \in V \mid \|x\|_1 < 1\} \in \tau_1$
Mais puisque $\tau_1 \subseteq \tau_2$ alors $B_1(0,1)$ est une réunion de BO par rapport à $\|\cdot\|_2$
$\to \exists C>0$ tq $B_2(0,C) \subseteq B_1(0,1) \in \tau_1 = \tau_2$

$$\underset{C B_2(0,1)}{\overset{\|}{B_2(0,C)}} \subseteq B_1(0,1)$$

donc $B_2(0,1) \subseteq \frac{1}{C} B_1(0,1)$

On peut en multipliant par r mq $\forall r>0$ $\forall a \in V$
$B_2(0,r) \subseteq \frac{1}{C} B_1(0,r)$ et comme les translations sont bicontinues $B_2(a,r) \subseteq \frac{1}{C} B_1(a,r)$

Montrons les mêmes inclusions pour les boules fermées
$$B_{2f}(a,r) = \bigcap_{r'>r} B_2(a,r') \subseteq \bigcap_{r'>r} \frac{1}{C} B_1(a,r')$$
$$= \frac{1}{C} \bigcap_{r'>r} B_1(a,r') = \frac{1}{C} B_{1f}(a,r)$$

donc si $\|x\|_2 = r$ alors $x \in B_{2f}(0,r) \subseteq \frac{B_{1f}(0,r)}{C}$
donc $\|x\|_1 \le \frac{r}{C} = \frac{\|x\|_2}{C}$ (vrai $\forall x \in V$)

d'où $\|\cdot\|_1 \le \frac{1}{C} \|\cdot\|_2$

Par un raisonnement totalement symétrique montre que $\exists C'>0$ $\|\cdot\|_2 \le C' \|\cdot\|_1$
donc $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ $\square$

Corollaire $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff \exists C, C'$ tq $C\, B_1(0,1) \subseteq B_2(0,1) \subseteq C' B_1(0,1)$

$\|\cdot\|_1 \leq C \|\cdot\|_2 \iff B_2(0,1) \subseteq C \cdot B_1(0,1)$

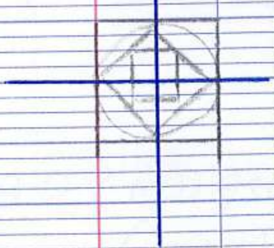
Remarque Dans quelques séances, nous allons mq TOUTES LES NORMES SUR $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes, et donc définissent la même topologie

Terminologie On a ~~défini~~ des notions topologiques qui ne dépendent pas de la norme et des notions métriques qui dépendent du choix de la norme. Notamment la continuité est une notion topologique car elle peut s'exprimer uniquement avec des ouverts. Le fait d'être LIPSCHITZIENNE par contre est une notion MÉTRIQUE

Comme exercice démontrons que toutes les normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

Corollaire $\forall p, q \geq 1$ ou $p, q = +\infty$ on a $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$ sur $\mathbb{K}^n$

Preuve Idée : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 2$ on a vu la forme des Boules $B_p(0,1)$



$\forall p \geq 1$, $B_p(0,1) \subseteq B_\infty(0,1)$

donc $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_p$

D'autre part $\frac{1}{2} B_\infty(0,1) \subseteq B_1(0,1)$

donc $\|\cdot\|_1 \leq 2 \|\cdot\|_\infty$

donc $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$

D'autre part $B_1(0,1) \subseteq B_p(0,1) \subseteq 2 B_1(0,1)$

donc $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_\infty$ $\forall p \geq 1$

Sur $\mathbb{K}^m$ (cas général) Soit $x = (x_1, \dots, x_m)$

Alors $\|x\|_\infty = \max |x_i| \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i| = \|x\|_1$

donc $B_1(0,1) \subseteq B_\infty(0,1)$

d'autre part $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{m} \max |x_i| = m \max |x_i|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \; m\cdot\|x\|_\infty$

donc $B_\infty(0,1) \subseteq m\, B_1(0,1)$

Donc $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$

Ensuite soient $p, q \geq 1$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$

on a $\sum_{k=1}^{m} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (Holder)

Si $y = (1, \dots, 1)$ on trouve

$\sum_{k=1}^{m} |x_k| \leq \|x\|_p \cdot m^{\frac{1}{q}}$

d'où $\|x\|_1 \leq m^{\frac{1}{q}} \|x\|_p$

D'autre part $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} (\max |x_i|^p)\right)^{\frac{1}{p}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \; m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$

$\|\cdot\|_p \leq m^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty \leq m^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_1$

$\quad \vee|$

$m^{\frac{1}{q}} \|\cdot\|_1$

D'où $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ $\square$

⚠ L'équivalence de normes n'est pas vraie en dim ∞

Exemples $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$

Soit $f \in V$, $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes

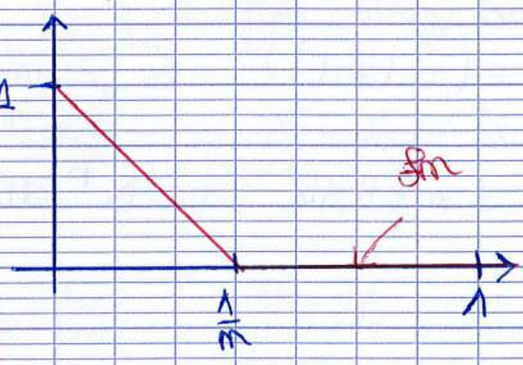
Preuve On a certes $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_\infty$

mais il n'existe pas de $C > 0$ tq $\|\cdot\|_\infty \le C \|\cdot\|_1$

Par l'absurde si $\forall f$ on avait $\|f\|_1 \le C \|f\|_\infty$

Alors $\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} \le C \quad \forall f \neq 0$ (on verra dans quelques séances que cela signifie que l'identité est continue)

On va trouver une famille de fonctions $(f_n)_n$ telle que ce rapport devient de plus en plus grand et n'est pas borné ce qui implique que C ne peut exister



$\|f_n\|_\infty = 1, \ \forall n$

$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$

d'où $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n$ comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $2n > C$

contradiction C n'existe pas