Topologie B

Andrea Pulita

Institut Fourier

Grenoble, automne 2019

Informations

- Mon e-mail est andrea.pulita@univ-grenoble-alpes.com ;
- Mon bureau est le 35C au RC de l'Institut Fourier ;
- Ce cours a lieu
  - les Jeudis de 13h45 à 15h30 en salle 18 ;
  - les Vendredis de 9h00 à 10h45 en Amphi Chabauty.

Séances et CC

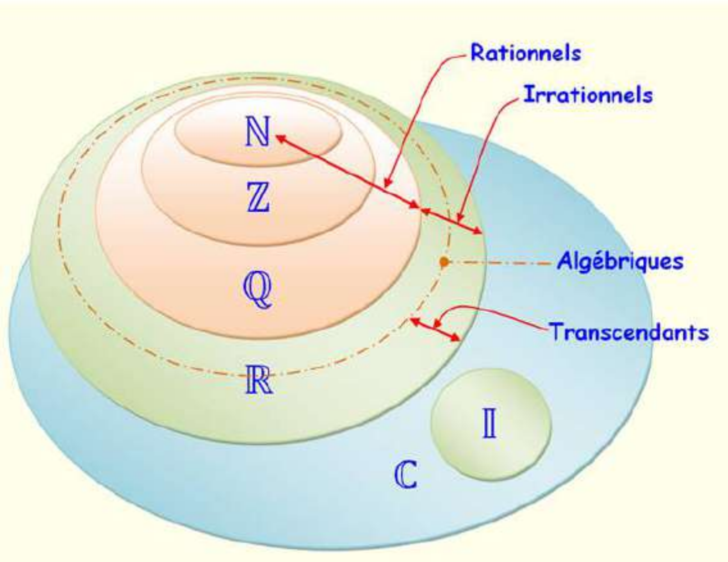
- CM de Septembre
  - DATES : 5, 6, 12, 13, 19, 20, 26, 27
- CC1 à faire en TD la semaine du 23/09
- CM d'Octobre
  - DATES : 3, 4, 10, 11, 17, 18
- CC 2 à faire en TD (ou en Amphi ?) la semaine du 21/10
- CM de Novembre
  - DATES : 7, 8, 21, 22, 28, 29
- CC3 à faire en TD la semaine du 25 Novembre ou celle du 2 Décembre
- CM de Décembre
  - DATES : 5, 6, 12, 13
- Examens écrits (session 1) : 6 et 7 Janvier 2020
- Oraux : 8-9-10 Janvier 2020

Rappels, fondements, construction des nombres réels.

Nombres

Symbole	Appellation
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{D}$	ensemble des décimaux
$\mathbb{Q}$	ensemble des rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbb{C}$	ensemble des complexes

Nombres


Rationnels
Irrationnels
$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$
Algébriques
Transcendants
$\mathbb{R}$
$\mathbb{I}$
$\mathbb{C}$

Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\}$$

(On connait leur construction à partir des entiers)

Nombres rationnels

Soient a, b, c, d quatre entiers, avec b et d non nuls.

Les deux nombres rationnels représentés par a/b et c/d sont égaux si et seulement si $ad = bc$.

L'addition est donnée par :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

On démontre que cette égalité ne dépend pas du choix des représentants "a/b" et "c/d".

La multiplication par :

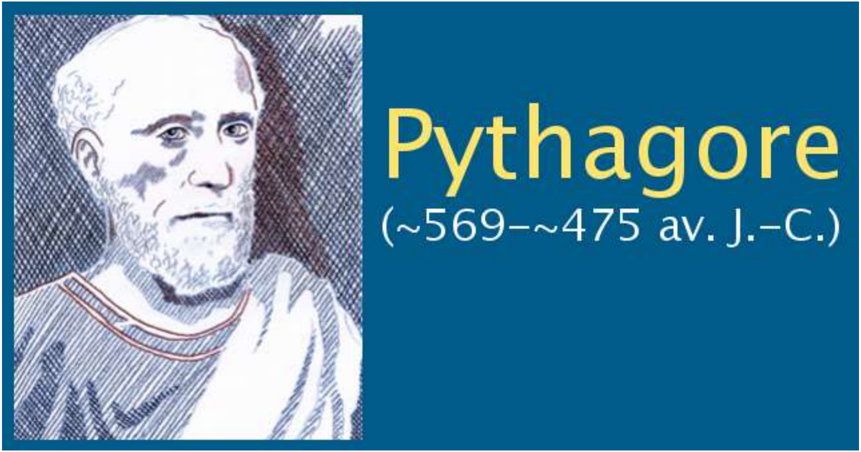
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

L'opposé et l'inverse par :

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \text{ si } a \neq 0.$$

On en déduit que le quotient est donné par :

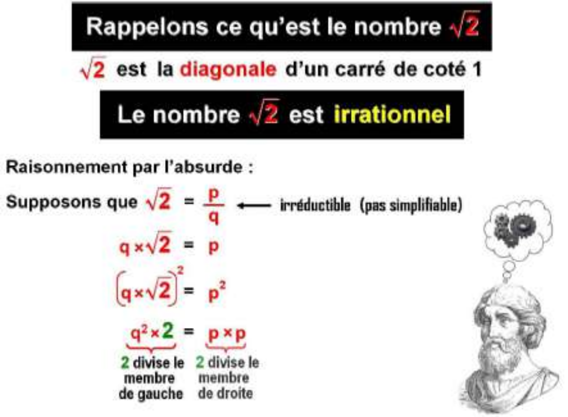
$$\left(\frac{a}{b}\right) / \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc}.$$



Les élèves de Pythagore croyaient que tout pouvait se mesurer avec des nombres rationnels.

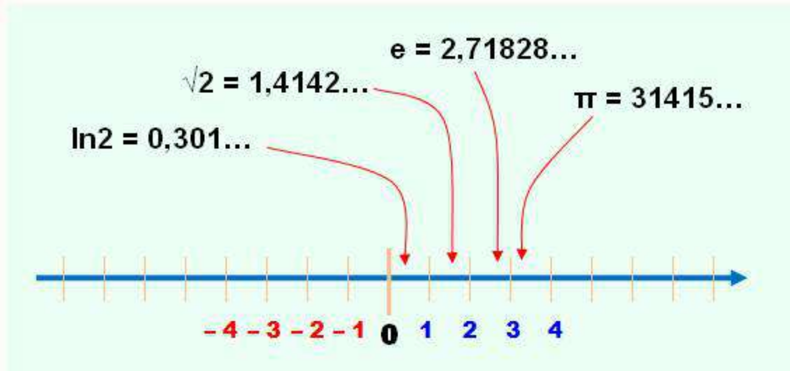
Mais le problème arriva avec la diagonale d'un carré, qui mesure $\sqrt{2}$ si le coté est 1.

Irrationalité de $\sqrt{2}$



1. Depuis Euclide on sait qu'on a unicité de factorisation en nombres premiers.
2. On voit que 2 divise p ; donc 4 divise $p \times p$ à droite de la dernière égalité ; On simplifie un 2, donc 2 divise q.
3. C'est absurde car la fraction p/q est supposée non simplifiable.

La droite rationnelle a des “*trous*” non rationnels



Pourquoi des nombres de plus en plus compliqués ?

1. $\mathbb{N}$ est suffisant ? Pourquoi construire $\mathbb{Z}$?

   Car l'équation $x = 2 - 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

2. $\mathbb{Z}$ est suffisant ? Pourquoi construire $\mathbb{Q}$?

   Car l'équation $x = 2 : 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

3. $\mathbb{Q}$ est suffisant ? Pourquoi construire $\mathbb{R}$?

   Car l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Mais aussi car plusieurs constructions font intervenir des processus ou algorithmes qui sont infini et des suites de nombres rationnels qui n'ont pas de limite dans $\mathbb{Q}$ (e.g. aire du cercle approximé par un polygone régulier ayant un nombre de plus en plus grand de cotés).

L'importance des suites.

Les suites jouent un rôle centrale en analyse mathématique :

1. Une suite peut servir pour calculer, ou plutôt approcher indéfiniment, un nombre complique (e.g. aire du cercle calculée comme limite d'aires).

2. La *Topologie* est la science qui décrit la forme élémentaire des objets. Une des notions clé pour bâtir cette théorie est celle de pouvoir approcher un point. Cela se fait avec des suites (on verra quelque notion plus loin).

3. La notion de suite est utilisée pour exprimer la continuité des fonctions (voir plus loin aussi).

Les nombres réels

1870 par Cantor, Meray, Dedekind,...

Propriétés

Pour définir $\mathbb{R}$ on peut le faire de plusieurs manières. Notamment, on a les approches suivants :

1. Axiomatique, où l'on montre que $\mathbb{R}$ est l'unique objet satisfaisant certaines propriétés (axiomes) ;
2. Définition de $\mathbb{R}$ à l'aide des *sections* des nombres rationnels ;
3. Construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, avec des suites de Cauchy.

On ne montrera aucune de ces construction, mais on va énoncer les axiomes du point 1 qui caractérisent $\mathbb{R}$.

Axiomes des nombres réels

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :
deux applications $(x, y) \to x + y$ et $(x, y) \to xy$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
une relation $x \leq y$ (écrite aussi $y \geq x$) entre les éléments de $\mathbb{R}$, satisfaisant aux quatre groupes d'axiomes suivant :

1. $\mathbb{R}$ **est un CORPS COMMUTATIF** en d'autres termes :
$x + (y + z) = (x + y) + z$, l'addition est associative ;
$x + y = y + x$, l'addition est commutative ;
il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $0 + x = x$;
pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$, tel que $x + (-x) = 0$;
$x(yz) = (xy)z$;
$xy = yx$;
il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $1x = x$;
pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tel que $xx^{-1} = 1$;
$x(y + z) = xy + xz$.

2. $\mathbb{R}$ est un corps TOTALEMENT ORDONNE Ceci signifie que les axiomes suivants sont satisfaits :
$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$;
"$x \leq y$ et $y \leq x$" est équivalent à $x = y$;
pour deux éléments quelconques x, y de $\mathbb{R}$, ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$;
$x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$;
$0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

3. $\mathbb{R}$ est un CORPS COMMUTATIF **archimédien,** ce qui signifie qu'il satisfait à l'axiome d'Archimède : pour tout couple (x, y) de nombres réels, tels que $0 < x$, $0 \leq y$, il existe un entier n tel que $y \leq nx$.

Le quatrième axiome peut prendre différentes formes. Par exemple :

4. $\mathbb{R}$ satisfait à l'axiome des intervalles emboîtés : étant donnée une suite $([a_n, b_n])$ d'intervalles fermés tels que $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ pour tout n, alors l'intersection de cette suite n'est pas vide.

Dans le cours nous adopterons la forme suivante (qui donne une définition de $\mathbb{R}$ équivalente) :

4. Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante majorée est convergente.

Definition (Intervalle)

Dans le point 4, étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, on définit les intervalles $[a, b]$ comme les ensembles des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq x \leq b$.

On définit de même les intervalles $]a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b[$ par les conditions $a < x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$ respectivement.

Theorem

Deux ensembles avec les propriétés $1, 2, 3, 4$ *sont forcement "isomorphes" par un isomorphisme unique.*

Cela signifie qu'il existe une bijection entre les deux ensembles "qui préserve" toutes ces propriétés.

Autrement dit il n'y a qu'un seul
corps commutatif, totalement ordonné, archimédien et complet.
Ce corps est ce qu'on appelle $\mathbb{R}$.

Quelques propriété de $\mathbb{R}$.

Valeur absolu

À l'aide des propriétés 1, 2 et 3, on peut définir

- les **nombres positifs** comme les $x \in \mathbb{R}$ t.q. $x \geq 0$;
- la **valeur absolue** d'un nombre x comme

$$|x| := \begin{cases} x & \textbf{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \textbf{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Exercice

Démontrer à partir des axiomes que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la valeur absolue vérifie :

$$|x + y| \leq |x| + |y| , \tag{2}$$

et

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| . \tag{3}$$

Avec la notion de valeur absolu, on peut parler de convergence d'une suite.

Suites réelles convergentes (rappel)

On dit qu'une suite réelle admet pour limite un réel ℓ si :

> tout intervalle ouvert qui contient ℓ contient aussi tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux (i.e. contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang).

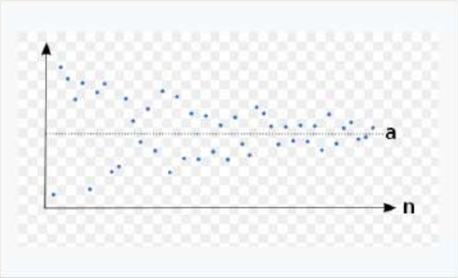
On dit également qu'elle converge vers ℓ. Si une suite possède une limite réelle, on dit qu'elle est **convergente**[1] ou qu'elle converge.

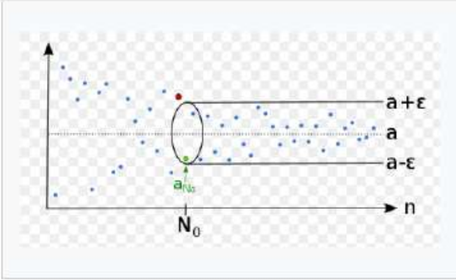
La définition précédente se traduit formellement par :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

On écrit alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou plus simplement, quand il n'y a pas ambiguïté, $\lim u = \ell$, ou encore $u \to \ell$.



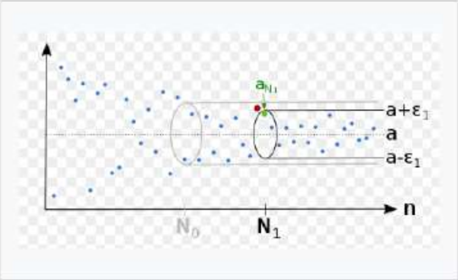


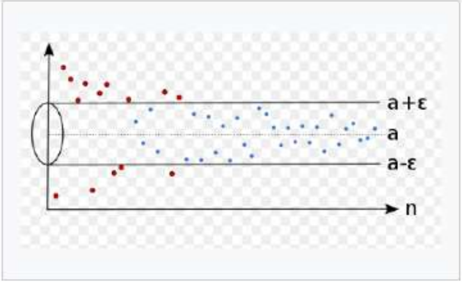
Exemple de **suite** qui converge vers la limite a

.

Peu importe lequel $\varepsilon > 0$ nous avons, il y a un index N_0, de sorte que la **suite** se trouve ensuite complètement dans le tube epsilon $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Suites réelles convergentes (rappel)





Il y a aussi pour un plus petit $\epsilon_1 > 0$ Un index N_1, de sorte que la **suite** est ensuite dans le tube epsilon $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ il n'y a que peu de membres de **la suite** en dehors du tube epsilon.

Densité des nombres rationnels

Le lemme suivant exprime le fait que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

[R] **Lemme 1.** *Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.*

Démonstration : Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q(y-x) > 1$. Soit $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{q} \leqslant x\}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien et $\frac{1}{q} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n_0}{q} \geqslant |x|$, par conséquent l'ensemble E n'est pas vide car il contient $-n_0$ et il est majoré par n_0 ; il possède donc un plus grand élément p qui vérifie

$$\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}.$$

Posons $r = \frac{p+1}{q}$, alors $x < r \leqslant x + \frac{1}{q} < y$ par définition de q. $\square$

Lemme 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite de rationnels croissante $(a_n)_n$ convergeant vers x et une suite de rationnels décroissante $(b_n)_n$ convergeant vers x.

Preuve : Si x est rationnel il suffit de prendre la suite constante égale à x. Supposons x irrationnel. Par le Lemme 1, pour tout naturel $n > 0$ on peut trouver des rationnels a_n et b_n tels que

$$x - \frac{1}{n} < a_n < x - \frac{1}{n+1} < x < x + \frac{1}{n+1} < b_n < x + \frac{1}{n} .$$

En particulier, pour tout n on a $a_n < a_{n+1}$ et $b_{n+1} < b_n$.
Maintenant, pour tout n on a $|x - a_n| < \frac{1}{n}$ et $|x - b_n| < \frac{1}{n}$. Donc

$$\lim_n a_n = x = \lim_n b_n.$$

CQFD

Completude

Le 4ème point de la caractérisation axiomatique de $\mathbb{R}$ (la complétude) est aussi équivalent à l'assertion suivante :

Toute suite de Cauchy converge.

C'est cette dernière qui est le plus souvent utilisé comme axiome pour les raisons suivantes :

- La notion de suite de Cauchy n'a besoin que de la notion de distance et a un sens dans les *espaces métriques* (ou pour les espaces uniformes), c'est à dire les espaces qui sont muni d'une distance.
- En particulier, la propriété d'être complet est indépendante de l'ordre.

Suites de Cauchy

Intuitivement on a les idées suivantes :

- Suite convergente vers ℓ :
  - Les termes de la suite approchent indéfiniment le point ℓ ;
- Suite de Cauchy :
  - Les termes de la suite s'approchent **entre eux** indéfiniment ;

Suites de Cauchy (rappel)

Une suite (r_n) de réels ou de complexes est dite **de Cauchy**, ou vérifie le **critère de Cauchy**, lorsque les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres en l'infini au sens où :

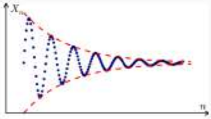
$$\lim_{p,q\to\infty} |r_p - r_q| = 0.$$

Cette dernière condition se réécrit classiquement à l'aide de quantificateurs universels et existentiels :

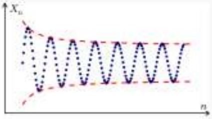
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \geq N \quad |r_p - r_q| < \varepsilon,$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 0 \quad |r_{n+k} - r_n| < \varepsilon.$$



Les points bleus représentent une suite de Cauchy : ses termes tendent à se rapprocher les uns des autres.



Ici, les points bleus ne représentent pas une suite de Cauchy : ses termes ne se rapprochent pas les uns des autres.

Proposition

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *et si la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, la suite* $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.
4. *Si les suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont de Cauchy, les suites* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont de Cauchy.*
5. *Si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* a *et si la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* b, *la suite* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $a+b$, *la suite* $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $a-b$ *et la suite* $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $a \times b$.
6. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy ne convergeant pas vers* 0, *alors il existe un entier* n_0 *tel que si* $n > n_0$ *on a* $x_n \neq 0$ *et la suite* $(\frac{1}{x_n})_{n>n_0}$ *est de Cauchy.*

La preuve est facile, mais un peu longue. Pour les intéressés, voir la Proposition 18 de la page suivante (cliquer)
`https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ax/index.html`

Certaines propriétés de $\mathbb{R}$

Pour conclure, montrons que les propriétés données dans le point 4 de complétude sont équivalentes :

1. Toute suite emboité d'intervalles fermés bornés a une intersection non vide ;
2. Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$;
3. Toute suite croissante et bornée converge dans $\mathbb{R}$.

La preuve aura la structure suivante :

- La condition définissant une suite de Cauchy peut s'exprimer à l'aide de intervalles emboités. **Donc** $(1) \Rightarrow (2)$**.**
- Les suites croissantes et bornées sont de Cauchy. **Donc** $(2) \Rightarrow (3)$ **;**
- Les extrêmes d'une suite emboité d'intervalles forment une suite croissante bornée. **Donc** $(3) \Rightarrow (1)$**.**

Preuve : (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que (1) soit vraie : toute suite emboité d'intervalles fermés a une intersection non vide. On veut montrer que toute suite de Cauchy a une limite.

- Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $N_n \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $p, q \geq N_n$ on a
$$|x_p - x_q| < 1/n\,.$$
Regardons ce que cela signifie.
- Si $n = 1$, cela dit que si $p_1 \geq N_1$, alors pour tout $q \geq N_1$ on a
$$x_q \in I_1 := [x_{p_1} - 1, x_{p_1} + 1].$$
- Si $n = 2$ et $p_2 \geq N_2$, alors pour tout $q \geq N_2$ on a
$$x_q \in [x_{p_2} - 1/2, x_{p_2} + 1/2].$$
- Maintenant, regardons l'intersection de ces deux intervalles. Si l'on choisit $p_2 \geq \max(N_1, N_2)$, alors pour tout $q \geq \max(N_1, N_2)$ on a
$$x_q \in I_2 := [x_{p_2} - 1/2, x_{p_2} + 1/2] \cap [x_{p_1} - 1, x_{p_1} + 1].$$
- On a $I_2 \subseteq I_1$;

- On voit par induction que si $p_n \geq M_n := \max(N_1, \ldots, N_n)$, alors pour tout $q \geq M_n$ on a

$$x_q \in I_n := \bigcap_{k=1}^{n} [x_{p_k} - \frac{1}{k}, x_{p_k} + \frac{1}{k}] \,.$$

- Par construction on a $I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1$;
- Par la condition (1), la suite emboité d'intervalles I_n a intersection non vide ;
- De plus la taille de I_n est par construction $\leq 1/n$;
- L'intersection est alors un point $x \in \mathbb{R}$.
- On voit par construction que la distance $|x_n - x|$ tends vers zéro et $x = \lim_n x_n$.
- Cela prouve que (1) entraine (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons que toute suite de Cauchy converge et montrons que toute suite croissante et bornée converge.

- Soit $(x_n)_n$ une suite croissante bornée.
- J'affirme que $(x_n)_n$ est de Cauchy.
- En effet si $(x_n)_n$ n'est pas de Cauchy, alors on peut trouver un $r > 0$ t.q. quel que soit $N > 0$ on aura toujours deux indices $p \geq q \geq N$ avec $|x_p - x_q| \geq r$.
- On peut donc trouver une infinité de p, q avec cette propriété. Soit $(p_n, q_n)_n$ une suite d'indices t.q. pour tout n on a
  1. $q_n \leq p_n$
  2. $|x_{p_n} - x_{q_n}| \geq r$
  3. $p_n \leq q_{n+1}$ (pour ça il suffit de prendre $N > p_n$).
- Comme $(x_n)_n$ est croissante, alors $x_{p_n} \geq x_{q_n}$ et
$$|x_{p_n} - x_{q_n}| = x_{p_n} - x_{q_n} \geq r \, .$$
- Donc $x_{p_n} \geq x_{q_n} + r$ et comme $p_n \leq q_{n+1}$ cela entraine que la suite $(x_n)_n$ **tends vers l'infini.**
- Cela est absurde car on a supposé la suite bornée.
- Donc $(x_n)_n$ est de Cauchy, et par hypothèse elle converge.
- Cela prouve que (2) entraine (3).

(3) $\Rightarrow$ (1) : Supposons que toute suite croissante et bornée converge et montrons que toute suite emboité d'intervalles fermés et bornés est non vide.

- Soit $I_n := [a_n, b_n]$ une suite emboité d'intervalles fermés et bornés

$$\cdots I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1 \ .$$

- Alors la suite $(a_n)_n$ est croissante et bornée par n'importe quel b_m.
- Elle converge par hypothèse. Soit a son limite.
- On a pour tout n l'inégalité

$$a_n \leq a \leq b_n$$

- Donc $a \in I_n$ pour tout n.
- Donc $a \in \cap_n I_n$ et l'intersection est non vide.
- Cela prouve que (3) entraine (1).CQFD

Théorème des gendarmes

Le *théorème des gendarmes* fait un lien entre la notion de convergence d'une suite et la notion d'ordre dans $\mathbb{R}$.

Theorem

Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ trois suites de nombres réels telles que

1. *à partir d'un certain rang N on a pour tout $n \geq N$ l'inégalité $a_n \leq b_n \leq c_n$;*
2. *$(a_n)_n$ et $(c_n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ et $\lim_n a_n = \lim_n c_n$.*

Alors $(b_n)_n$ converge aussi et $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \lim_n c_n$.

Preuve Soit $\ell := \lim_n a_n = \lim_n c_n$. Pour tout $r > 0$ soit $I_r :=]\ell - r, \ell + r[$.
Par définition de limite, pour tout $r > 0$ on peut trouver un cran N_r tel que pour tout $n \geq N_r$ on a $a_n, c_n \in I_r$.
Donc $b_n \in I_r$ aussi.
On a montré que pour tout r il existe $N_r \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_r$ on a $b_n \in I_r$. Cela signifie exactement $\lim_n b_n = \ell$. **CQFD**

Nombres décimaux, développement décimal des nombres réels.

Parie entière d'un nombre

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un plus grand entier $E(x) \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$E(x) \leq x \ .$$

- Cet entier s'appelle la partie entière de x. Par définition on a l'encadrement

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \ .$$

La partie entière est utile pour approcher les nombres réels :

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 \leq x - E(x) < 1$, et pour tout entier n

$$0 \leq x - \frac{E(10^n \cdot x)}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

Preuve. Le fait que $0 \leq x - E(x) < 1$ est clair. De la on déduit que $0 \leq 10^n x - E(10^n x) < 1$, ce qui permet de conclure. **CQFD**

Example

Dans cet exemple on considère le nombre rationnel

$$x = 23,45678375319 = \frac{2345678375319}{10^{11}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} 10^5 \cdot x &= 2345678,375319 \\ E(10^5 \cdot x) &= 2345678 \\ \frac{E(10^5 \cdot x)}{10^5} &= 23,45678 \\ x - \frac{E(10^5 \cdot x)}{10^5} &= 0,00000375319 < 0,00001 = \frac{1}{10^5} \end{aligned}$$

L'opération

$$x \mapsto \frac{E(10^k \cdot x)}{10^k}$$

permet de sélectionner les premières k-chiffres après la virgule.

On souhaite montrer que tout nombre réel admet un développement décimal.

Nombre décimaux

Définition

Un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est décimal s'il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ et un naturel $n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$x = \frac{p}{10^n} .$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

- Par définition $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q}$;
- $\mathbb{D}$ n'est pas un corps.
  Par exemple $3 \in \mathbb{D}$, mais $1/3 \notin \mathbb{D}$.
  En effet, si par l'absurde $1/3 = p/10^n$, alors $10^n = 3p$.
  C'est une égalité de nombres naturels, mais c'est absurde car 3 ne divise pas 10^n.

Remarque

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre $E(10^n x)/10^n$ est **décimale** ;
- Le nombre $x \in \mathbb{R}$ est décimal si, et seulement si, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ t.q.
$$x - \frac{E(10^n x)}{10^n} = 0 \ .$$
autrement dit, le processus précédent donne une approximation exacte.

Densité des nombres décimaux

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $x < y$,on peut trouver un nombre décimal $d \in \mathbb{D}$ t.q.

$$x < d < y.$$

Preuve

- Soit $r = |x - y|$et $u := \frac{y-x}{2}$.
- Choisissons n tel que $10^{-n} < r/2$,
- Alors $|u - E(10^n u)/10^n| < 1/10^n < r/2 = |u - x| = |u - y|$,
- Donc le nombre décimal $d := E(10^n u)/10^n$ appartient à l'intervalle $]u - \frac{r}{2}, u + \frac{r}{2}[=]x, y[$.

CQFD

Suites adjacentes

On va maintenant introduire une notion qui est souvent utilisé pour encadrer un nombre réel par des nombres rationnels.

Définition

Deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont **adjacentes** si

1. $(a_n)_n$ est croissante (i.e. pour tout n on a $a_n \leq a_{n+1}$) ;
2. $(b_n)_n$ est décroissante ;
3. $\lim_n |a_n - b_n| = 0$. (avec (1) et (2) cela entraîne $a_n \leq b_n$, $\forall n$).

Théorème

Deux suites adjacentes convergent toujours, et ont la même limite.

Preuve La suite a_n est croissante et bornée par n'importe quel b_n, elle est donc convergente car $\mathbb{R}$ est complet (axiome 4 des nombres réels). Même chose pour b_n.Comme $\lim_n |a_n - b_n| = 0$ on doit avoir $\lim_n a_n = \lim_n b_n$. **CQFD**

Nous avons vu au début que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \quad x - \tfrac{E(10^n \cdot x)}{10^n} \quad < \frac{1}{10^n}$$

Autrement dit

$$\frac{E(10^n \cdot x)}{10^n} \leq \quad x \quad < \frac{E(10^n \cdot x)}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

Valeurs décimales approchées

Définition 3.7 *Soit $x \in \mathbb{R}$ et n un entier naturel. Les nombres décimaux*

$$a_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$$

sont appelés ***valeurs décimales*** *approchées de x à 10^{-n} près, respectivement par défaut et par excès.*

On a en effet les inégalités $10^n x - 1 < \mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^n x$, n étant un entier naturel quelconque. On en déduit

$$x - 10^{-n} < a_n \leqslant x \quad \text{et} \quad x < b_n \leqslant x + 10^{-n}$$

D'où les expressions de valeur décimale par défaut et par excès de x à 10^{-n} près.

Proposition 3.5 *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et l'on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant x < b_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$$

Preuve Le signe de $a_{n+1} - a_n$ est celui de $\mathrm{E}(10^{n+1}x) - 10\mathrm{E}(10^n x)$. Or

$$\mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^n x \Rightarrow 10\mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^{n+1} x \Rightarrow 10\mathrm{E}(10^n x) \leqslant \mathrm{E}\left(10^{n+1} x\right)$$

La suite (a_n) est bien une suite de décimaux croissante. On démontrerait de même que (b_n) est une suite de décimaux décroissante et comme $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$, les deux suites sont adjacentes. D'après les inégalités

$$x - 10^{-n} < a_n \leqslant x \quad \text{et} \quad x < b_n \leqslant x + 10^{-n}$$

elles convergent vers le réel x. □

Développement décimale propre

Lemme 3.1 *Si $x \in \mathbb{R}$, alors la suite (x_n) définie par $x_0 = E(x)$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = E(10^n x) - 10E\left(10^{n-1}x\right)$$

est telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant x_n \leqslant 9 \quad \text{et} \quad a_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k 10^{-k}$$

De plus, la suite (x_n) ainsi construite a une infinité de termes différents de 9.

Exemple

Regardons dans l'exemple précédent où $x = 23,45678375319$ ce que cela signifie. On a

$$\begin{aligned}
x_1 &= E(10x) - 10E(x) \\
&= 234 - 10 \cdot 23 \\
&= 234 - 230 = \mathbf{4} \\
x_2 &= E(10^2 x) - 10E(10x) \\
&= 2345 - 2340 = \mathbf{5} \\
x_3 &= E(10^3 x) - 10E(10^2 x) \\
&= 23456 - 23450 = \mathbf{6} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Rappel : une somme géométrique

Pour la prochaine preuve nous aurons besoin du fait remarquable suivant, qui est bien connu.

Lemme

Soit a un nombre réel et soient $0 \leq n \leq m$. Alors

$$\sum_{k=n}^{m} a^k = \frac{a^{m+1} - a^n}{a - 1}$$

Développement décimale propre

Preuve De

$$10^n x - 1 < \mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^n x \quad \text{et} \quad 10^{n-1}x - 1 < \mathrm{E}\left(10^{n-1}x\right) \leqslant 10^{n-1}x$$

on déduit, par combinaison de ces deux inégalités après avoir multiplié la seconde par 10, que $-1 < x_n < 10$. L'égalité $a_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k 10^{-k}$ se prouve sans difficulté par récurrence en observant que $a_{n+1} = a_n + x_{n+1}10^{-n-1}$.
Si l'on avait $x_n = 9$ à partir d'un certain rang N, on aurait

$$n \geqslant N \Rightarrow a_n - a_N = 9 \sum_{k=N+1}^{n} 10^{-k} = 10^{-N} - 10^{-n}$$

Le nombre $a_n + 10^{-n}$ serait indépendant de n pour $n \geqslant N$ (et vaudrait $a_N + 10^{-N}$).
Mais $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ et on a vu que $\lim_{n\to\infty} b_n = x$ et que $x < b_n$. La suite b_n ne peut donc pas être constante, et cela donne donc un absurde.

□

Développement décimale propre

Comme $(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, on a $x_0 + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k 10^{-k}\right) = x$, ce qu'on écrit :

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k}$$

Définition 3.8 *On dit que* $x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k}$ *est le* ***développement décimal propre*** *du réel* x.

Pour $x > 0$, on note usuellement ce développement :

$$x = x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$$

Remarquons que cette dernière écriture est fausse pour $x < 0$.
Ainsi, pour $x = -\frac{127}{100}$, on trouve $x_0 = -2$, $x_1 = 7$, $x_2 = 3$ et $x_n = 0$ pour $n \geqslant 3$. On n'a pas $x = -2,73$, mais $x = -2 + 0,73$. Cependant, $-x = \frac{127}{100} = 1,27$. On convient donc d'écrire pour $x < 0$:

$$x = -x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$$

où $x_0, x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ est le développemnt décimal propre du réel positif $-x$. On a donc dans ce cas : $x_n = \mathrm{E}(-10^n x) - 10\mathrm{E}(-10^{n-1} x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est clair qu'on peut se borner, sans nuire à la généralité, à l'étude des nombres **positifs**.

Hypothèse - Définition

On ne considère à partir de maintenant que des nombres réels positifs.
Pour tout réel $x \geq 0$ on note $Dev(x)$ son développement **propre**.
Si $x < 0$ on pose $Dev(x) := -Dev(|x|)$.

On a montré que tout réel $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ admet un développement décimal **propre** qui peut s'écrire

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$$

où $x_0 = E(x)$ et

$$x_k = E(10^k x) - 10 \cdot E(10^{k-1} x)$$

Le mot **propre** signifie qu'on a une infinité de chiffres x_k qui sont différentes de 9.

On souhaite montrer que le développement qu'on a trouvé peut être utilisé pour représenter **uniquement** tout nombre réel.

On verra dans le transparents suivants qu'il y a plus d'une écriture décimale pour un nombre réel, mais une seulement celle propre est **unique**.

Développement décimale IMPROPRE

Donnons nous un entier $x_0 \geq 0$ et une suite de nombres **quelconque** $(x_1, x_2, ...) \in \{0, 1, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$ compris entre 0 et 9. On peut former la série

$$x_0 + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{10^k} \;=\; x_0 + \lim_n (0, x_1 x_2 \cdots x_n) \;=\; \lim_n (x_0, x_1, x_2 \cdots x_n)$$

On voit que la suite $c_n := x_0, x_1 x_2 \ldots x_n$ est croissante, et que pour tout n on a

$$c_{n+1} - c_n \;<\; 10^{-n}.$$

Donc cette suite converge vers un nombre réel qu'on note

$$L(x_0, x_1, x_2, \ldots) = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$$

Attention :

Ici on peut avoir *toutes les chiffres* $x_k = 9$ à partir d'un certain cran. Si c'est le cas (i.e. si on a un cran N t.q. $x_k = 9$ pour tout $k \geq N$), alors ceci s'appelle un développement **impropre** de $x = L(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Definition

Étant donné un entier $x_0 \geq 0$ et une suite de nombres **quelconque** $x_1, x_2, \ldots$ compris entre 0 et 9, on peut former le réel $x = x_0, x_1 x_2 \cdots$.

1. Si une infinité de chiffres sont $\neq 9$ on appelle ça un développement **propre** de x ;
2. Si il existe un cran N après le quel $x_k = 9$ pour tout $k \geq N$ on appelle ça un développement **impropre** de x.

Développement décimale IMPROPRE

EXEMPLE

- Posons $a_n := 0,\underbrace{99\cdots 99}_{n\text{-fois}}$. Alors
$$\lim_n a_n = 1 \ .$$
- On a droit d'écrire $1 = (0,9999\dots) = L(0,9,9,9,\dots)$.
- On appelle $0,999999\dots$ un développement décimal **impropre** du nombre 1 car il y n'y a pas un nombre infini de chiffres différents de 9.
- Cet exemple montre que l'écriture décimale d'un nombre n'est pas unique.
- Toutefois, si l'on se borne à l'écriture décimale **propre**, on a l'unicité. C'est le contenu du théorème suivant.

Theorem

L'application

$$x \mapsto x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k}$$

avec $x_0 = E(x)$ *et, pour tout* $k \geq 1$, $x_k := E(10^k x) - 10 \cdot E(10^{k-1} x)$ *est une bijection de* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *sur l'ensemble des développements décimaux* ***propres*** *positifs.*

Preuve : On a vu qu'on a tout $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on peut associer un développement **propre**

$$Dev(x) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k},$$

où $x_0 = E(x)$ et $x_k := E(10^k x) - 10E(10^{k-1} x)$.
Réciproquement, on a vu qu'un développement décimal $x_0, x_1 x_2 \cdots$ (propre ou impropre) définit un nombre réel

$$L(x_0, x_1, x_2 \cdots) := \lim_n (x_0, x_1 x_2 \cdots x_n).$$

Notons par (Dev-prop) le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$ formé par les vecteurs infinis $(x_0, x_1, x_2 \ldots)$, $x_0 \in \mathbb{N}$, $x_k \in \{0, \ldots, 9\}$, $k \geq 1$, qui ont une **infinité de chiffres x_k différents de** 9.
On a donc deux fonctions

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "Dev"] & (\mathrm{Dev\text{-}prop}) \arrow[l, bend left, "L"] \end{tikzcd}$$

On doit montrer que $Dev \circ L$ est l'identité de (Dev-prop) et que $L \circ Dev$ est l'identité de $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

- On a démontré que si $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, alors $x = \lim_n (x_0, x_1 x_2 \ldots x_n)$.Donc $L \circ Dev$ est l'identité de $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Partons maintenant d'un développement **propre** $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in (\mathrm{Dev\text{-}prop})$, et posons $x := L(x_0, x_1, x_2, \ldots) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k}$.
- On doit montrer que $x_0 = E(x)$ et que, pour tout $k \geq 1$, on a $x_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1} x)$.
  Nous avons besoin du Lemme suivant.

Lemme

Si $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in (\text{Dev-prop})$ est un développement décimal **propre**, alors pour tout $n \geq 1$ on a l'inégalité stricte

$$\left(\frac{x_n}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots\right) < \frac{1}{10^{n-1}}$$

Preuve du Lemme.

- Comme le développement est propre, pour tout n on peut trouver $i \geq n$ tel que $x_i < 9$.
- Soit $m > i \geq n$.
- Chaque x_k étant inférieur à 9, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{x_m}{10^m} &\leq \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{9}{10^m} \\
&= 9 \cdot \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{10^k} = 9 \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{m+1} - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{1}{10} - 1} \\
&= \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^m}
\end{aligned}$$

Au fait, comme $x_i \leq 8$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{10^n} + \cdots + \frac{x_i}{10^i} + \cdots + \frac{x_m}{10^m} &\leq \frac{x_n}{10^n} + \cdots + \frac{(x_i+1)-1}{10^i} + \cdots + \frac{x_m}{10^m} \\
&= (\frac{x_n}{10^n} + \cdots + \frac{(x_i+1)}{10^i} + \cdots + \frac{x_m}{10^m}) \\
&\quad - \frac{1}{10^i} \\
&\leq (\frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^m}) - \frac{1}{10^i}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\frac{x_n}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots) &= \lim_{m\to\infty}(\frac{x_n}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{x_m}{10^m}) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^i} \\
&= \frac{1}{10^{n-1}} - \frac{1}{10^i} < \frac{1}{10^{n-1}}
\end{aligned}$$

CQFD

Fin de la preuve du théorème

Reprenons les notations de la preuve.

- Partons maintenant d'un développement **propre** $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in (\text{Dev-prop})$, et posons $x := L(x_0, x_1, x_2, \dots) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$.
- On doit montrer que $x_0 = E(x)$ et que, pour tout $k \geq 1$, on a $x_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$.
- Le lemme garantit que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k} < 1$,donc

$$E(x) = E(x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}) = x_0.$$

- D'autre part, pour $k \geq 1$ on a $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$. Donc $10^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k} < 1$. Par conséquence

$$\begin{aligned} E(10^n x) &= E(\underbrace{10^n x_0 + 10^{n-1} x_1 + \cdots + x_n}_{entier} + \underbrace{\frac{x_{n+1}}{10} + \cdots}_{<1}) \\ &= 10^n x_0 + 10^{n-1} x_1 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

De même, grâce au lemme, on trouve

$$10 \cdot E(10^{n-1}x) = 10^n x_0 + 10^{n-1} x_1 + \cdots + 10 x_{n-1}$$

Par conséquence

$$E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x) = x_n \ .$$

Donc $Dev \circ L$ est l'identité de (Dev-prop). **CQFD**

Caractérisation des nombres rationnels

Théorème 3.9 *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le cas $x \in \mathbb{Z}$ étant écarté, en retranchant $\mathrm{E}(x)$ on peut se ramener à $x \in]0, 1[$, puisque

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad 0 < x - E(x) < 1$$

Soit alors $x = 0, x_1 x_2 ... x_n ...$ (développement décimal propre).
Si à partir d'un certain rang r, la suite (x_n) est périodique de période p, c'est-à-dire si l'on a $x_{k+r+p} = x_{k+r}$ pour tout entier naturel k, on peut écrire

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_{r-1} \underbrace{x_r x_{r+1} \dots x_{r+p-1}} \underbrace{x_r x_{r+1} \dots x_{r+p-1}} \dots$$

donc $10^{r-1} x = u + y$, où u est l'entier naturel dont l'écriture décimale est $x_1 x_2 \dots x_{r-1}$, et

$$y = 0, \underbrace{x_r x_{r+1} \dots x_{r+p-1}} \underbrace{x_r x_{r+1} \dots x_{r+p-1}} \dots.$$

Comme $10^p y = v + y$, où v s'écrit $x_r x_{r+1} \dots x_{r+p-1}$, on voit que $y = \frac{v}{10^p - 1}$ est rationnel et

$$x = \frac{u + y}{10^{r-1}} \in \mathbb{Q}$$

- Réciproquement, soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$, avec $0 < a < b$ et les entiers naturels a, b premiers entre eux. Son développement décimal $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ s'obtient de la façon suivante.
  x_1 est le quotient de la division euclidienne de $10a$ par b.

$$10a = bx_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < b$$

puis

$$10r_1 = bx_2 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < b$$

ce qui entraîne

$$100a = 10bx_1 + bx_2 + r_2$$

soit

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{r_2}{b.10^2}$$

Plus généralement, x_n est le quotient de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b, soit

$$10r_{n-1} = bx_n + r_n, \quad 0 \leqslant r_n < b$$

Dans cette division, le reste r_n ne peut prendre que les b valeurs 0, 1, ..., $b-1$.
Les $b+1$ restes $r_1, r_2, \ldots, r_{b+1}$ ne peuvent être tous distincts. Il existe deux entiers k et k' tels que $r_k = r_{k'}$ avec $1 \leqslant k < k' \leqslant b+1$.
En posant $k' = k + p$, avec $1 \leqslant p \leqslant b$, on a donc $r_k = r_{k+p}$.
Si pour un entier naturel n (tel que $n-1 \geqslant k$) on a $r_{n-1} = r_{n-1+p}$, alors, de

$$\begin{aligned} 10r_{n-1} &= bx_n + r_n \\ 10r_{n-1+p} &= bx_{n+p} + r_{n+p} \end{aligned}$$

on déduit, d'après l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne

$$x_n = x_{n+p} \ \text{ et } \ r_n = r_{n+p}$$

Ainsi à partir de l'entier $k+1$, on a par récurrence sur l'entier n

$$\forall n \geqslant k+1 \quad x_n = x_{n+p}$$

et la suite des décimales de x est périodique de période p à partir du rang $k+1$, c'est-à-dire

$$x = 0, x_1 x_2 \ldots x_k \underbrace{x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_{k+p}} \underbrace{x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_{k+p}} \cdots$$

$\square$

Dénombrabilité

Définition

Une **suite** à valeurs dans un ensemble A est une fonction

$$a : \mathbb{N} \to A.$$

On note souvent $a_n := a(n)$ et on note cette fonction sous forme vectorielle par $(a_n)_n$.

Définition

Un ensemble A est **dénombrable** si on peut trouver une suite $a : \mathbb{N} \to A$ qui recouvre A (i.e. la fonction a est surjective).

Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Proposition 3.6 *L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.*

Preuve. Il revient au même d'établir que $]0, 1[$ n'est pas dénombrable. Supposons le contraire ; on aurait alors $]0, 1[= \{x_1, ..., x_n, ...\}$. On définit le réel $a = 0, a_1 a_2 ... a_n ... \in]0, 1[$ de la manière suivante. On choisit la première décimale a_1 de a dans l'ensemble $\{1, ..., 8\}$ et distincte de la première décimale de x_1 ; on a donc $a \neq x_1$. On choisit ensuite a_2 distinct de la deuxième décimale de x_2 dans l'ensemble $\{1, ..., 8\}$ et donc $a \neq x_2$. En réitérant le procédé, on construit un nombre a dont toutes les décimales ne peuvent valoir 0 ou 9, donc appartenant à $]0, 1[$, et tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \neq x_n$$

D'où une contradiction. $\square$

Majorants, minorants, bornes et limites supérieures et inférieures,

Majorants et minorants d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors, un élément $x \in \mathbb{R}$ est

- un **majorant** de F s'il est supérieur ou égal à tous les éléments de F :
$$\forall y \in F, \quad x \geq y \,;$$
- un **minorant** de F s'il est inférieur ou égal à tous les éléments de F :
$$\forall y \in F, \quad x \leq y.$$
- Si F possède un majorant x alors on dit que F est une ***partie majorée***.
- Si F possède un minorant x alors on dit que F est une ***partie minorée***.

- On utilise aussi la terminologie **borné supérieurement** pour majoré,et **borné inférieurement** pour minoré.
- Si F est à la foi majoré ou minoré, on dit qu'il est **borné**.

Examples

- $[0, 1]$ est borné supérieurement et inférieurement ;
- Les sous-ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ne sont borné ni supérieurement ni inférieurement ;
- Les naturels $\mathbb{N}$ sont bornés inférieurement, mais pas supérieurement ;
- Si $(a_n)_n$ est une suite de nombres réels, alors l'ensemble de ses valeurs $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ peut être parfois bornée, parfois pas.

  Si c'est bornée, comme on le sais, on dit par abus de langage que *la suite* est bornée (bien que la suite soit une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ en réalité).

Bornes supérieures et inférieures

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- Si F n'est pas majoré, on dit que F n'a pas de borne supérieure ;
- Si F est majoré, on dit que un élément $x \in \mathbb{R}$ est la **borne supérieure** de F si x est le plus petit des majorants de F.
- Autrement dit,
  - pour tout $f \in F$ on a $f \leq x$ et
  - pour tout $y < x$ on peut trouver $f \in F$ t.q. $y < f$.
- On peut donner la définition analogue de **borne inférieure d'un ensemble minoré** E. C'est l'opposé de la borne supérieure de $-E$.
- On note $\sup(E)$ la borne-sup de E et $\inf(E)$ sa borne-inf quand ils existent.

Exemples

- $]-\infty, 0]$:
  - n'a pas de borne inférieure car il n'est pas minoré ;
  - sa borne supérieure est 0.

- $]0, 1[$:
  - sa borne supérieure est 1.
  - sa borne inférieure est 0.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - n'a pas de borne supérieure ;
  - sa borne inférieure est 0.

- On sait depuis le *L2* que la suite $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \geq 1}$
  - est strictement croissante et sa borne supérieure est le nombre de Neper e ;
  - sa borne inférieure est 2.

Parfois, pour la commodité, on dit que si A est non majoré, alors

$$\sup(A) = +\infty$$

et de même que si A est non minoré, alors

$$\inf(A) = -\infty$$

On peut s'autoriser à travailler avec l'ensemble des **nombres réels étendus**

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

avec la convention que

1. $+\infty$ est plus grand de n'importe quel nombre ;
2. $-\infty$ est plus petit de n'importe quel nombre.

C'est commode dans les preuves, car de cette manière **tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ a une borne sup et une borne inf.** et on ne dois pas étudier plusieurs cas.
Mais il faut faire attention à spécifier toujours si l'on travaille avec $\mathbb{R}$ ou avec $\overline{\mathbb{R}}$.

Maximum et minimum

Soit F un sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors

- Un maximum pour F est un élément $x \in \mathbb{R}$ t.q.
  - $x \in F$;
  - x est une borne supérieure pour F.
- Un minimum pour F est un élément $x \in \mathbb{R}$ t.q.
  - $x \in F$;
  - x est une borne inférieure pour F.
- Autres terminologies
  - maximum = plus grand élément
  - minimum = plus petit élément
- On note $\max(F)$ le maximum de F et $\min(F)$ son minimum quand ils existent ;

Exemples

- $]-\infty, 0]$:
  - n'a pas de borne inférieure, ni minimum, car il n'est pas minoré ;
  - sa borne supérieure est 0, et c'est aussi son maximum.
- $]0, 1[$:
  - sa borne supérieure est 1.
  - sa borne inférieure est 0.
  - Il n'a ni minimum, ni maximum.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - n'a pas de borne supérieure, ni maximum ;
  - sa borne inférieure est 0, et c'est son minimum.

Théorème

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors

- Si A possède un **maximum**, alors le maximum est unique ;
- Si A possède un **minimum**, alors le minimum est unique.

La même chose est vraie pour la borne-sup et la borne-inf.

Quelques exemple

- Dans l'ensemble des nombres réels :
  - toute partie majorée non vide de l'ensemble des réels possède une borne supérieure ;
  - une partie non majorée (comme $\mathbb{Z}$) ne possède pas de borne supérieure ;
  - l'ensemble vide n'a pas de borne supérieure ni inférieure ;
  - l'intervalle $]0, 1[$ admet 0 comme borne inférieure et 1 comme borne supérieure ;
  - l'ensemble $\{(-1)^n+1/n \mid n = 1, 2, 3\ldots\}$ admet -1 comme borne inférieure et $3/2$ comme élément maximum (donc comme borne supérieure) ;
  - l'ensemble des rationnels dont le carré est inférieur à 2 admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure et $-\sqrt{2}$ comme borne inférieure ;
  - la borne supérieure de la somme $A + B$ de deux ensembles majorés non vides A et B est égale à la somme de leurs bornes supérieures respectives ;
  - les notions d'infimum et de supremum sont duales : $\inf(S) = -\sup(-S)$, où $-S = \{-s \mid s \in S\}$.

Exercice

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{Z}$, alors

- Si A est **majoré**, alors il a un maximum ;
- Si A est **minoré**, alors il a un minimum ;
- Si A est borné, alors in est **fini**.

Existence des borne supérieures et inférieures

Exercice

Déduire des axiomes de $\mathbb{R}$ les deux faits suivants :

- Toute suite croissante et majorée converge vers la borne supérieure de ses valeurs (en particulier la borne sup de ses valeurs existe).
- Toute suite décroissante et minorée converge vers la borne inférieure de ses valeurs (en particulier la borne sup de ses valeurs existe).

Théorème (Bolzano-Weierstrass 1ère forme)

Soit A un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$. Alors A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. De plus il existe une suite à valeurs dans A convergeant vers la borne supérieure $\sup(A)$.

Preuve.

- Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A et $x \in A$;
- Par définition, l'intervalle $I_0 = [x, M]$ intersecte A ;
- Posons $K = \frac{x+M}{2}$ le point au milieu de l'intervalle ;
- Notons $J_1 = [x, K]$ et $J_2 = [K, M_0]$, de sorte que
$$I_0 \; = \; J_1 \cup J_2 \; .$$
- Maintenant on fait un choix
  - Si K est un majorant pour A, alors on pose $I_1 := J_1$ et $M_1 := K$;
  - Si K n'est pas majorant de A, alors on pose $I_1 := J_2$ et $M_1 := M$.

Il est clair qu'on a les propriétés suivantes

1. $A \cap I_1 \neq \emptyset$;
2. M_1 est majorant de A ;
3. M_1 est le maximum de l'intervalle I_1 ;
4. $I_1 \subseteq I_0$;
5. la taille de I_1 est la moitié de la taille de I_0.

- Il est clair qu'on peut répéter ce procédé et trouver une suite d'intervalles emboités $\cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1 \subseteq I_0$ tels que pour tout n on a les propriétés suivantes
  1. $A \cap I_n \neq \emptyset$;
  2. Le maximum de l'intervalle I_n est un majorant de A ;
  3. la taille de I_n est la moitié de la taille de I_{n-1}.
- Grâce aux axiomes des nombres réels, la suite d'intervalles fermés emboités a une intersection $I = \cap_{n=0}^{\infty} I_n$ non vide ;
- Comme la taille de I_n tends vers zéro, alors I est un point $I = \{x\}$;
- J'affirme que x est l'extremum supérieur de A ;
- En effet, notons pour tout n : $I_n = [a_n, b_n]$, alors, la suite a_n est croissante avec x pour limite et la suite b_n est décroissante avec x pour limite.
- Par construction, pour tout n, b_n est un majorant de A, donc x l'est aussi.
- Par construction, pour tout n, A intersecte I_n,donc on peut trouver une suite d'éléments de A qui tends vers x par le théorème des gendarmes. Donc il n'y a pas de majorants de A strictement inférieurs à x. Donc x est l'extrémum supérieur de A. **CQFD**

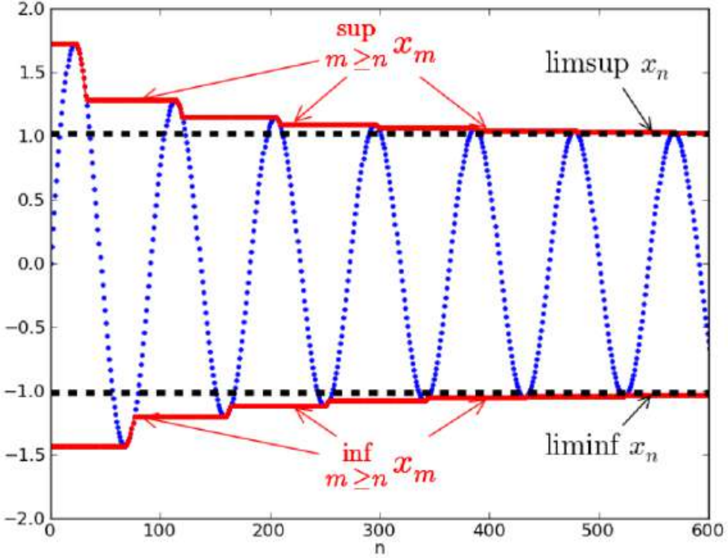
Limites supérieures et inférieures d’une suite de nombres réels

Limite supérieure et limite inférieure d'une suite

On va travailler maintenant avec $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. En particulier $\sup(A)$ et $\inf(A)$ existent pour tout sous-ensemble non vide A de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

- Pour tout n on peut considérer l'ensemble
$$E_n \;:=\; \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots\}\ .$$
- On pose
$$\begin{aligned} v_n &:= \sup(E_n) = \sup\{u_k, k \geq n\} \\ w_n &:= \inf(E_n) = \inf\{u_k, k \geq n\}\ . \end{aligned}$$
- La suite v_n est **décroissante** ;
- La suite w_n est **croissante** ;
- ces deux suites **CONVERGENT** dans $\overline{R}$.
- On pose
$$\limsup_n u_n \;:=\; \lim_n v_n\ , \qquad \liminf_n u_n \;:=\; \lim_n w_n\ .$$



$\sup_{m \geq n} x_m$
$\limsup x_n$
$\inf_{m \geq n} x_m$
$\liminf x_n$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
100
200
300
400
500
600
n

- Par construction on a l'encadrement

$$w_n \;\leq\; u_n \;\leq\; v_n$$

- Par conséquence, on a

$$\liminf_n a_n \;\leq\; \limsup_n a_n$$

Théorème

La suite $(u_n)_n$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n$. Dans ce cas on a

$$\liminf_n u_n \;=\; \lim_n u_n \;=\; \limsup_n u_n.$$

Preuve. Par le théorème des gendarmes, l'encadrement $w_n \leq u_n \leq v_n$ entraine, que si w_n et v_n ont même limite (c'est à dire si $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n$), alors u_n converge vers la même limite. Inversement, supposons maintenant que $u = \lim_n u_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $u \neq \pm\infty$, par définition de limite, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver N_ε t.q. pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a $|u - u_n| < \varepsilon$.

Donc, pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a aussi

$$|\sup(E_n) - u| \leq \varepsilon, \qquad |\inf(E_n) - u| \leq \varepsilon.$$

Cela entraine que $\liminf_n u_n = \lim_n \inf(E_n)$ et
$\limsup_n u_n = \lim_n \sup_n(E_n)$ convergent vers u.
Si $\lim_n u_n = \pm\infty$ la démonstration est analogue. **CQFD**

Remarque

- Si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors $\limsup_n u_n = +\infty$;
- Si $(u_n)_n$ n'est pas minorée, alors $\liminf_n u_n = -\infty$.

Le théorème précédent admet la variante suivante

Théorème

Si la suite $(u_n)_n$ est bornée, alors elle a une limite dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n$. Dans ce cas on a

$$\liminf_n u_n \ = \ \lim_n u_n \ = \ \limsup_n u_n.$$

Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Théorème

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble et soit soit M un **majorant** de A. Alors le assertions suivantes sont équivalentes :

1. $M = \sup(A)$;
2. Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.

Preuve.

- Si $M = \sup(A)$, par définition pour tout $M' < M$ on peut trouver $a \in A$ tel que $M' < a \leq M$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$. Donc $\lim_n a_n = M$.
- Réciproquement, s'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge à M, alors pour tout $r > 0$ on peut trouver un terme a_n de cette suite tel que $M - r < a_n \leq M$. Cela équivaut à ce que $M = \sup(M)$. **CQFD**

Le théorème de Bolzano-Weierstrass et ses conséquences.

Le théorème de Bolzano Weierstrass deuxième forme

On veut maintenant en démontrer le théorème suivant

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle bornée. Alors il existe une sous-suite de $(a_n)_n$ qui est convergente.

Proof

- On regarde l'ensemble $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ des valeurs de la suite.
- Soit N un minorant de A et M un majorant. Notons $I_0 := [N, M]$.
- Soit x_0 le point au milieu de I_0 et formons les intervalles $J_- := [N, x_0]$ et $J_+ := [x_0, M]$;
- Maintenant on fait un choix :
  - S'il existe une infinité d'indices n t.q. $a_n \in J_+$, on pose $I_1 := J_+$;
  - S'il existe une infinité d'indices n t.q. $a_n \in J_-$, on pose $I_1 := J_-$;
- Forcement un des deux cas arrive, et on a ainsi un deuxième intervalle I_1 contenant une infinité de termes de la suite.

- Par construction il existe une sous suite de $(a_n)_n$ contenue dans I_1 et l'on peut recommencer le processus pour la sous-suite et pour l'intervalle I_1 ;
- De cette manière on construit une suite d'intervalles $(I_n)_n$ t.q. pour tout n on a que
  1. I_n est contenu dans I_{n-1} et sa taille est la moitié de celle de I_{n-1} ;
  2. il existe une infinités d'indices k t.q. $a_k \in I_n$;
- Pour tout k, et tout nombre N, on peut trouver un indice $n_k > N$ t.q. $a_{n_k} \in I_k$;
- En particulier, en prenant par récurrence $N = n_{k-1}$, on peut supposer que $n_k > n_{k-1}$.
- On a donc une sous-suite $(a_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$ telle que pour tout k, $a_{n_k} \in I_k$.
- L'intersection des intervalles fermés emboités $\{I_n\}_n$ est non vide par complétude des nombres réels ;
- Comme la taille T_n de I_n est celle de I_0 divisée par 2^n : $T_n = T_0/2^n$, l'intersection $\cap_{n=0}^{\infty} I_n$ est réduite à un point x ;
- Maintenant $x = \lim_k a_{n_k}$, car pour tout k on a $x, a_{n_k} \in I_k$ et donc $|x - a_{n_k}| \leq T_n \leq T_0/2^n$.**CQFD**

Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(a_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(a_n)_n$ qui converge vers x.

Par exemple

- 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_n$;
- La suite $(1/n)_n$ admet seulement 0 comme valeur d'adhérence.
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme que toute suite bornée admet une **valeur d'adhérence**.

Remarque

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels. Soit $x \in \mathbb{R}$ un point. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une sous-suite de $(a_n)_n$ qui converge vers x ;
2. Pour tout $r > 0$, on a une infinité d'indices n t.q. $a_n \in]x - r, x + r[$;
3. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ il existe un entier $n \geq N$ tel que $|a_n - x| < \varepsilon$.

Preuve

(1) $\Longrightarrow$ (2) Ca suit de la définition de limite.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Il suffit de prendre $r = \varepsilon$.
(3) $\Longrightarrow$ (1) C'est encore la définition de limite. **CQFD**

Points d'accumulation et adhérence d'un ensemble

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un **point d'accumulation** de A si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
  - il existe une suite d'éléments de A <u>différents de x</u> qui converge à x ;
  - pour tout rayon $r > 0$ l'intervalle $]x - r, x + r[$ contient une <u>infinité</u> de points de A ;
  - pour tout rayon $r > 0$ l'intervalle $]x - r, x + r[$ contient au moins un point de A <u>différent</u> de x.
- On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un **point d'adhérence** de A si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
  - il existe une suite d'éléments de A qui converge à x ;
  - pour tout rayon $r > 0$ la boule $]x - r, x + r[$ contient au moins un point de A.
- En particulier si $x \in A$ alors x est un point d'adhérence de A (car limite de la suite constante $a_n = x$ pour tout n). Mais x n'est pas forcement un point d'accumulation.

Quelques exemple

Définition

- On note par
$$Acc(A)$$
l'ensemble des points d'accumulation de A.
- On note par
$$Ad(A)$$
l'ensemble des points d'**adhérence** de A.

Définitions

Les points de A qui ne sont pas d'accumulation sont appelés **points isolés**.
En effet les termes d'une suite d'éléments de A qui a un tel point x pour limite sont tous égales à x à partir d'un certain rang.

Des exemples

- Si $A =]0,1[\cup \{3\}$, alors
  - $Ad(A) = [0,1] \cup \{3\}$;
  - $Acc(A) = [0,1]$, et 3 est un point isolé.
- Si $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} = \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, alors
  - $Ad(A) = A \cup \{0\}$
  - $Acc(A) = \{0\}$, et tous les points de A sont isolés.
- Si $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{N}$, alors
  - $Ad(A) = A$
  - $Acc(A) = \emptyset$, et tous les points de A sont isolés.

Proposition

Soit A un ensemble, alors

$$Ad(A) \;=\; A \bigcup Acc(A).$$

En particulier, $A = Ad(A)$ si et seulement si $Acc(A) \subseteq A$.

Preuve

- Il est clair que $A \subseteq Ad(A)$ car si $a \in A$, alors une suite constante de valeur $a \in A$ converge vers a ;
- Par ailleurs il suit immédiatement de la définition que $Acc(A) \subseteq Ad(A)$;
- Donc $A \cup Acc(A) \subseteq Ad(A)$.
- Réciproquement, supposons que $x \in Ad(A)$ et montrons que x est soit en A soit dans $Acc(A)$.
- Par définition d'adhérence, on a une suite $(a_n)_n$ de points de A telle que $\lim_n a_n = x$.
- On a deux possibilités :
    - Soit $x \in A$, et alors il n'y a plus rien a démontrer.
    - Soit $x \notin A$. Dans ce cas, pour tout n on a $x \neq a_n$ car $a_n \in A$. Par définition, $x \in Acc(A)$. **CQFD**

Attention au piège

On a parlé de valeur d'adhérence d'une **suite** et de point d'adhérence d'un **ensemble**.

- Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels.
- Soit $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ l'ensemble de ses valeurs.

QUESTION

Est-ce que l'adhérence de A coïncide avec l'ensemble des points d'adhérence de la suite ?

Réponse : **NO !**

Par exemple :

1. Si x est d'adhérence pour la suite $(a_n)_n$, alors $x \in Ad(A)$.
2. Mais le contraire n'est pas vrai. Par exemple, prenons la suite $a_n = 1/n$, alors $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ et
   - $Ad(A) = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} = A \cup \{0\}$.
   - Mais l'unique point d'adhérence de la suite est $\{0\}$.

Proposition

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors $Ad(A)$ est l'ensemble des points d'adhérence des suites à valeurs dans A.

Autrement dit, les notions suivantes sont équivalentes

1. $x \in Ad(A)$;
2. il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim_n a_n = x$;
3. il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que x est un point d'adhérence de la suite ;
4. Pour tout $r > 0$ l'intervalle ouvert $I =]x - r, x + r[$ intersecte A.

Preuve

- Par définition $x \in Ad(A)$ si et seulement si on peut trouver une suite d'éléments dans A qui converge à x. Donc (1)$\Leftrightarrow$(2).
- En particulier cela entraine qu'il existe une suite ayant x comme point d'adhérence. Donc (2)$\Rightarrow$(3).

- Réciproquement, s'il existe une suite ayant x comme point d'adhérence, alors, par définition de point d'adhérence d'une suite, on peut trouver uns sous suite convergente vers x. Donc (3)$\Rightarrow$(2).
- Maintenant, par définition de limite, les termes d'une suite qui converge vers x, à partir d'un certain rang, appartiennent tous à n'importe quel intervalle ouvert contenant x. Donc (2)$\Rightarrow$(4).
- Finalement, si (4) est vraie, alors pour tout entier $n \geq 0$ il existe $a_n \in A \cap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$. La suite a_n converge clairement vers x. Donc (4)$\Rightarrow$(2).

CQFD

Ouverts, fermés, clôture.

Ouverts et fermés (terminologie)

Définition

Un **ouvert** de $\mathbb{R}$ est par définition une réunion arbitraire d'intervalles ouverts.
Un **fermé** de $\mathbb{R}$ est par définition le complémentaire d'un ouvert.

Par définition l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont au même temps ouverts et fermés.

Proposition

- Une réunion arbitraire d'ouverts est ouverte.
- Une intersection arbitraire de fermés est fermée.

Preuve
La première assertion est évidente, la deuxième s'en déduit par passage au complémentaire. **CQFD**

ATTENTION : L'intersection de fermés peut être vide (rien à voir avec l'intersection d'intervalles emboités des axiomes de $\mathbb{R}$).

Ouverts

Proposition

Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est **ouvert** si, et seulement si, pour tout point $x \in U$ il existe un intervalle ouvert I_x tel que

$$x \in I_x \subseteq U .$$

Preuve.

- Si U est ouvert, il est par définition réunion d'intervalles ouverts. Donc x appartient a l'un d'entre eux.
- Supposons que tout point x admet un intervalle ouvert I_x tel que $x \in I_x \subseteq U$. Comme U est la réunion des ses points, on déduit de ces propriété que

  $$U = \bigcup_{x \in U}\{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} I_x \subseteq U .$$

  Donc U est la réunion des I_x. **CQFD**

Ouverts

- $]0,1[\cup]1/2,2[$ est un ouvert ;
- $[0,1[$ n'est pas ouvert, car 0 n'admet pas d'intervalles ouverts dans $[0,1[$ le contenant.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas ouverts dans $\mathbb{R}$.
- Le lieu $L := \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x > x^2\}$ de $\mathbb{R}$ est ouvert. En effet, si $x \in L$, une petite variation de x ne change pas l'inégalité. Donc pour tout x on peut trouver un intervalle I_x tel que $x \in I_x \subseteq L$.

  En réalité celle ci n'est pas une preuve. On verra une preuve de cela et d'autres faits qui repose sur la *continuité* de la fonction $x^2 - x$.

Fermés

Proposition

Soit F un ensemble. Les affirmations suivantes sont équivalentes

1. F est **fermé** ;
2. $Ad(F) = F$;
3. $Acc(F) \subseteq F$;
4. Si $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de F, alors $x \in F$;
5. Si un point est adhérent à F, alors il appartient à F ;
6. Si $x \in \mathbb{R}$ est un point tel que pour tout intervalle ouvert I contenant x, on a $I \cap F \neq \emptyset$, alors $x \in F$.

Preuve On a vu que chacune des propriétés (3), (4), (5), (6) équivaut à (2). Il suffit donc de démontrer que (1) équivaut à (2).

Fermeture et adhérence

- Supposons que F est fermé et démontrons que $F = Ad(F)$.
  - On sait que $F \subseteq Ad(F)$, donc il suffit de montrer que $x \notin F \ \Rightarrow \ x \notin Ad(F)$.
  - Si $x \notin F$, alors $x \in \mathbb{R} - F$ qui est un ouvert.
  - Par définition d'ouvert, on peut trouver un intervalle ouvert $B :=]x - r, x + r[$ tel que $B \subseteq \mathbb{R} - F$.
  - Donc $B \cap F = \emptyset$.
  - Cela montre que $x \notin Acc(F)$ n'est pas d'accumulation ;
  - Mais on a supposé $x \notin F$, donc $x \notin F \cup Acc(F) = Ad(F)$.
- Supposons maintenant que $F = Ad(F)$ et montrons que F est fermé.
  - Pour ce faire, on monter que $\mathbb{R} - F$ est ouvert.
  - Cela revient à montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - F$ on peut trouver un intervalle ouvert dans $\mathbb{R} - F$ contenant x.
  - Comme $F = Ad(F)$, alors $x \in \mathbb{R} - F$ n'est pas un point d'accumulation pour A.
  - Par définition d'accumulation, il en suit qu'il existe un intervalle I contenant x sans points de F. **CQFD**

On vient de voir qu'un ensemble F est fermé si, et seulement si, toutes les suites de points de F qui convergentes, **trouvent leur limite dans F.**

Les notions d'**ouvert** et de **fermé** sont la clé pour l'étude de la forme élémentaire des objets : une branche des mathématiques appelés TOPOLOGIE.

Définition

La *topologie* de $\mathbb{R}$ est la donnée de tous les ensembles **ouverts** de $\mathbb{R}$.

Propriété clé

- $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts
- La réunion (arbitraire) d'ouverts est un ouvert
- L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Définition alternative

La *topologie* de $\mathbb{R}$ est la donnée de tous les ensembles **fermés** de $\mathbb{R}$.

Propriété clé

- $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des fermés
- L'intersection (arbitraire) de fermés est un fermé
- La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Fermeture

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On a vu que

- l'intersection de fermés est fermée ;
- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont au même temps fermés et ouverts.
- Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors la famille des fermés contenant A est non vide car $\mathbb{R}$ contient A.

Définition

On appelle **fermeture** ou **clôture** de A dans $\mathbb{R}$ l'intersection de tous les fermés contenant A :

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subseteq C, C = \text{fermé}} C.$$

- $\overline{A}$ est un fermé car intersection de fermés ;
- $\overline{A}$ est donc le plus petit fermé contenant A.

Fermeture = Adhérence

Proposition

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ un point. Alors les notions suivantes sont équivalentes

1. x est un point d'adhérence pour A ;
2. x appartient au plus petit fermé contenant A ;
3. Pour tout ouvert U contenant x on a $U \cap A \neq \emptyset$.

En particulier l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A :

$$Ad(A) \;=\; \overline{A}\,.$$

Preuve.

- $(1) \Longrightarrow (2)$.
  - La condition (1) signifie qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A convergeant vers x.
  - On a vu que si F est un fermé contenant A, alors $Ad(F) = F$ et alors $x \in F$.
  - Donc x appartient à tous les fermés contenant A.

- $(2) \Longrightarrow (3)$.
  - Montrons plutôt que si (3) est faux alors (2) est faux.
  - Si (3) est faux, alors on peut trouver un ouvert U contenant x, mais ne contenant aucun point de A ;
  - Soit $F = \mathbb{R} - U$. Alors $A \subseteq F$ et $x \notin F$.
  - Autrement dit (3) est faux.
- $(3) \Longrightarrow (1)$.
  - (3) entraine que pour tout intervalle ouvert I_x contenant x on a $I_x \cap A \neq \emptyset$;
  - Cela est une des caractérisation des points d'adhérence.

CQFD

Notation

On a démontré que les notions de fermeture de A et d'adhérence de A coïncident.
À Partir de maintenant, on note $\overline{A}$ sans ambiguïté la fermeture et l'adhérence de A.

Intérieur

Intérieur

Définition

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, et soit $x \in E$. On dit que x est un point interne à E, si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- on peut trouver un intervalle $I =]x - r, x + r[$ tel que $I \subseteq E$;
- Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que
$$x \in U \subseteq E.$$

On appelle **intérieur de** E l'ensemble des points internes à E.On le note par $Int(E)$, $Int(E/\mathbb{R})$, ou par $\overset{\circ}{E}$.

Proposition

L'intérieur $Int(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E. Autrement dit, $Int(E)$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans E.

Preuve.

- Si U est un ouvert contenu dans E, alors par définition tout point de U est dans $Int(E)$. Donc $U \subseteq Int(E)$.
- Par ailleurs $Int(E)$ est un ouvert. En effet, par définition, tout point $x \in Int(E)$ est contenu dans un ouvert U_x contenu dans E, et par le point précédent $U_x \subseteq Int(E)$, et donc

$$Int(E) = \bigcup_{x \in Int(E)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in Int(E)} U_x \subseteq Int(E) .$$

CQFD

Exemples

- $Int(\emptyset) = \emptyset$ et $Int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
- Si $a < b$ on a $Int([a,b]) = Int([a,b[) = Int(]a,b[) =]a,b[$. En effet, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[a,b]$, alors U est une réunion d'intervalles ouverts, et chacun de ces intervalles ouverts est contenu dans $]a,b[$, donc leur réunion U est aussi contenue dans $]a,b[$.
- On a $Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$. En effet, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{Q}$, on doit forcement avoir $U = \emptyset$ car U est par définition une réunion d'intervalles ouverts, et $\mathbb{Q}$ ne contient aucun intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ est un sous-ensemble dénombrable, alors $Int(A) = \emptyset$. En effet, si par l'absurde $Int(A)$ est non vide, alors comme il est ouvert $Int(A)$ contient au moins un intervalle non vide qui est non dénombrable.
- Ainsi $Int(\mathbb{Z}) = Int(\mathbb{N}) = Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

- Soit $A := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ le sous-ensemble des nombres irrationnels. Il n'est pas dénombrable, mais $Int(A) = \emptyset$. En effet, si $Int(A)$ n'est pas vide, alors il contient un intervalle ouvert non vide. Mais tout intervalle ouvert non vide contient un nombre rationnel. Et donc A contiendrait un nombre rationnel ce qui contredit la définition de A.
- Soit $E =]-\infty, 0]$ et $F = [0, +\infty[$. Alors $Int(E) =]-\infty, 0[$ et $Int(F) =]0, +\infty[$. Donc

  $$Int(E) \cup Int(F) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

  D'autre part, $E \cup F = \mathbb{R}$ et $Int(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc

  $$Int(E \cup F) = \mathbb{R} \; .$$

  Donc $Int(E \cup F) \neq Int(E) \cup Int(F)$.

proposition

Soient E, F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors on a les propriétés suivantes

1. On a $Int(E) = E$ si, et seulement si, E est ouvert ;
2. Si $E \subseteq F$, alors $Int(E) \subseteq Int(F)$;
3. $Int(E \cup F) \supseteq Int(E) \cup Int(F)$;
4. $Int(E \cap F) = Int(E) \cap Int(F)$.

Preuve.

(1) Cela suit du fait que $Int(E)$ est le plus grand ouvert contenu dans E ;

(2) $Int(E)$ est un ouvert contenu dans E, donc $Int(E) \subseteq E \subseteq F$, par conséquence $Int(E)$ est contenu dans $Int(F)$ qui est le plus grand ouvert contenu dans F.

(3) $Int(E)$ est un ouvert contenu dans E, donc aussi dans $E \cup F$, donc $Int(E) \subseteq Int(E \cup F)$ qui est le plus grand ouvert contenu dans $E \cup F$. De même $Int(F) \subseteq Int(E \cup F)$, et cela prouve (3).

(4) L'ensemble $U := Int(E) \cap Int(F)$ est l'intersection de deux ouverts, et c'est donc un ouvert. Par ailleurs, $U \subseteq E \cap F$, et donc $U \subseteq Int(E \cap F)$. On a donc $Int(E) \cap Int(F) \subseteq Int(E \cap F)$. Démontrons l'inclusion opposée. $Int(E \cap F)$ est un ouvert contenu dans $E \cap F$. En particulier, il est contenu dans E, et par conséquence $Int(E \cap F) \subseteq Int(E)$. De manière analogue on montre que $Int(E \cap F) \subseteq Int(F)$, donc $Int(E \cap F) \subseteq Int(E) \cap Int(F)$.

CQFD

Intérieur et fermeture

Pour tout ensemble E notons $E^c = \mathbb{R} - E$ le complémentaire de E dans $\mathbb{R}$.

Proposition

Pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ on a

$$Int(E)^c = \overline{E^c} \quad \text{et} \quad Int(E^c) = (\overline{E})^c \, .$$

Preuve. Montrons d'abord que $Int(E)^c = \overline{E^c}$

- $\overline{E^c}$ est un fermé contenant E^c, donc son complémentaire $(\overline{E^c})^c$ est un ouvert contenu dans E.
- Donc $(\overline{E^c})^c \subseteq Int(E)$, ce qui entraine par passage aux complémentaires $Int(E)^c \subseteq ((\overline{E^c})^c)^c = \overline{E^c}$.
- D'autre part, $Int(E)$ est un ouvert contenu dans E et donc $Int(E)^c$ est un fermé contenant E^c.
- On a donc $\overline{E^c} \subseteq Int(E)^c$ car $\overline{E^c}$ est l'intersection de tous les fermés contenant E^c.

- L'assertion $Int(E^c) = (\overline{E})^c$ suit de celle qu'on vient de démontrer $Int(F)^c = \overline{F^c}$ en prenant $F = E^c$ et en passant aux complémentaires :

$$Int(F)^c = \overline{F^c} \Longrightarrow Int(F) = \overline{F^c}^c$$

et quand $F = E^c$, alors $F^c = E$ et on a

$$Int(F) = \overline{F^c}^c \Longrightarrow Int(E^c) = \overline{E}^c$$

CQFD

Frontière

Définition

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On appelle **frontière de** E l'ensemble

$$\partial E \ := \ \overline{E} - Int(E)$$

Il suit de la définition et de la proposition précédente que

$$\partial E \ = \ \overline{E} \cap \overline{E^c}$$

où $E^c = \mathbb{R} - E^c$.

Proposition

Un point $x \in \mathbb{R}$ est dans la frontière d'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout intervalle ouvert I contenant x on a $I \cap E \neq \emptyset$ et aussi $I \cap E^c \neq \emptyset$.

Preuve. En effet $x \in \overline{E}$ si, et seulement si, pour tout intervalle ouvert I contenant x on a $I \cap E \neq \emptyset$.
De même $x \in \overline{E^c}$ si, et seulement si $I \cap E^c \neq \emptyset$.
Donc affirmer que $x \in \partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ si, et seulement si, pour tout I comme dans l'énoncé on les intersections $I \cap E$ et $I \cap E^c$ sont non vides.**CQFD**

Proposition

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble. Alors

1. ∂E est un fermé ;
2. $\partial E = \partial E^c$;
3. $\overline{E} = E \cup \partial E$;
4. E est fermé si, et seulement si, $\partial E \subseteq E$;
5. $Int(E) = E - \partial E$;
6. E est ouvert si et seulement si $E \cap \partial E = \emptyset$;

Preuve.

(1) $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ est l'intersection de deux fermés, donc fermée.

(2) Cela suite de la formule $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ qui est stable par passage aux complémentaires : $\partial E^c = \overline{E^c} \cap \overline{E}$ (car $(E^c)^c = E$).

(3) Par définition $\partial E = \overline{E} - Int(E)$, donc $\overline{E} = Int(E) \cup \partial E$, ce qui entraine aussi $\overline{E} = E \cup \partial E$ (car $E \subseteq \overline{E}$).

(4) C'est une conséquence directe de (3).

(5) Par définition $\partial E = \overline{E} - Int(E)$, donc $Int(E) = \overline{E} - \partial E$ (car $Int(E) \subseteq \overline{E}$). Comme $Int(E) \subseteq E$, cela entraine $Int(E) = E - \partial E$.

(6) C'est une conséquence directe de (5).

CQFD

Exemples

- On a $\partial]0,1[= \partial]0,1] = \partial [0,1] = \{0,1\}$;
- On a $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;
- On a $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$;
- On a $\partial (\mathbb{Q} \cap [0,1]) = [0,1]$;

Densité

Densité

Définition

Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.On dit que E est dense dans F si

$$E \subseteq F \subseteq \overline{E}$$

Autrement dit $E \subseteq F$ et tout point de F est adhérent à E.

Propostion

Soient $E \subseteq F$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est dense dans F ;
2. Tout fermé C de $\mathbb{R}$ contenant E, contient aussi F ;
3. Tout fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas F ne contient pas non plus E ;
4. Tout ouvert U de $\mathbb{R}$ qui n'intersecte pas E, n'intersecte pas non plus F ;
5. Tout ouvert qui intersecte F intersecte aussi E.

Preuve.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Si E est dense dans F, alors $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$. Comme $\overline{E}$ est l'intersection de tous les fermés contenant E, si C est un fermé contenant E, il contient $\overline{E}$, et donc aussi F.
- (2) $\Leftrightarrow$ (3) C'est évident.
- (2) $\Rightarrow$ (4). Supposons que tout fermé C de $\mathbb{R}$ contenant E, contient aussi F. Par passage aux complémentaires, si U est un ouvert tel que $E \cap U = \emptyset$, alors $C = \mathbb{R} - U$ est un fermé ne contenant pas E, et donc $F \subseteq C$, mais alors $F \cap U = \emptyset$.
- (4) $\Leftrightarrow$ (5) c'est évident.
- (4) $\Rightarrow$ (1). Supposons que tout ouvert U de $\mathbb{R}$ qui ne rencontre pas E, ne rencontre pas non plus F. Cela signifie que si $x \in F$ et U est un ouvert contenant x, alors $U \cap E \neq \emptyset$. On a vu que cela signifie que x est un point adhérent à E. On a donc $F \subseteq \overline{E}$.

CQFD

Exemples

- $]a, b[$ et $]a, b]$ sont denses dans $[a, b]$;
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$;
- Si $E \subseteq \mathbb{R}$ est un fermé et si F contient strictement E, alors E n'est pas dense dans F (car $\overline{E} = E \neq F$).
- Ainsi tout fermé de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{R}$, et tout sous-ensemble d'un tel sous-ensemble fermé, n'est pas dense dans $\mathbb{R}$;
- Pour tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ soit $A^c = \mathbb{R} - E$ son complémentaire. Soient $E \subseteq F$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors E est dense dans F si, et seulement si,

$$\mathrm{Int}(E^c) \subseteq F^c \subseteq E^c.$$

En effet cela se voit immédiatement par passage aux complémentaires à partir du fait que $\mathrm{Int}(E^c) = \overline{E}^c$.

Survol sur la notion de topologie et d'espace métrique.

Topologie

La **topologie générale** est une branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter des notions de limite, de continuité, et de voisinage.

Les **espaces topologiques** forment le socle conceptuel permettant de définir ces notions. Elles sont suffisamment générales pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, ensembles discrets, espaces de la géométrie euclidienne, espaces numériques à *n* dimensions, espaces fonctionnels plus complexes, mais aussi en géométrie algébrique. Ces concepts apparaissent dans presque toutes les branches des mathématiques ; ils sont donc centraux dans la vision moderne des mathématiques.

Un espace topologique est un couple (E, T), où E est un ensemble et T une topologie sur E, à savoir un ensemble de parties de E — que l'on appelle les ouverts de (E, T) — vérifiant les propriétés suivantes :

1. l'ensemble vide et E appartiennent à T[note 1] ;
2. toute réunion *quelconque* d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire que si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de T, indexée par un ensemble I quelconque (pas nécessairement fini, ni même dénombrable) alors
$$\bigcup_{i\in I} O_i \in T\,;$$
3. toute intersection *finie* d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire que si $O_1, \dots,$ O_n sont des éléments de T alors
$$O_1 \cap \ldots \cap O_n \in T.$$

Il résulte de la théorie élémentaire des ensembles qu'une topologie sur E peut aussi être définie par l'ensemble de ses fermés, cet ensemble de parties de E devant vérifier :

1. les ensembles E et vide sont des fermés ;
2. toute intersection *quelconque* de fermés est un fermé ;
3. toute réunion *finie* de fermés est un fermé.

Espaces métriques

- On appelle (E, d) un espace métrique si E est un ensemble et d une distance sur E.
- On appelle distance sur un ensemble E, une application d de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout x, y, z de E :
  - $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;
  - $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation) ;
  - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).
- On appelle boule ouverte (resp. fermée) *centrée* en un point a de E et de rayon r (un élément de $\mathbb{R}^+$), l'ensemble des points x situés à une distance de a strictement plus petite que r (resp. inférieure ou égale à r) :

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}, \quad B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}.$$

Exemple

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des espaces métriques si l'on pose

$$d(x,y) = |x - y| \; .$$

- On verra plus loin que tout espace vectoriel muni d'une **norme** donne lieu à un espace métrique par la même raison.
- Tout sous-ensemble d'un espace métrique est un espace métrique.

On regardera en priorité $\mathbb{R}$ pour le moment. Mais la plupart des notions qu'on donne sont valables sur les espaces métriques.

Dans un espace métrique, le rôle des intervalles est joué par les boules ouvertes. D'où la définition suivante

Définition

Un **ouvert** d'un espace métrique est par définition une réunion arbitraire de boules ouvertes.
Un **fermé** d'un espace métrique est par définition le complémentaire d'un ouvert.

Ainsi, si (X, d) est notre espace métrique, alors un sous-ensemble $A \subseteq X$ est fermé si $A^c := X - A$ est ouvert.

Éspaces compactes

On va introduire maintenant une classe d'espaces un peu plus restreinte que les fermés, les espaces **compacts.**

IDEE

COMPACT = FERME et BORNE

Il y a au moins deux notions de compacité et nous montrerons être équivalentes.

Définition

Soit I un ensemble d'indices. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts **recouvre** A si

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

On dit aussi que $(U_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de A.

Définition

Un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est **compact** s'il a la propriété suivante est vérifiée :

- Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ on peut trouver un sous recouvrement **fini**. C'est à dire qu'il existe un sous ensemble **fini** d'indices $J \subseteq I$, tel que
$$A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Théorème

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est **compact**, si et seulement si il est **fermé** et **borné**.

La preuve comporte plusieurs étapes.
Commençons par démontrer la Proposition suivante.

Proposition

Un compact est fermé.

Preuve. Soit K un compact.

Pour montrer qu'il est fermé, il suffit de montrer que le complémentaire $U = \mathbb{R} - K$ de K est ouvert.

Pour ce faire, nous montrons que pour tout point $x \in U$ on peut trouver un intervalle ouvert I_x t.q. $I_x \subseteq U$ (voir définition des ouverts).

Autrement dit, on va montrer que pour tout $x \notin K$ il existe un intervalle ouvert I_x tel que $I_x \cap K = \emptyset$.

Soit donc $x \notin K$.

- Pour tout $y \in K$ on peut trouver
  - un intervalle ouvert I_y contenant x
  - et un intervalle ouvert J_y contenant y

  tels que
$$I_y \cap J_y = \emptyset \ .$$
- On a
$$K \subset \bigcup_{y \in K} \{y\} \ \subseteq \bigcup_{y \in K} J_y .$$
- $\bigcup_{y \in K} J_y$ est u recouvrement fini de K et par compacité on peut extraire un sous- recouvrement fini.
- Concrètement, il existent $y_1, \ldots, y_n \in K$ t.q. $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} J_{y_i}$.
- Or $U := \cap_{i=1}^{n} I_{y_i}$ est un intervalle ouvert contenant x car c'est une intersection finie.
- Par construction pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a $U \cap J_{j_i} = \emptyset$. Donc U n'intersecte pas le recouvrement $\cup_{i=1}^{n} J_{y_i}$.
- Donc $U \cap K = \emptyset$, car K est contenu dans le recouvrement $\cup_{i=1}^{n} J_{y_i}$.

CQFD

Proposition

Un compact est borné.

Preuve. Soit K un compact. Soit x dans K.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'intervalle $I_n :=]x - n, x + n[$.
- La réunion $\bigcup_{n \geq 0} I_n$ couvre toute la droite $\mathbb{R}$. En particulier ça couvre K.
- Comme K est compact, on peut extraire un recouvrement fini : il existent $n_1, \ldots, n_k$ t.q. K est contenu dans $\bigcup_{i=0}^{k} I_{n_i}$.
- Donc $K \subseteq I_{n_k}$. Autrement dit K est borné.

CQFD

On vient de voir qu'un compact est fermé et borné. Montrons maintenant l'inverse.

Proposition

Un ensemble fermé et borné est compact.

Preuve. Soit C un ensemble fermé et borné. Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de C. Montrons qu'on peut trouver un sous-recouvrement **fini**.
Par l'absurde supposons que tout sous-recouvrement fini ne recouvre pas C. Alors, pour tout ensemble **fini** $F \subseteq \Lambda$ d'indices, la réunion $\bigcup_{\lambda\in F} U_\lambda$ ne recouvre pas C. Notons

$$C(F) \;:=\; C - \bigcup_{\lambda\in F} U_\lambda \;.$$

Par hypothèse, $C(F)$ est non vide pour tout sous- ensemble **fini** d'indices $F \subseteq \Lambda$.

- Quand F augmente de taille, la réunion $\bigcup_{\lambda \in F} U_\lambda$ augmente de taille, et alors $C(F)$ diminue de taille.
  C'est à dire que si $F \subseteq G$ sont deux ensembles finis d'indices, alors
$$C(G) \subseteq C(F)\ .$$
- Comme C est borné et $C(F) \subseteq C$, $C(F)$ borné.
- Pour tout F comme avant $C(F)$ est fermé car c'est intersection des fermés C et $\mathbb{R} - \bigcup_{\lambda \in F} U_\lambda$.
- Comme $C(F)$ est fermé borné, il a un minimum $\min(C(F))$
- En effet, on a vu qu'il existe une suite d'éléments de $C(F)$ qui tends vers le $\inf(C(F))$ (Th. de Bolzano-Weierstrass), et qu'un fermé contient les limites des suites (donc $\in (C(F)) \in C(F)$ et c'est alors le minimum de $C(F)$).
- Soit S l'ensemble de tous ces minimums :
$$S \ = \ \{\min(C(F)), F \subseteq \Lambda, F = \text{fini}\}$$

- $S \subseteq C$, donc S est borné.
- Il a alors un $\sup(S)$.
- On a $\sup(S) \in C$ car comme avant C est fermé et contient les limites de ses suites.
- On peut alors trouver $\mu \in \Lambda$ t.q.
$$s := \sup(S) \in U_\mu$$
car les U_λ recouvrent C.
- Comme U_λ est ouvert, on peut trouver $\delta > 0$ t.q. $]s-\delta, s+\delta[\subseteq U_\mu$.
- Comme $s = \sup(S)$, on peut trouver un ensemble fini d'indice F tel que
$$s - \delta < \min(C(F)) \leq s\,.$$
- Posons $G := F \cup \{\mu\}$.C'est encore fini et contient F donc $\min(F) \leq \min(C(G))$. On a
$$s - \varepsilon < \min(C(F)) \leq \min(C(G)) \leq s$$
et $\min(C(G)) \in]s-\delta, s+\delta[$. Cela est absurde car $]s-\delta, s+\delta[\subseteq A_\mu$ et $\min(C(G)) \notin A_\mu$

CQFD

Espaces sequentiellement compacts.

Nous avons rencontré les notions suivantes

- sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}$
- sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$

Nous allons voir maintenant une autre notion de compacité qui s'appelle **compacité séquentielle.**

IDEE

COMPACT = SEQUENTIELLEMENT COMPACT = FERME et BORNE

Rappel : Le théorème de Bolzano Weierstrass

La première notion de compacité est inspiré du théorème de Bolzano-Weierstrass. Rappelons en l'énoncé :

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle bornée. Alors il existe une sous-suite de $(a_n)_n$ qui est convergente.

Définition (séquentiellement compact)

Un sous ensemble K de $\mathbb{R}$ est **séquentiellement compact** si pour toute suite $(a_n)_n$ d'éléments de K on peut extraire une sous-suite $(a_{n_k})_k$ telle que :

- la sous-suite $(a_{n_k})_k$ converge ;
- la limite $\lim_k a_{n_k}$ appartient à K.

Remarque : Cette définition a un sens dans les espaces topologiques et, en particulier, dans les espaces métriques.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet de montrer l'assertion suivante

Proposition

Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- K est fermé et borné ;
- K est sequentiellement compact.

Proof Soit F un ensemble fermé et borné. Alors

- Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de F ;
- Comme F est borné, la suite est bornée et on peut appliquer Bolzano-Weierstrass. Il existe donc une sous-suite $(a_{n_k})_k$ qui est convergente.
- Nous avons montré que F contient les limites des suites contenues dans F (car il coïncide avec son adhérence), donc $\lim_k a_{n_k} \in F$.
- Cela étant vrai pour toute suite, F est séquentiellement compact.

Supposons maintenant que K est sequentiellement compact. Alors

- Si K n'était pas borné, on peut trouver une suite strictement monotone tendant vers $\pm\infty$;
- Aucune des sous-suites de cette suite ne converge ;
- Donc il faut que K soit borné.
- Pour montrer qu'il est fermé, nous montrons qu'il coincide avec son adhérence.
- Soit $(a_n)_n$ est une suite convergente d'éléments de K et soit $a = \lim_n a_n$;
- alors toute sous-suites convergent vers a ;
- par hypothèse K est sequentiellement compact alors $a \in K$ (deuxième condition de la définition) ;
- Cela étant vrai pour toutes les suites convergentes d'éléments de K, on trouve que l'adhérence de K coïncide avec K : $\overline{K} = K$;
- Donc K est fermé.

CQFD

Corollaire

Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble. Alors, les trois notions suivantes sont équivalentes :

- K est fermé et borné ;
- K est compact ;
- K est séquentiellement compact.

- Nous verrons que ce résultat reste vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$; Il faudra re-définir les notions de fermé, de borné, de suite convergente, compact, sequentiellement compact.

  On le fera en utilisant une **norme** de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble de Cantor

Six premières itérations de la construction de l'ensemble de Cantor.

On construit par récurrence une suite $(F_n)_n$ d'ensembles fermés, bornés, et emboités l'un d'ans l'autre.
Par récurrence, on pose $F_0 = [0, 1]$, et pour construire F_{n+1} on divise en trois parties égales chaque intervalle qui compose F_n et on supprime le milieu :

$$\begin{aligned}
F_0 &= [0,1]; \\
F_1 &= [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]; \\
F_2 &= [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1] \\
&\dots
\end{aligned}$$

On a $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \cdots$.
Chaque F_i est fermé et borné donc compact et séquentiellement compact.
L'ensemble de Cantor est

$$K_3 \ := \ \bigcap_{n \geq 0} F_n \ . \tag{4}$$

- K_3 est fermé, car c'est une intersection de fermés ;
- K_3 est **borné** car contenu dans $[0,1]$;
- K_3 est donc **sequentiellement compact** et **compact.**
- K_3 est **non vide** car par exemple pour tout n on a $0 \in F_n$. Donc $0 \in K_3$.

Voici une propriété qui sera importante par la suite :

Proposition

Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un sequentiellement compact.
Soit $F \subseteq \mathbb{R}$ un fermé.
Alors l'intersection $F \cap K$ est sequentiellement compacte.

La preuve est évidente :

- Par la proposition précédente K est fermé borné ;
- L'intersection de deux fermés est fermée, donc $K \cap F$ est un fermé ;
- $F \cap K$ est contenu dans le borné K donc c'est lui aussi borné.

CQFD

- On a ici un problème de caractère théorique.
- Plus loin nous allons démontrer l'équivalence (fermé+borné)$\Longleftrightarrow$(sequentiellement compact) pour un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.
- La stratégie de la preuve est la suivante :
  1. On montre que tout intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$ est sequentiellement compact (on vient de le faire) ;
  2. On montre que $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact ;
  3. On montre que un fermé de $\mathbb{R}^n$ dans un sequentiellement compact est sequentiellement compact.
  4. Donc, si K est fermé et borné, il sera fermé dans un I^n pour un I convenable et donc sequentiellement compact par le (3).
- Donc, l'énoncé (3) précédent est utilisé dans la preuve de l'équivalence (fermé+borné)$\Longleftrightarrow$(sequentiellement compact).
- On ne peut donc pas démontrer (3) en utilisant cette équivalence car ça donne lieu à un cercle vicieux.
- Il nous faut une autre preuve.

Proposition

Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un sequentiellement compact.
Soit $F \subseteq \mathbb{R}$ un fermé.
Alors l'intersection $F \cap K$ est sequentiellement compacte.

Preuve.

- Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $F \cap K$.
- C'est une suite dans K, donc elle a une sous-suite $(a_{n_k})_k$ qui converge dans K : $a := \lim_k a_{n_k} \in K$.
- Mais la suite (a_{n_k}) est dans F qui est fermé et qui coïncide avec son adhérence.
- Donc $a \in F \cap K$.

CQFD

Comme pour les sequentiellement compacts, nous aurons besoin de la Proposition suivante

Proposition

Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Si F est fermé dans $\mathbb{R}$, alors l'intersection $F \cap K$ est compacte.

Preuve.

- Soit $F \cap K \subseteq \bigcup_i U_i$ un recouvrement par des ouverts ;
- Un compact est fermé,donc K est ferméet $F \cap K$ est fermé car intersection de fermés ;
- Donc $U' := \mathbb{R} - (F \cap K)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$;
- alors $U' \bigcup \left(\bigcup_i U_i \right)$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$, et donc de K ;
- Comme K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini $K \subseteq \; U' \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$;
- Or, $U' \cap (F \cap K) = \emptyset$, donc $F \cap K \; \subseteq \; U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

CQFD

Une propriété des compacts

On a vu que une des propriétés fondamentales des nombres réels, *la complétude*, peut s'exprimer en disant que toute intersection d'intervalles fermés, bornés et emboités est non vide.
Cette propriété n'est pas vérifiée en général pour les fermés.

Exemple

Pour $n \in \mathbb{Z}$, les intervalles $[n, \infty[$ sont fermé (en effet leur complémentaire $]-\infty, n[$ est ouvert). Mais l'intersection

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} [n, +\infty[$$

est vide.

Le fait d'être borné est donc cruciale. Cela signifie que le fait d'être compact est cruciale.
En effet, cela est une propriété générale des **compacts**, et ça vaut dans les espaces topologiques.

Théorème (de Cantor)

Soit $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-ensembles **compacts** emboités de $\mathbb{R}$ (c'est à dire tels que pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ on a soit $K_\lambda \subseteq K_{\lambda'}$, soit $K_{\lambda'} \subseteq K_\lambda$).
Alors $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ est **non vide.**

Preuve.

- On sait qu'un compact est fermé.
- La famille des complémentaires $U_\lambda = \mathbb{R} - K_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ est alors une famille d'ouverts ;
- Si par l'absurde $\cap_\lambda K_\lambda = \emptyset$, alors $\cup_\lambda U_\lambda = \mathbb{R}$;
- Dans ce cas $(U_\lambda)_\lambda$ est un recouvrement de K_λ (pour tout λ) ;
- Fixons un $\overline{\lambda}$. Comme $K_{\overline{\lambda}}$ est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini $U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$ de $(U_\lambda)_\lambda$ tel que $K_{\overline{\lambda}} \subseteq U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$;
- Comme les $(K_\lambda)_\lambda$ sont emboités, quitte à réordonner les indices on peut supposer que $U_{\lambda_1} \supseteq \cdots \supseteq U_{\lambda_n}$; Donc $K_{\overline{\lambda}} \subseteq U_{\lambda_1}$.
- Cela entraine $K_{\overline{\lambda}} \cap K_{\lambda_1} = \emptyset$, ce qui est absurde car la famille est emboitée.**CQFD**

Continuité

Continuité des fonctions réelles

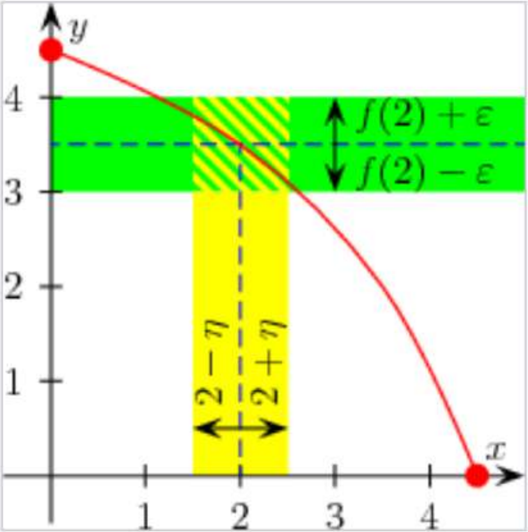
Supposons d'avoir une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas la continuité s'écrit plus classiquement ainsi :

Définition (Continuité)

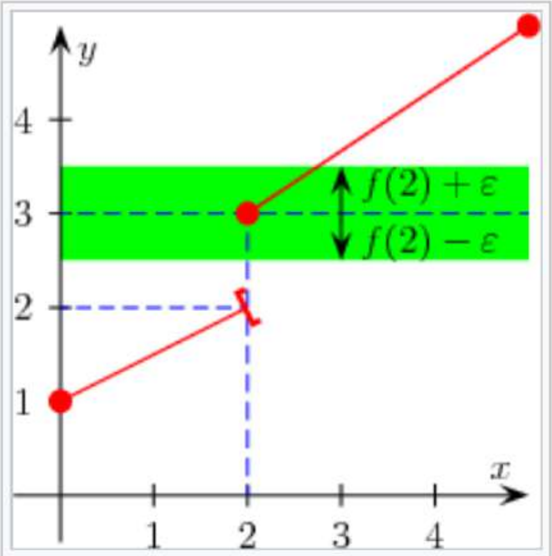
Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, soit $x \in D$ un point de D, et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est continue en $x \in D$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in D, \quad |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur D (ou simplement que f est continue), si elle est continue en tout points de D.



Exemple d'une fonction continue sur un intervalle



Exemple de fonction non continue en $x = 2$

Attention aux fausses terminologies

On peut tester la continuité **uniquement en un point de D**. D'autres types de continuité/discontinuité n'ont pas de sens.

Par exemple, la fonction $f(x) = 1/x$ est continue (sur son domaine de définition $D = \mathbb{R} - \{0\}$). Dans le langage familier, on dit souvent que $x = 0$ est un point de discontinuité car la fonction présente en quelque sorte une fracture en $x = 0$. Cela est incohérente avec la définition qu'on a donné, car il est impossible de tester la continuité en $x = 0$ puisqu'il n'est pas dans D.

En effet, $x = 0$ n'est pas dans l'ensemble de définition de f et ça n'a pas de sens de tester la continuité de f en 0. Il est plus approprié de dire que $f(x) = 1/x$ n'est pas définie en $x = 0$, qu'elle est continue dans son domaine de définition $\mathbb{R} - \{0\}$, et qu'elle ne peut pas se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Cette définition de continuité pour les fonctions réelles de variable réelle est bien connue depuis l'année de L2.

On se propose ici de donner une interprétation plus topologique de cette notion.

Continuité dans les espaces topologiques

La notion de **continuité** est étroitement lié à celle d'espace topologique.

Je rappelle qu'un **espace topologique** est un ensemble X muni d'une famille particulière de sous-ensembles nommés **les ouverts**.

Ils doivent satisfaire aux 3 propriétés suivantes :

- X et l'ensemble vide sont ouverts ;
- toute **réunion arbitraire** d'ouverts est un ouvert ;
- tout **intersection finie** d'ouverts est un ouvert.

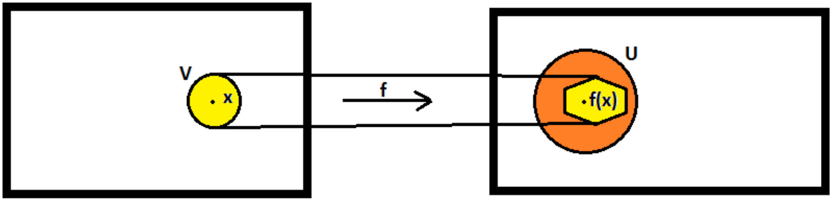
Dans $X = \mathbb{R}$ les ouverts sont les réunions (arbitraires) d'intervalles ouverts et on a vu une caractérisation des ensembles ouverts et fermés.

Théorème (continuité en un point avec des ouverts)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, soit $x \in D$ un point, et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Les notions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en x
   (i.e. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$;
2. pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$ contenant $f(x)$, on peut trouver un ouvert V de $\mathbb{R}$ qui contient x t.q.

$$f(V \cap D) \subseteq U.$$



Preuve.

(1)$\Longrightarrow$(2)

Supposons que f est continue en x : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que si $|x - y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Cela signifie que pour tout intervalle ouvert $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ on peut trouver un intervalle ouvert $]x - \eta, x + \eta[$ tel que $f(D\cap]x - \eta, x + \eta[) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Nous devons montrer que pour tout ouvert U contenant $f(x)$, on peut trouver un ouvert V contenant x tel que $f(V \cap D) \subseteq U$.

- Dans ce cas, soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $f(x)$.
- Par la caractérisation des ouverts, on peut trouver un intervalle ouvert I tel que $f(x) \in I \subseteq U$, et on peut trouver un ε assez petit tel que $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subseteq I$.
- La propriété (1) donne alors $f(]x - \eta, x + \eta[\cap D) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subseteq U$.
- Il suffit de prendre $V =]x - \eta, x + \eta[$.

(2)$\Longrightarrow$(1)

Réciproquement, supposons que pour tout ouvert U contenant $f(x)$ on puisse trouver un ouvert V contenant x tel que $f(V \cap D) \subseteq U$.

- Considérons un $\varepsilon > 0$;
- Posons $U =]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Par la propriété (2) on peut trouver un ouvert V tel que $x \in V \cap D \subseteq f^{-1}(U)$.
- Comme V est ouvert, il est une réunion d'intervalles. Une de ces intervalles I contient x. On peut alors trouver un $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset I$.
- On a donc

$$(]x - \eta, x + \eta[\cap D) \subseteq (I \cap D) \subseteq (V \cap D) \subseteq f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[) \; .$$

On a montré que (1) est vérifiée. **CQFD**

Continuité (globale)

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. pour tout $x \in D$, f est continue en x ;
2. pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, on peut trouver un ouvert V de $\mathbb{R}$ tel que l'image inverse $f^{-1}(U) = V \cap D$.

Si ces propriétés sont vérifiés on dit que f est **continue**.

Preuve.

(1)$\Longrightarrow$(2)

- Supposons que pour tout $x \in D$, f est continue en x.
- On veut montrer que (2) est vérifié.
- Soit U un ouvert.On a vu dans la proposition précédente que quand $f(x) \in U$, on peut trouver un ouvert V_x contenant x tel que $f(V_x \cap D) \subseteq U$.
- Soit

$$V := \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x$$

- Chaque V_x est ouvert, donc V est ouvert (car réunion d'ouverts).
- On a $V \cap D = \cup_{x \in f^{-1}(U)}(V_x \cap D)$.
- Donc

$$f(V \cap D) = f(\cup_{x \in f^{-1}(U)}(V_x \cap D)) = \cup_{x \in f^{-1}(U)} f(V_x \cap D) = U \cap f(D) \ .$$

La dernière égalité suit de ce que pour tout $x \in D$ on a $f(V_x \cap D) \subseteq U$.

(2)$\Longrightarrow$(1)
Soit $x \in D$.
La condition (2) entraine que pour tout ouvert U contenant $f(x)$ il existe un ouvert V tel que $f^{-1}(U) = D \cap V$.
Maintenant $f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U) = D \cap V$.
Donc V est un ouvert contenant x et par la proposition précédente cela exprime la continuité en x.
CQFD

Composition de fonction continues

Proposition

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(D) \cap D'$ n'est pas vide.Alors, la composée $g \circ f$ est continue dans son domaine de définition.

Preuve.

- Soit $D'' := f^{-1}(D').D''$ est un sous ensemble de D.
- On veut montrer que $g \circ f : D'' \to \mathbb{R}$ est continue.
- Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert.
- Comme g est continue $g^{-1}(U) = D' \cap V$ pour un ouvert V de $\mathbb{R}$ convenable.
- Comme f est continue $f^{-1}(V) = D \cap W$ pour un ouvert W de $\mathbb{R}$ convenable.
- Mais $(g \circ f)^{-1}(U) = D \cap W$.En effet

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(U) &= f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(D' \cap V) = f^{-1}(D') \cap f^{-1}(V) \\ &= f^{-1}(D') \cap D \cap W = D'' \cap W.\textbf{CQFD}\end{aligned}$$

Théorème

La somme $(x, y) \mapsto x + y$, la soustraction $(x, y) \mapsto x - y$, et le produit $(x, y) \mapsto x \cdot y$ sont des fonctions continues

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Le rapport $(x, y) \mapsto x/y$ est une fonction continue

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$$

On ne verra pas la preuve pour le moment.Le lecteur remarquera que l'énoncé reste vague sur la topologie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.On verra dans un deuxième temps la topologie des espaces vectoriels normes.

On a une autre importante caractérisation de la continuité qui fait intervenir des suites.

Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en $x \in D$;
2. Pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de D qui converge à x, la suite $(f(x_n))_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$ à $f(x)$.

Preuve.(1) $\Longrightarrow$ (2)

- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x \in D$ et $(x_n)_n$ une suite de points de D telle que $\lim_n x_n = x$. On veut montrer que $\lim_n f(x_n) = f(x)$.
- Soit $r > 0$. La continuité de f entraine qu'il existe un intervalle ouvert $]x - \eta, x + \eta[$ de rayon $\eta > 0$ telle que
$$f(]x - \eta, x + \eta[\cap D) \ \subseteq]f(x) - r, f(x) + r[.$$

- Comme $\lim_n x_n = x$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $x_n \in]x - \eta, x + \eta[$.
- Donc pour tout $n \geq N$ on a
$$f(x_n) \in]f(x) - r, f(x) + r[\, .$$
- On vient de montrer que pour tout $r > 0$ il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $f(x_n) \in]f(x) - r, f(x) + r[$. Donc $\lim_n f(x_n) = f(x)$.

Démontrons maintenant que (2) $\Longrightarrow$ (1).

- Pour démontrer que f est continue on procède par l'absurde.
- Si f n'est pas continue, alors nous allons construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de D convergente à $x \in D$ telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas à $f(x)$.
- Comme f n'est pas continue, on peut trouver un ouvert U de $\mathbb{R}$ contenant $f(x)$ tel que $f^{-1}(U)$ ne contient aucun ensemble $V \cap D$, avec V ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x.
- Alors, pour tout entier $n \geq 0$, $(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap D) \not\subseteq f^{-1}(U)$.
- Pour tout n, soit $x_n \in (]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap D) - f^{-1}(U)$.
- La suite $(x_n)_n$ tends vers x, mais $f(x_n) \notin U$ pour tout n. Donc $f(x_n)$ ne converge pas à $f(x)$.**CQFD**

Commutation avec le symbole de lim

La proposition précédente affirme que f est continue si et seulement si **elle commute au symbole de limite** quand la limite est dans le domaine de définition :

$$\text{Si } \{x_n\}_n \subseteq D \text{ et si } \lim_n x_n \in D \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_n f(x_n) \;=\; f(\lim_n x_n)\;.$$

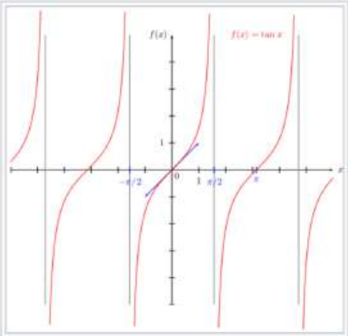
Cela traduit l'idée intuitive suivante de continuité

Quand $y \in D$ approche $x \in D$, alors $f(y)$ approche $f(x)$

ATTENTION Cela fonctionne seulement si $\lim_n x_n$ est dans le domaine de définition D de f.

Exemple

On considère $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction Tangente



La fonction est continue (dans son domaine de définition), mais elle ne commute pas avec la limite de la suite convergente $(\pi/2 - \frac{1}{n})_n$. En effet $\tan(\pi/2)$ n'est pas défini.
Le point est que $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $\lim_n x_n$ n'appartient pas à D ! Cette suite ne converge pas dans D.

Encore une fois, la continuité n'a un sens que si elle est testé sur les points où la fonction est définie.

Quelques trivialité

1. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ le domaine de définition d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$. Si x est un point isolé de D (c'est à dire $x \notin Acc(D)$), alors f est automatiquement continue en x ;
2. L'identité $Id : D \xrightarrow{\sim} D$ est toujours continue (c'est la fonction $f(x) = x$) ;
3. Une fonction constante est toujours continue ;
4. Comme produit et somme de fonctions continues sont continues, on en déduit que tout *polynôme* est une fonction continue.
5. En L2, on a vu que $\exp(x)$ est continue, cela peut être utilisé pour démontrer la continuité de presque toutes les fonctions classiques. Mais pour cela il nous faut un peu plus de résultats.

Ensembles compacts et continuité.

La solution optimale de plusieurs problèmes de la vie courante est celle qui rend maximale une quantité $f(x_1, \dots, x_n)$ dépendant de plusieurs autres quantités $x_1, \dots, x_n$.

Pour ce problèmes, il est très important de savoir *à priori* que le maximum existe.

La compacité est une propriété qui, sous plusieurs formes, vient en aide dans ce type de problèmes.

Images de compacts sont compacts

Le théorème fondamentale est suivant :

Théorème

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $K \subseteq D$ est compact, alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Preuve.

- Soit $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de $f(K)$;
- Comme f est continue, pour tout i, on peut trouver un ouvert V_i de $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(U_i) = V_i \cap D$;
- Donc $\cup_i f^{-1}(U_i) = \cup_i (V_i \cap D)$, et donc $\cup_i V_i$ est un recouvrement ouvert de K ;
- Comme K est compact, on peut trouver un sous-recouvrement fini :
$$K \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n} \subseteq f^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_n}).$$
- Mais cela signifie que $f(K) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ et on a trouvé un sous recouvrement fini. **CQFD**

Existence du maximum

Théorème

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit K un sous-ensemble borné et fermé de $\mathbb{R}$ t.q. $K \subseteq D$. Alors la restriction de f à K a un maximum et un minimum sur K.

Preuve.

- On sait que les fermés et bornés de $\mathbb{R}$ sont les compacts.
- On peut alors appliquer le théorème précédente et on trouve que l'image $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.
- $f(K)$ est alors fermé et borné.
- Il a donc un maximum et minimum.
  (En effet, comme $f(K)$ est borné, alors $\sup(f(K)) < +\infty$; par ailleurs on a vu qu'il existe toujours une suite d'éléments de $f(K)$ qui converge vers $\sup(f(K))$; mais $f(K)$ est fermé et il contient les limites des suites à valeurs dans $f(K)$.).

CQFD

Théorème des valeurs intermédiaires

Une autre application intéressante de la compacité est la suivante :

Théorème

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors l'image $f(I)$ est un intervalle.

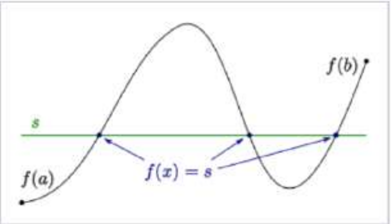


Illustration du Théorème des valeurs intermédiaires : si f est une fonction continue sur l'intervalle [a;b], alors elle prend toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b) au moins une fois. Ici la valeur *s*.

Lemme

Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une application continue,alors l'image inverse d'un fermé de $\mathbb{R}$ est de la forme $D \cap C$ avec C fermé dans $\mathbb{R}$.

Preuve.

- Soit $F \subseteq \mathbb{R}$ fermé ;
- Par définition, $\mathbb{R} - F$ est ouvert ;
- Comme f est continue $f^{-1}(\mathbb{R} - F) = D \cap V$, avec V ouvert de $\mathbb{R}$;
- Soit $C = \mathbb{R} - V$;
- Alors
$$f^{-1}(F) = D - V = D \cap C$$.**CQFD**

Théorème

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors l'image $f(I)$ est un intervalle.

Preuve du théorème. Soient $a < b$ deux points de I. On veut montrer que pour tout valeur intermédiaire $f(a) \leq \eta \leq f(b)$ on peut trouver $\xi \in [a, b]$ tel que $f(\xi) = \eta$.

- Si $\eta = f(a)$ il suffit de prendre $\xi = a$, et si $\eta = f(b)$ on prends $\xi = b$; Supposons donc $f(a) < \eta < f(b)$.
- On considère les ensembles
$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \eta\} \ , \qquad B = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq \eta\} \ .$$
- J'affirme que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}$.
  - En effet, $]-\infty, \eta]$ est fermé et f est continue, par le lemme précédent on peut trouver un fermé C_A tel que $f^{-1}(]-\infty, \eta]) = I \cap C_A$. Donc $A = [a, b] \cap f^{-1}(]-\infty, \eta]) = [a, b] \cap C_A$ est intersection de deux fermés, c'est donc un fermé. De même $B = [a, b] \cap f^{-1}([\eta, +\infty[)$ est fermé.

- A et B sont aussi bornés, car ils sont contenus dans $[a, b]$;
- A et B sont donc compacts de $\mathbb{R}$ et ont un maximum et un minimum.
- Soit $\xi = \max(A)$.
- Par la définition de A on a $f(\xi) \leq \eta$;
- Comme $\eta < f(b)$, alors $b \notin A$ et donc $\xi < b$;
- Comme $A \cup B = [a, b]$, alors $]\xi, b] \subseteq B$;
- Mais B est fermé, donc il contient son adhérence.
- Donc $\xi \in B$.
- Par la définition de B cela signifie $f(\xi) \geq \eta$.
- Mais $f(\xi) \leq \eta$ et $f(\xi) \geq \eta$ entrainent $f(x) = \eta$.

CQFD

On vient de démontrer qu'une fonction continue envoie des intervalles dans des intervalles.

Un corollaire important est le suivant :

Corollaire (existence des zéros)

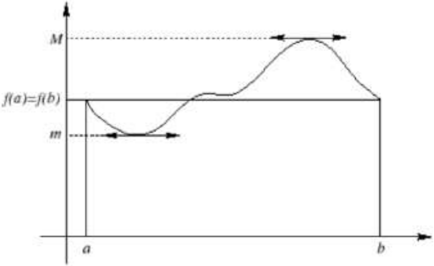
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
S'il existent $a, b \in I$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors on peut trouver $\xi \in I$ tel que

$$f(\xi) = 0.$$

Une autre application importante de l'existence de maximum est la suivante, connue sous le nom de Théorème de Rolle

Théorème *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors la dérivée de f s'annule sur $]a, b[$.*

$$\exists c \in]a, b[\ , \quad f'(c) = 0\ .$$



Théorème de Rolle.

Démonstration : Une application continue sur intervalle fermé borné, atteint sa borne inférieure m et sa borne supérieure M : il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$,

$$m = f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2) = M \; .$$

Si $m = M$, l'application f est constante sur $[a,b]$, et sa dérivée est identiquement nulle.

Si $m < M$, alors l'une au moins de ces deux valeurs est différente de $f(a)$ (et donc de $f(b)$). Si $m < f(a)$, alors $c_1 \in]a,b[$ est un minimum pour f, et donc $f'(c_1) = 0$.

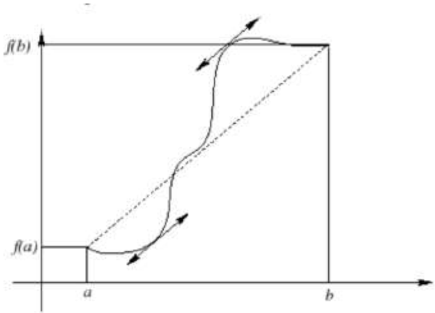
De manière analogue, Si $M > f(a)$, alors c_2 est un maximum pour f, et donc $f'(c_2) = 0$.

CQFD

Une corollaire facile du théorème de Rolle est le théorème suivant connu sous le nom de Théorème des accroissements finis.

Théorème *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) .$$



Théorème des accroissements finis.

Démonstration : Considérons la fonction g, qui à $x \in [a,b]$ associe

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x\,.$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. De plus, elle prend la même valeur en a et b :

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\,.$$

D'après le théorème de Rolle, la dérivée de g s'annule en un point c de $]a,b[$.

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0\,.$$

CQFD

Continuité des fonctions monotones

Continuité des fonctions monotones

Théorème

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Si $f(D)$ est un intervalle, alors f est continue.

Preuve.

- On peut supposer f croissante, le cas décroissante est analogue.
- Soit $c \in D$ un point.
- Si $x \leq c \leq y$, alors $f(x) \leq f(c) \leq f(y)$.
- On veut montrer que si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de D tels que $\lim_n x_n = c$, alors $\lim_n f(x_n) = f(c)$ (caractérisation séquentielle de la continuité).

On a besoin d'un lemme.

Lemma

Si à partir d'un certain rang N pour tout $n \geq N$ on a $x_n \leq c$, alors $\lim_n f(x_n) = \sup_n f(x_n) = f(c)$.

Preuve.

- Si $x_n = c$ à partir d'un certain rang, il n'y a rien à démontrer.
- Supposons donc qu'il y a une infinité d'indices n tels que $x_n \neq c$.
- Comme $x_n \to c$, pour tout $r < c$ il existe N_r t.q. pour tout $n \geq N_r$ on a $x_n \in]r, c] \cap D$.
- Soit $r_1 = c - 1$. Comme il y a une infinité de $x_n \neq c$, il existe n_1 t.q. $x_{n_1} \in]r_1, c[\cap D$ et pour tout $m \geq n_1$ on a $x_m \in]r_1, c]$.
- Pour $k = 2$, on pose $r_2 = \max(c - \frac{1}{2}, x_{n_1})$. Alors, comme avant il existe n_2 t.q. $x_{n_2} \in]r_2, c[\cap D$ et pour tout $m \geq n_2$ on a $x_m \in]r_2, c] \cap D$.
- Par récurrence, on pose $r_k := \min(c - \frac{1}{k}, x_{n_{k-1}})$. Alors, on peut trouver n_k tel que $x_{n_k} \in]r_k, c[\cap D$ et pour tout $m \geq n_k$ on a $x_m \in]r_k, c[\cap D$.

- La sous-suite $(x_{n_k})_k$ est par construction strictement croissante et converge à c. De plus, pour tout k, si $m \geq n_k$ on a $x_m \geq x_{n_{k-1}}$.
- La suite $(f(x_{n_k}))_k$ est aussi croissante et bornée par $f(c)$ (car f préserve l'ordre). Elle est donc convergente.
- Posons $s := \lim_k f(x_{n_k})$.
- Soit k fixé. Pour tout $m \geq n_k$ on a $x_{n_{k-1}} \leq x_m \leq c$, et donc aussi $f(x_{n_{k-1}}) \leq f(x_m) \leq f(c)$.
- Cela prouve que pour tout k on a

$$(*) \quad f(x_{n_k}) \leq \ s \ = \lim_k f(x_{n_k}) \leq \liminf_m f(x_m) \leq \limsup_m f(x_m) \leq f(c) \ .$$

- Pour démontrer que $\lim_n f(x_n)$ existe et que $\lim_n f(x_n) = f(c)$, il suffit de montrer que $s = f(c)$.
- Si pour un k on a $f(x_{n_k}) = f(c)$, alors l'inégalité (*) prouve que $s = f(c)$.
- Si pour tout k on a $f(x_{n_k}) < f(c)$ on procède par l'absurde.
- Si par l'absurde $s < f(c)$, alors on peut trouver un nombre ℓ tel que $s < \ell < f(c)$.

- Comme $f(D)$ est un intervalle contenant $f(c)$, et comme pour tout k on a $f(x_{n_k}) \in I$ et $f(x_{n_k}) < f(c)$, alors $]f(x_{n_k}), f(c)[\subseteq f(D)$.
- Comme $f(x_{n_k}) \leq s < \ell < f(c)$, alors ℓ est dans l'image de f et il existe $y \in D$ tel que $f(y) = \ell$.
- Regardons la position de y dans D par rapport à la suite $(x_{n_k})_k$.
- Comme $(f(x_{n_k}))_k$ est une suite croissante de limite s et $\ell > s$, alors pour tout k on a $f(y) > f(x_{n_k})$.
- On ne peut donc pas avoir $y \leq x_{n_k}$ pour aucun k car cela contredit la croissance de f.
- On a donc $x_{n_k} \leq y$ pour tout k.
- D'autre part, on a $f(y) = \ell < f(c)$ et on ne peut pas avoir $y > c$ car cela contredirait la croissance de f.
- On a donc pour tout k l'inégalité

$$x_{n_k} \leq y \leq c$$

- Mais $\lim_k x_{n_k} = c$. Donc $y = c$.
- Mais cela est absurde car $f(y) = \ell \neq f(c)$.
- On a donc $s = f(c)$.**CQFD**

Démontrons maintenant le théorème :

- De même on montre que si $x_n \geq c$ pour tout n à partir d'un certain rang alors $\lim_n f(x_n) = f(c)$.
- Regardons maintenant le cas général d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de D telle que $\lim_n x_n = c$.
- Soit $A := \{n \in \mathbb{N}\ ,\ x_n \leq c\}$ et $B := \{n \in \mathbb{N}\ ,\ x_n > c\}$.
- On a déjà étudié dans le Lemme la situation où l'un des deux ensembles est fini. On peut alors supposer que A et B sont infini.
- Maintenant les deux sous-suites $(x_n)_{n\in A}$ et $(x_n)_{n\in B}$ vérifient chacune les conditions du Lemme. Donc $\lim_{n\in A} f(x_n) = f(c) = \lim_{n\in B} f(x_n)$.
- Comme $A \cup B = \mathbb{N}$, on en déduit que $\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = f(c)$.
- f est donc continue en c. Mais le raisonnement vaut pour tout point $c \in D$, donc f est continue. **CQFD**

Continuité des fonctions monotones

Le théorème suivant est une conséquence directe :

Théorème

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle. **CQFD**

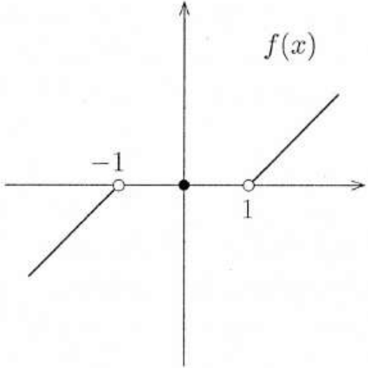
Ce résultat a une importante conséquence qui s'appelle le **théorème de la fonction inverse.**

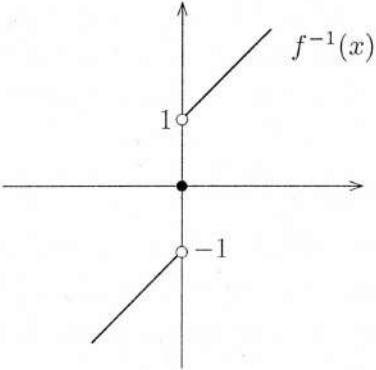
Théorème

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.Alors, f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone. Dans ce cas, si $J = f(I)$, la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue.

Ce théorème est la base pour la définition des fonctions réciproques comme $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\ldots$

Attention ! L'hypothèse que le domaine de définition I soit un intervalle est cruciale. Voici un exemple de fonction continue, injective et monotone, dont l'image est un intervalle, mais avec **inverse non continue**.





$D_f =]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[$ $\qquad$ $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$

Venons à la preuve du théorème de la fonction inverse :

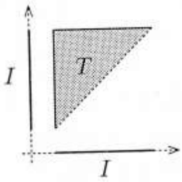
Théorème

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone. Et dans ce cas, si $J = f(I)$, la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi continue.

Preuve.

- On sait que (strictement monotone)$\Rightarrow$(injective).
- Supposons dans un premier temps d'avoir montré que si f est injective alors elle est strictement monotone, et montrons que f^{-1} est continue.
- f^{-1} est aussi strictement monotone
- De plus, l'image de f^{-1} est l'intervalle I.
- Donc, par le théorème de la continuité des fonctions monotones, f^{-1} est continue.
- Pour conclure la preuve, il suffit donc de montrer que f est strictement monotone.

- L'injectivité nous dit que pour tout $x \neq y$ on a $f(x) \neq f(y)$;C'est à dire $f(x) - f(y) \neq 0$.
- Supposons d'avoir un couple $x_0 < y_0$ tel que $f(x_0) < f(y_0)$. Alors nous voulons montrer que pour tout autre couple $x < y$ on a $f(x) < f(y)$ (croissance stricte).
- Le cas de la décroissance stricte se fait de manière analogue.
- Posons $h(x, y) := f(x) - f(y)$;
- On a $h : I \times I \to \mathbb{R}$ et $h(x_0, y_0) < 0$.
- Pour tout $x, y \in I$ on a $h(x, x) = 0$ et $h(x, y) = -h(y, x)$.
- On peut considérer la restriction de h au triangle
$$T := \{(x, y) \in I \times I \mid x < y\}$$



$(x, y) \in T$ si, et seulement si, $x < y$ et $x, y \in I$

- On sait que $h(x_0, y_0) = f(x_0) - f(y_0) < 0$ et notre problème se traduit par le fait qu'on veut montrer que $h(x, y) < 0$ pour tout $(x, y) \in T$.
- Prenons le segment qui joint (x_0, y_0) à (x, y).
- Il est donné par la fonction $s(t) : [0, 1] \to T$

$$s(t) := (\ x_0 + (x - x_0)t\ ,\ y_0 + (y - y_0)t\ )$$

- On a $s(0) = (x_0, y_0)$ et $s(1) = (x, y)$.
- De plus pour tout $t \in [0, 1]$ on a $s(t) \in T$ car

$$\Big(x_0 + (x - x_0)t\Big) - \Big(y_0 + (y - y_0)t\Big) = (x_0 - y_0) + (x - y)t + (x_0 - y_0)t$$

  qui est la somme de 3 quantités négatives.
- Considérons la fonction composée $g := h \circ s$, $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Elle est donnée par

$$g(t) \ = \ f(x_0 + (x - x_0)t) - f(y_0 + (y - y_0)t)$$

- On a $g(0) = f(x_0) - f(y_0) < 0$ et on veut montrer que

$$g(1) = f(x) - f(y) < 0.$$

- Il suffit de remarquer que g est continue car composée des fonctions continues h et s. (Encore une fois on glisse sur la topologie de $\mathbb{R}^2$ qui sera proprement introduite plus loin).
- Remarquons que si $(x, t) \in T$, alors $x < y$ et par l'injectivité $f(x) \neq f(y)$. C'est à dire

$$(x, y) \in T \quad \Longrightarrow \quad h(x, y) \neq 0 \ .$$

- En effet, l'hypothèse d'injectivité donne $g(t) \neq 0$ pour tout t, et comme $g(0) < 0$, on ne peut pas avoir $g(1) > 0$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

CQFD

Ce théorème admet la généralisation suivante (valable seulement pour les espaces compacts, mais dont la preuve est plus courte).

Théorème

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et soit $Y \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et bijective.
Alors la reciproque de f est aussi continue.

Preuve.

- f^{-1} est continue si pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$ on peut trouver un ouvert V de $\mathbb{R}$ tel que $f(U \cap K) = Y \cap V$.
- Or, $K - U = K \cap (\mathbb{R} - U)$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (car intersection de 2 fermés). On a vu qu'un fermé dans un compact est compact, donc $K - U$ est compact ;
- On a vu que l'image d'un compact par une application continue est compact, donc $f(K - U)$ est un compact de $\mathbb{R}$, en particulier $f(K - U)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- Son complémentaire $V = \mathbb{R} - f(K - U)$ est donc un ouvert. Mais alors $f(K \cap U) = Y \cap V$ comme souhaité.**CQFD**

Remarque

Partant d'un ensemble de fonctions continues $f_1, \dots, f_n$ on peut en obtenir d'autres par composition, somme, différence, produit, division, racine, multiplication des scalaires.
On a vu que le résultat de cette opérations reste continu.
La quasi-totalité des fonctions connues (polynômes et fonctions circulaires) est obtenue ainsi, à partir des seules fonctions $1, X, e^X$*.*
Ces 3 seules fonctions engendrent toutes les autres.

On peut se demander comment construire des fonctions nouvelles...
L'opération de prendre la **réciproque**, nous permet (souvent) de construire des fonctions nouvelles qui ne s'obtiennent pas de $1, X, e^X$ par les opérations indiques.

D'autres opérations qui nous permettent de trouver des nouvelles fonctions sont l'**intégration** et la **résolution d'équations différentielles et intégrales**.

Discontinuités des fonctions monotones

Terminons la partie sur les fonctions monotones avec la propriété remarquable suivante :

Théorème

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction monotone définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Notons $\Delta(f) \subseteq D$ l'ensemble des points $x \in D$ où f est **discontinue**. Alors $\Delta(f)$ est un ensemble au plus **dénombrable**.

Preuve.

- Pour tout $c \in D$, $c \notin \{\min D, \max D\}$ notons

$$f(c^-) := \lim_{x \to c^-} f(x)\ , \qquad f(c^+) := \lim_{x \to c^+} f(x)\ .$$

- f est continue en c si, et seulement si, $f(c^-) = f(c^+) = f(c)$.
- En réalité, il est suffisant d'avoir $f(c^-) = f(c^+)$, car la monotonicité de f oblige ces valeurs à coïncider avec $f(c)$.

- Si f est **discontinue** en c, alors
$$I_c :=]f(c^-), f(c^+)[$$
est un intervalle ouvert non vide.
- Si $c < c'$ alors la monotonie entraine que $I_c \cap I_{c'} = \emptyset$;
- On a alors une famille $\{I_c\}_{c \in \Delta(f)}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$;
- Le théorème découle alors du Lemme suivant, qui montre que l'ensemble $\Delta(f)$ est au plus dénombrable.

CQFD

Lemme

Toute famille $\{I_c\}_{c \in \Delta}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$ est au plus **dénombrable** (i.e. l'ensemble Δ est au plus dénombrable).

Lemme

Toute famille $\{I_c\}_{c\in\Delta}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$ est au plus **dénombrable** (i.e. l'ensemble Δ est au plus dénombrable).

Preuve.

- Pour tout $c \in \Delta$, on peut trouver dans I_c un nombre rationnel $q(c)$. (En effet, I_c est ouvert, et contient donc au moins deux nombres réels, et entre deux réels différents on trouve toujours un rationnel).
- Donc, on a une application **injective**

$$q : \Delta \to \mathbb{Q}$$

qui associe à tout c le rationnel $q(c)$.

- Cela entraine que Δ est dénombrable.

CQFD

Sur les mêmes lignées, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors, le lieu $\Delta'(f)$ où f est **non dérivable** est au plus dénombrable.

La preuve n'est pas beaucoup plus compliquée, mais demande un peu de théorie de la mesure qu'on ne verra pas dans ce cours.

Convergence uniforme

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble.

Note

Dans la suite le fait que D soit un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ne joue aucun rôle. En effet, on peut prendre un ensemble quelconque.

Notons par $F(D, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : D \to \mathbb{R}$.

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les opérations de *somme de fonctions* et *multiplication par une fonction constante*.

Une suite de fonctions pour nous est une suite $(f_n)_n$ d'éléments de l'espace vectoriel $F(D, \mathbb{R})$.

Convergence simple (ou ponctuelle)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $F(D, \mathbb{R})$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge **simplement** ou **ponctuellement** à la fonction f si, pour tout $x \in D$ on a

$$\lim_n f_n(x) = f(x) . \tag{5}$$

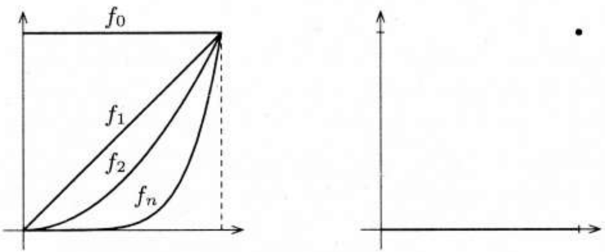
Autrement dit, pour tout $x \in D$, la suite **numérique** $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

Cette définition est presque certainement la première qui vient à l'esprit. Elle a toutefois des nombreux inconvénients. Avant tout, même si pour tout n la fonction f_n est continue, la limite f n'est pas forcement continue.

Exemple

Prenons $D = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$.

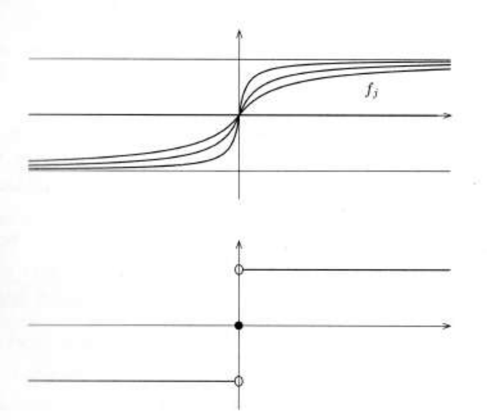
$$\lim_{j \to \infty} f_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$



Chaque f_n est continue, mais la limite ne l'est est pas.

Exemple

Prenons $D = \mathbb{R}$ et $f_n(x) := \frac{nx}{1+|nx|}$.



$$\lim_n f_n(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Chaque f_n est continue, mais la limite ne l'est est pas.

Convergence uniforme

- On souhaite **renforcer** la notion de convergence pour faire en sorte que une limite de fonction continues soit continue.
- Dans les deux exemples précédents on observe que les fonctions ne sont pas "***partout proches***" de leur limites.
- Notamment, dans le premier exemple on a $f_n(x) = x^n$ et $\lim_n f_n(x) = 0$ si $x < 1$. Mais on observe que si $x \to 1^-$ alors

  $$|x^n - 0| \to 1$$

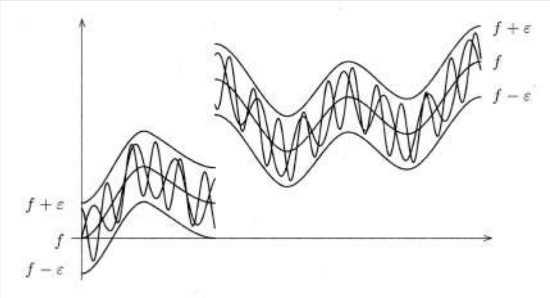
  D'une certaine manière la différence entre f_n et f ne tends pas vers zéro : f_n **n'approche pas suffisamment bien** f**.**
- L'idée de la **convergence uniforme** est de demander plus que la convergence point par point. Il faut que les fonctions f_n soient proches de f de manière **uniforme.**

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $F(D, \mathbb{R})$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément à** f si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \ , \ x \in D\} \ \leq \varepsilon \, .$$

La définition demande que le graphe de f_n soit dans un **tube** de rayon ε autour de celui de f :



Notation

Notons par $\|f_n - f\|_\infty$ la quantité

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup\{|f_n(x) - f(x)| \ , \ x \in D\}$$

qui apparait dans la définition précédente.

Nous verrons plus loin que c'est une norme.

L'exemple $f_n(x) = x^n$

- Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction limite simple des $f_n(x) = x^n$.
- On a $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = 1$.
- Dans cet exemple on a $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout n.
- En effet, comme évoqué avant
  $\sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| \ \geq \ \sup_{x\in[0,1[} |x^n - f(x)| \ = \ \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1.$
- Donc la suite $(x^n)_n$ ne converge pas uniformément à f.

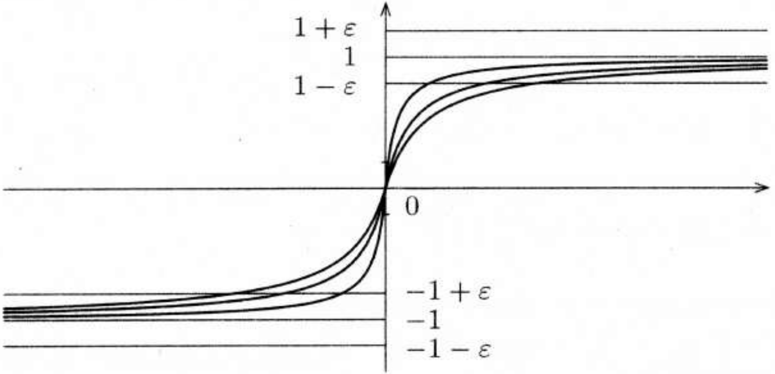
L'exemple $f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction **limite simple** des $f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}$.
- On a $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(0) = 0$, et $f(x) = 1$ si $x > 0$.
- Dans cet exemple on a aussi $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout n.
- En effet, comme avant

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &\geq \sup_{x\in]0,1[} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x\in]0,1[} \left|\frac{nx}{1+|nx|} - 1\right| = 1. \end{aligned}$$

- En effet $\lim_{x\to 0^+} |\frac{nx}{1+nx} - 1| = \lim_{x\to 0^+} |\frac{-1}{1+nx}| = 1$
- Donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément à f.

Les fonctions f_n ne rentrent pas dans le tube de rayon ε autour de f



Proposition

La convergence uniforme entraine la convergence simple.

Preuve. La condition $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ entraine $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$. **CQFD**

Remarque

Par contre, les exemples précédents montrent que la convergence simple n'entraine pas la convergence uniforme.

Proposition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues** convergeant uniformément vers une fonction $f \in F(D, \mathbb{R})$. Alors f est **continue**.

Preuve.

- Nous souhaitons montrer la continuité de f en tout point $x_0 \in D$.
- Cela revient à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un ouvert U de $\mathbb{R}$, contenant $x_0 \in D$, tel que $f(U \cap D) \subseteq]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.
- Autrement dit pour tout $x \in U \cap D$ on doit avoir $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Maintenant, pour tout n on peut écrire

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$.

1) Par la convergence uniforme, on peut trouver N_ε t.q. pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$;

- Cela revient à $|f(x') - f_n(x')| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x' \in D$;
- En particulier pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ independammant du choix de $x \in D$.
- D'autre part, comme f_n est continue en x_0, on peut trouver un ouvert U de $\mathbb{R}$ contenant x_0 tel que $f_n(U \cap D) \subseteq]f(x_0) - \varepsilon/3, f(x_0) + \varepsilon/3[$;
- Autrement dit, pour tout $x \in U \cap D$ on a $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$;
- On vient de montrer que si $x \in U \cap D$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

CQFD

Continuité uniforme

En topologie, la **continuité uniforme** (ou l'**uniforme continuité**) est une propriété plus forte que la continuité, et se définit dans les espaces métriques ou plus généralement les espaces uniformes. Contrairement à la continuité, la continuité uniforme n'est pas une notion « purement topologique » c'est-à-dire ne faisant intervenir que des ouverts : sa définition dépend de la distance ou de la structure uniforme.

Définition

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **uniformément continue** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D \qquad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Remarque

Toute fonction uniformément continue est continue. En effet la continuité “simple” s’écrit $\forall x \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_x > 0$ tel que

$$\forall y \in D \qquad (|x - y| < \delta_x \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Ici x est fixe, et δ_x dépendent de ε et *aussi du point x.*
Le terme **uniforme** dans le définition précédente signifie que ε et δ sont indépendants du choix du point.

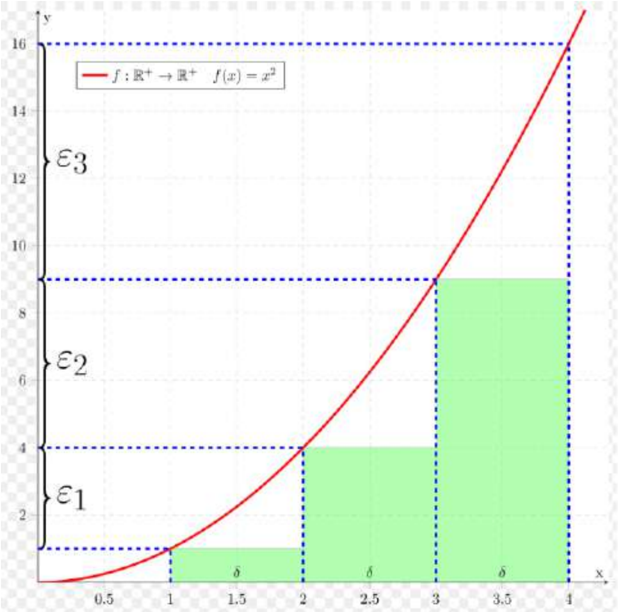
Plus précisément

- On a vu que $f : D \to \mathbb{R}$ est **continue** si pour n'importe quel choix de $\varepsilon > 0$ on peut trouver pour tout x un $\delta_{x,\varepsilon}$ (dépendant de x et ε) tel que

$$f(]x - \delta_{x,\varepsilon}, x + \delta_{x,\varepsilon}[\cap D) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$$

- La fonction est uniformément continue si le choix de $\delta_{x,\varepsilon}$ ne dépend pas de x.
- C'est à dire que étant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver un δ qui fonctionne pour tout x **simultanément.**

Example : La fonction $f(x) = x^2$, n'est pas uniformément continue.



L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. En effet, montrons que :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \delta \text{ et } |g(x) - g(y)| > \varepsilon.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon = 2$. Pour tout $\delta > 0$, soit x (resp. y) le réel égal à $\frac{1}{\delta} + \delta$ (resp. $\frac{1}{\delta}$). Alors :

$$|x - y| \leq \delta \quad \text{et} \quad |g(x) - g(y)| = \left(\frac{1}{\delta^2} + 2\delta\frac{1}{\delta} + \delta^2\right) - \frac{1}{\delta^2} = 2 + \delta^2 > \varepsilon$$

ce qui termine la démonstration.

Remark : Le fait d'avoir pris $\varepsilon = 2$, a un rapport avec l'exposant de x^2. Plus précisément nous verrons que ça a un rapport avec la dérivée.

Remarque

La même fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle borné.

En effet, on peut observer que dans la preuve de l'énoncé précédent , le point $x = \frac{1}{\delta} + \delta$ est arbitrairement grand quand $\delta \to 0$. Donc la preuve ne marche plus si on impose que x soit dans un intervalle borné.

En effet, nous verrons dans un instant qu'elle est UC sur tout **intervalle bornée.**

Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ est UC

- On a vu que $f^{-1}(x) = x^2$ n'est pas UC ;

- On montre maintenant que $f(x) = \sqrt{x}$ est UC ;
- Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in [0, \infty[$. Notons $f(x) = \sqrt{x}$, et $D = [0, +\infty[$.
- On cherche l'image réciproque de $]f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon[$.
- On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(]f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon[) &=](\sqrt{c} - \varepsilon)^2, (\sqrt{c} + \varepsilon)^2[\cap D \\ &= \begin{cases} [0, (\sqrt{c} + \varepsilon)^2[& \text{si} \quad \sqrt{c} - \varepsilon < 0 \\ ](\sqrt{c} - \varepsilon)^2, (\sqrt{c} + \varepsilon)^2[& \text{si} \quad \sqrt{c} - \varepsilon \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Le maximum δ tel que $f(]c-\delta, c+\delta[\cap D) \subseteq]f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon[$ est alors
$$\delta \leq (\sqrt{c}+\varepsilon)^2 - c\,.$$
- On a
$$(\sqrt{c}+\varepsilon)^2 = c + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{c}$$
Donc on voit que $\delta = \varepsilon^2$ vérifie pour tout $c \in [0, +\infty[$ la condition $f(]c-\delta, c+\delta[\cap D) \subseteq]f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon[$.
- Comme $\delta = \varepsilon^2$ ne dépend pas du choix de c (il peut être choisi uniformément), alors $f(x) = \sqrt{x}$ est UC.

On a vu que $f(x) = x^2$ n'est pas UC sur $\mathbb{R}$. Toutefois, elle est UC sur tout **intervalle bornée.**

Cela découle du résultat suivant qui est une propriété ultérieure des espaces compacts :

Théorème (de Heine)

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si D est compact, alors f est uniformément continue.

Preuve. La continuité de f se traduit par le fait que, pour tout $x \in D$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta_{x,\varepsilon}$ (dépendant du choix de x et de ε) tel que $|x - y| \leq \delta_{x,\varepsilon} \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

- On a vu que cela se traduit par
$$f(]x - \delta_{x,\varepsilon}, x + \delta_{x,\varepsilon}[\cap D) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) - \varepsilon[.$$
- Cela est vrai $\forall \varepsilon > 0$, en particulier pour $\varepsilon/2$.
- On a donc un recouvrement $D \subseteq \bigcup_{x \in D}]x - \delta_{x,\frac{\varepsilon}{2}}, x + \delta_{x,\frac{\varepsilon}{2}}[$.
- On va réduire la taille de ces intervalles de moitié. Ça reste un recouvrement : $D \subseteq \bigcup_{x \in D}]x - \beta_{x,\varepsilon}, x + \beta_{x,\varepsilon}[$, où $\beta_{x,\varepsilon} := \frac{1}{2}\delta_{x,\frac{\varepsilon}{2}}$.
- Comme D est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini : $D \subseteq]x_1 - \beta_{x_1,\varepsilon}, x_1 + \beta_{x_1,\varepsilon}[\cup \cdots \cup]x_n - \beta_{x_n,\varepsilon}, x_n + \beta_{x_n,\varepsilon}[$.
- Prenons $\delta := \min(\beta_{x_1,\varepsilon}, \ldots, \beta_{x_n,\varepsilon})$.
- Maintenant, j'affirme que pour tout couple de points x, y vérifiant $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (ce qui conclut la preuve).
  - En effet, comme $\cup_i]x_i - \beta_{x_i,\varepsilon}, x_i + \beta_{x_i,\varepsilon}[$ est un recouvrement on peut trouver x_i tel que $|x - x_i| < \beta_{x_i,\varepsilon}$.
  - De plus, pour ce choix de x_i on a $|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| \leq \delta + \beta_{x_i,\varepsilon} \leq 2\beta_{x_i,\varepsilon} \leq \delta_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$
  - Donc la continuité donne $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. **CQFD**

On a une autre preuve qui fait intervenir la compacité sequentielle.
Preuve.

- Soit $\varepsilon > 0$. Supposons par l'absurde qu'on ne puisse pas trouver un $\delta > 0$ (uniforme) tel que $|x - y| \leq \delta$ entraine $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- Cela signifie que pour tout δ choisi, on peut trouver $x, y \in D$ tels que $|x - y| \leq \delta$, mais $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
- Prenons $\delta_n := \frac{1}{n}$. Alors, pour tout n, on peut trouver $x_n, y_n \in D$ tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$, mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.
- Comme D est sequentiellement compacts, on peut extraire de le suite $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge dans D : $\lim_k x_{n_k} = \overline{x} \in D$;
- Maintenant, $lim_k y_{n_k} = \overline{x}$ car $|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k}$ tends vers zéro ;
- f étant continue en $\overline{x}$, on peut trouver $\delta_{\overline{x}}$ tel que $\forall z \in D$ si $|z - \overline{x}| \leq \delta_{\overline{x}}$, alors $|f(z) - f(\overline{x})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- Mais pour k tendant vers l'infini, x_{n_k} et y_{n_k} tendent vers $\overline{x}$, donc pour k suffisamment grand on a $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f(y_{n_k})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- Cela contredit le fait que $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ pour tout n. **CQFD**

Les fonctions continues et périodiques sont uniformément continues

Proposition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique est uniformément continue.

Preuve.

- Si τ est le période de f, pour tout x on a $f(x+\tau) = f(x)$.
- Donc $|f(x) - f(y)| = |f(x+k\tau) - f(y)|$ et on peut supposer que $|x-y| \leq \tau$.
- Plus précisément, si $a \in \mathbb{R}$ est un point fixé, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle l'est sur l'intervalle $I := [a, a+\tau]$.
- Maintenant, I est compact et donc la restriction de f à I est uniformément continue.

CQFD

Théorème

- La somme de fonctions réelles de variable réelle qui sont UC est UC ;
- Le produit de fonctions réelles de variable réelle qui sont **bornées** et UC est UC ;
- Compositions de fonctions UC sont UC.

Nous renvoyons aux TD pour la preuve.

Remarque - Contrexemple

Soit $f : I \to J$ une fonction UC et bijective entre intervalles réels.
Puisque f est continue, on a vu qu'elle est forcement strictement croissante et $f^{-1} : J \to I$ est **continue**.
Malheureusement, f^{-1} peut ne pas être UC.
Un exemple est donné par $I = J =]0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ et $f^{-1}(x) = x^2$.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue.

Alors, il existe des réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leqslant ax + b$

Preuve.

Fixons $\varepsilon = 1$.

Par hypothèse : $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Soit n le plus petit entier positif tel que: $\frac{x}{n} \leqslant \eta$

De manière équivalente, n est le plus petit entier positif tel que

$$n - 1 < \frac{x}{\eta} \leq n.$$

En particulier, $n < \frac{x}{\eta} + 1$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'hypothèse d'uniforme continuité nous permet d'écrire :

$$\left| f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right| \leqslant 1$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right| \leqslant n$$

Mais d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right) \right|$$

On a donc :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant n \leqslant \frac{x}{\eta} + 1$$

En particulier :

$$f(x) \leqslant \frac{x}{\eta} + 1 \pm f(0)$$

Il suffit de poser $a = \dfrac{1}{\eta}$ et $b = 1 \pm f(0)$ pour achever la démonstration.

CQFD

Application : par contraposition, on a :

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ n'est pas majorée par une fonction affine sur $\mathbb{R}_+$, alors elle n'est pas u-continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par exemple, les fonctions polynômes de degré supérieur ou égal à 2 ne sont pas u-continues sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$ existent. Alors, f est uniformément continue.

Preuve.

- Soient ℓ_- et ℓ_+ les limites de f à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.
- Soit $\varepsilon > 0$.
- Pour tout $b > 0$, on sait que f est UC sur $[-b, b]$.On peut donc trouver δ_b t.q. si $x, y \in [b, b]$ et $|x - y| \leq \delta_b$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- Par ailleurs, par définition de limite, il existe $a > 0$ tel que si $x > a$ alors $|f(x) - \ell_+| < \varepsilon/2$ et si $x < -a$ alors $|f(x) - \ell_-| < \varepsilon/2$.
- Si $x, y > a$, on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell_+| + |f(y) - \ell_+| = \varepsilon$;
- De même, quitte à agrandir a si $x, y < a$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$;
- Maintenant, on peut supposer $\delta_b < 1$ (car on a droit de le diminuer si l'on veut sans changer la propriété.)
- En prenant $b = a + 1$, on trouve que quand $|x - y| < \delta_b$, on a soit $x, y < a$, soit $x, y \in [-b, b]$, soit $x, y > a$.
- Dans les trois cas, on a vu que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

CQFD

Prolongement par continuité pour les fonctions UC

Théorème (prolongement par continuité des fonctions UC)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, $\overline{D}$ son adhérence, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction **uniformément continue**. Alors f admet une unique extension **uniformément continue**

$$\widetilde{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}.$$

De plus, si $x_0 \in \overline{D}$ alors la limite $\lim_{x \to x_0, x \in D} f(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un point y_0 et on a

$$\widetilde{f}(x_0) = y_0 \ .$$

On verra plus loin la preuve de ce théorème dans le cadre plus général des espaces normés complets.
En effet les plus importantes applications de ce théorème consistent à prolonger les fonctions linéaires.

Fonctions Lipschitziennes

En analyse mathématique, une **application lipschitzienne** (du nom de Rudolf Lipschitz) est une application possédant une certaine propriété de *régularité* qui est plus forte que la continuité. Intuitivement, c'est une fonction qui est limitée dans sa manière d'évoluer. Tout segment reliant deux points du graphe d'une telle fonction aura une pente inférieure, en valeur absolue, à une constante appelée *constante de Lipschitz*.

Pour fixer les idées, nous avons les implications suivantes

$$f' \text{ bornée} \implies f = \text{Lipschitzienne} \implies f = \text{UC} \implies f = \text{Continue}$$

Fonctions Lipschitziennes

Définition

Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

f est dite **lipschitzienne** sur I si, pour une certaine constante k :

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|.$$

la constante k est dite *une* constante de Lipschitz pour f, et la plus petite constante k de ce type est dite *la* constante de Lipschitz de f.

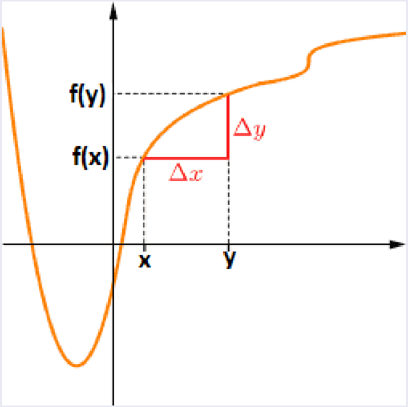
Proposition

Une fonction Lipschitzienne est (uniformément) continue.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\delta := \varepsilon/k$, où k est une constante de Lipschitz pour f. Alors pour tout $x, y \in I$ tels que $|x - y| \leq \delta$, on a $|f(y) - f(x)| \leq k|x - y| \leq k \cdot \delta = \varepsilon$. **CQFD**

La condition de Lipschitz peut s'écrire comme

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{x - y} \right| \leq k \ .$$



Ce sont les fonctions dont le graphe n'est pas trop *escarpé*.

- De manière informelle, l'intuition nous suggère que les fonctions Lipschitziennes sont celles qui ont une dérivée bornée.
- Toutefois, une fonction peut être lipschitzienne sans être dérivable (par exemple $f(x) = |x|$).
- Le théorème suivant démontre que si f est dérivable, cette intuition est correcte

Théorème

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors

$$f \text{ est lipschitzienne sur } I \text{ de constante de Lipschitz } k \iff \forall x \in I, \quad f'(x) \leq k$$

Démonstration :

$\Rightarrow$ Supposons f lipschitzienne sur I : $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$

Soit $x \in I$. Comme : $\forall y \in I$ $\qquad -k \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant k$

On déduit, par passage à la limite lorsque y tend vers x :

$$-k \leqslant f'(x) \leqslant k$$

Ceci, quelque soit $x \in I$. Donc f' est bornée sur I.

$\Leftarrow$ Supposons f' bornée : $\qquad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in I, |f'(t)| \leqslant M.$

Soit $(x, y) \in I^2$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur le segment $[x, y]$:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M|x - y|$$

Donc f est M-lipschitzienne.

Ce résultat n'est plus vrai si le domaine de définition de f n'est pas un intervalle.

En effet, la fonction $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ définie sur $D := \mathbb{R} - \{0\}$ est dérivable sur D avec dérivée nulle, mais elle n'est pas Lipschitzienne.

Lieu de dérivabilité des fonctions Lipschitziennes

Proposition

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Alors, le lieu des points où f n'est pas dérivable est au plus **dénombrable**.

Preuve.

- On a vu (sans preuve) que cette propriété vaut pour les fonctions monotones.
- Si k est une constante de Lipschitz pour f, alors la fonction $g(x) := f(x) + kx$ est **croissante** ; En effet, si $x < y$ $g(y) - g(x) = f(y) - f(x) + k(y - x)$ et comme $|f(y) - f(x)| \leq k(y - x)$ on trouve $g(y) - g(x) \geq 0$.
- Donc g est dérivable presque partout (i.e. le lieu de non dérivabilité est un ensemble au plus dénombrable).
- Donc $f(x) = g(x) - kx$ aussi.

CQFD

Le théorème du point fixe

Théorème du point fixe

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que

1. I est un intervalle **fermé** ;
2. $f(I) \subseteq I$;
3. $f : I \to I$ est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $\underline{k < 1}$ (une telle fonction est dite contractante).

Alors on peut trouver un unique $x \in I$ tel que

$$f(x) = x \ .$$

De plus, pour tout $a \in I$, la suite $(a_n)_n$ définie par la relation de récurrence $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ converge vers x.

Preuve.

- **Unicité de x.** Si x, x' sont deux point fixes, alors $|x - x'| = |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$. Comme $k < 1$, cela est possible si, et seulement si, $|x - x'| = 0$. Donc $x = x'$.

Existence.

- Soit $a \in I$. Soit $q := |f(a) - a|$.
- J'affirme que pour tout $n \geq 1$ on a
$$|a_n - a_{n-1}| \leq k^{n-1} \cdot q.$$
- En effet, si $n = 1$ cela est juste $|a_1 - a_0| \leq |f(a) - a|$ ce qui est vérifié puisque $f(a) = a_1$.
- Maintenant par récurrence, si la propriété est vraie pour $n \geq 1$, alors pour $n+1$ on a
$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq k|a_n - a_{n-1}| \leq k \cdot k^{n-1} \cdot q = k^n q$$
- Maintenant, la suite $(a_n)_n$ converge car elle est de Cauchy.
- En effet, si $0 \leq m < n$ on a la majoration
$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_{m+1} - a_m)| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\ &= \sum_{s=m}^{n-1} |a_{s+1} - a_s| \leq \sum_{s=m}^{n-1} k^s \cdot q = q \cdot \frac{k^n - k^m}{k-1} . \end{aligned}$$

- On vient de voir que pour tout $0 \leq m < n$ on a
$$|a_n - a_m| \leq q \cdot k^m \cdot \frac{k^{n-m} - 1}{k - 1} \leq q \cdot k^m \frac{1}{1 - k}$$
- Comme $k < 1$ la quantité de droite tends vers 0 pour m assez grand (et $n > m$ arbitraire).
- Cela montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver N_ε tel que pour tout $n \geq m \geq N_\varepsilon$ on a $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.
- La suite est donc de Cauchy et converge dans $\mathbb{R}$. Soit x sa limite.
- Comme c'est une suite d'éléments de I, qui est fermé, alors x appartient à I.
- Comme f est continue, on a $f(\lim_n a_n) = \lim_n f(a_n)$.Mais $f(a_n) = a_{n+1}$. Donc
$$f(x) = f(\lim_n a_n) = \lim_n f(a_n) = \lim_n a_{n+1} = x\ .$$

CQFD

La fonction $f(x) = \sin(\pi x/2)$ est définie sur $[0,1]$ et a ses valeurs dans $[0,1]$. Elle a pour dérivée $f(x)' = \frac{\pi}{2}\cos(\pi x/2)$. Donc

$$f'(x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par le résultat précédent, f' est Lipchitzienne sur $[0,1]$, l'intervalle $[0,1]$ est fermé et stable par f. Il y a donc un unique point x tel que $f(x) = x$. En effet ce point est $x = 0$.

Attention aux erreurs !

Les 3 hypothèses sont nécessaires, voici des exemples :

I n'est pas stable par f, i.e. $f(I) \not\subseteq I$

Prenons $I = [0, 1]$ et $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
On a bien

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \implies \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| < 1$$

donc la constante de Lipschitz est < 1. Mais f n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$. Autrement dit $[0, 1]$ n'est pas stable par f.

f n'est pas contractante

Prenons $I = [0, +\infty[$ et $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
On a bien $f(I) \subseteq I$, et I fermé, mais maintenant $\sup_{x \in [0,+\infty[} |f'(x)| = 1$, donc la constante de Lipschitz est 1 et f n'est pas contractante.

I n'est pas fermé

Prenons $I =]0, \pi/2]$ et $f(x) = \sin(x)/2$.
On a bien $f(I) \subseteq I$, et $\sup_{x \in]0,\pi/2]} f'(x) = 1/2 < 1$, de sorte que f est contractante. Mais I n'est pas fermé et en effet le point fixe est censé être $x = 0 \notin I$.

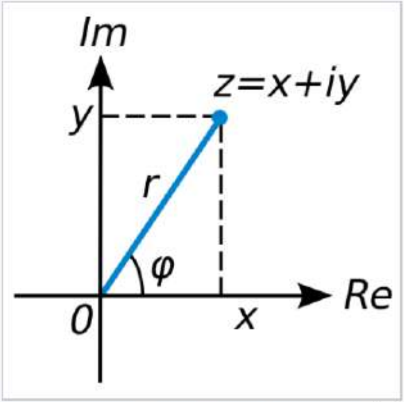
Espaces vectoriels

Rappels sur le corps des nombres complexes

Je rappelle que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes a les propriétés suivantes.

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- En tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ la dimension de $\mathbb{C}$ est égale à 2 ;
- Chaque élément $z \in \mathbb{C}$ a deux types de représentations :
    - Repr. vectorielle : $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$;
    - Repr. polaire : $z = r \cdot e^{i\varphi}$, avec $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
- La somme est la somme de vecteurs : $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$;
- Le produit est donné par $r \cdot e^{i\varphi} \cdot r' \cdot e^{i\varphi'} = rr'e^{i\varphi+\varphi'}$ ou

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$



Représentation graphique du complexe $x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ à l'aide d'un vecteur. Mise en évidence de l'interprétation graphique de son module r et d'un de ses arguments φ.

Dans la suite, tout ce qu'on va dire est vaut pour des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.
Pur cette raison nous notons par $\mathbb{K}$ le corps de base, qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemples d’espaces vectoriels

- Le premier exemple est $\mathbb{K}$;
- Puis on a les espaces $\mathbb{K}^n$.Les éléments de $\mathbb{K}$ sont des n-uplets $(k_1, \ldots, k_n)$, avec $k_i \in \mathbb{K}$ pour tout i ;
- Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ pour un n convenable ;
- Les **espaces de matrices** $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ sont des EV isomorphes à $\mathbb{K}^{nm}$;
- Let **espaces de suites** à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont notés $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Ce sont des uplets de longueurs infinie $(k_0, k_1, k_2, \ldots)$ la somme et la multiplication par scalaire se font composante par composante ;
- L’espace $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites n’ayant qu’un nombre fini de composantes non nulles.
- L’espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$. C’est isomorphe à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.
- L’espace des polynômes à plusieurs indéterminées $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

Exemples d’espaces vectoriels

Un exemple très important qui englobe tous les espaces précédents, est celui des espaces de fonctions.

- Soit X un ensemble.
- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- On note par $F(X, E)$ l’ensemble des fonctions $f : X \to E$.
- Alors, $F(X, E)$ muni des opérations suivantes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: soient $f, g \in F(X, E)$ et $k \in \mathbb{K}$, alors
  - $f + g$ est par définition la fonction qui à tout $x \in X$ associe $f(x) + g(x)$ (somme de vecteurs dans E) ;
  - $k \cdot f$ = est par définition la fonction qui à tout $x \in X$ associe $k \cdot f(e)$ (multiplication des scalaires dans E) .

Exemples d'espaces vectoriels

Un autre espace très important.

Fonctions linéaires

- Soit E, V deux espaces vectoriels.
- On note par $L(V, E)$ le sous-espace de $F(V, E)$ (défini juste avant) formé par les fonction linéaires.
- Si E et V sont de dimension finie, alors $L(V, E)$ est de dimension finie égale à nm où $n = (\dim E)$ et $m = (\dim V)$, et est isomorphe à l'espaces des matrices $M_{n \times m}(\mathbb{K})$.

Normes sur un espace vectoriel

Définition de norme

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Une **semi-norme** sur X est la donnée d'une application

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}_+^*$$

telle que

(N_1) pour tout $x, y \in X$ on a
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

(N_2) pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$ (resp. $r \in \mathbb{C}$) on a
$$\|r \cdot x\| = |r| \cdot \|x\|;$$

On dit que $\|.\|$ est une **norme** si elle vérifie la propriété suivante

(N_3) $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

La notion de *norme* est la généralisation aux espaces vectoriels la notion de valeur absolu.