MAT302 : Séries et intégrales généralisées — Université Grenoble Alpes
2020-2021

TD n° 5 : Intégrales généralisées

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

*** Définitions à connaître par cœur**

Définition de la convergence d'une intégrale généralisée.

Définition de l'absolue convergence d'une intégrale généralisée.

*** Propriétés à connaître par cœur**

Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives.

La convergence absolue entraîne la convergence.

Exercice 1. * Intégration par parties
Déterminer une primitive F de la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ t & \mapsto & t^2e^{-t} \end{array}$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et déterminer sa valeur.

Exercice 2. * Une fraction rationnelle

1. Calculer pour $X > 0$:
$$I(X) = \int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$$
2. Quelle est la limite lorsque $X \to +\infty$ de $I(X)$? Que peut-on donc dire de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$?

Exercice 3. *Changement de variable
Soit $X \in [0,+\infty[$. Calculer $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ puis déterminer la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$.

Exercice 4. ** Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+1}\,dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}e^{-x}\,dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\,dx$;
8. $\displaystyle\int_1^{\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1})\,dx$;

Exercice 9. *** $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ **n'est pas absolument convergente**
Pour tout $n \geq 1$, on pose :
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt\ .$$

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin(x)| \geq a$.
2. En déduire un réel $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ est divergente.

Exercice 10. ** Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\cos x}{\ln(x)}\, dx$;
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)}\, dx$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \sin(\frac{1}{t})\, dt$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\frac{2}{x})}{x}\, dx$.

Exercice 11. *** $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha)\, dt$ **pour une fonction périodique de moyenne nulle**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 1, et telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle compact est bornée sur cet intervalle.

1. Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, dt$ converge pour tout $\alpha \in]0, 1[$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha)\, dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{t})\, dt$ est divergente.

Exercice 12. ** Avec paramètre

1. Étudier suivant les valeurs de α et β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$.
2. Même question avec $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

Exercice 13. ** Astuce

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ converge.
2. En faisant le changement de variable, $t = \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale précédente.

Exercice 14. ** Exercice seconde session 2017

1. Montrer que pout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$.
   Soit $a > -1$.
   Montrer en faisant le changement de variable $x = \tan t$ que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.
2. Montrer que $\int_0^\pi \frac{dt}{1+a\sin^2 t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a\sin^2 t}$.
3. Soit $u_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2 t}$ où α est un réel strictement positif.
   Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 2$.
4. Soit $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$. Etudier la convergence de la série de terme général v_n.
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$?

CRITERES DE CONVERGENCE

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, CONTINUES

0

I = INTERVALLE $= [a, b[$ b FINI OU INFINI

1) COMPARAISON : HYPOTHESE : $f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in I$

Si $\forall x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ ALORS

$$\int_I f \text{ CONVERGE} \Longrightarrow \int_I g \text{ CONVERGE}$$

$$\int_I f \text{ DIVERGE} \Longleftarrow \int_I g \text{ DIVERGE}$$

---

2) EQUIVALENCE HYPOTHESE : $\forall x \in I$, $f(x), g(x) \geq 0$.

ET $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$. Alors

$$\int_I f \text{ CONVERGE} \Longleftrightarrow \int_I g \text{ CONVERGE}$$

---

3) Soit $(x_n)_n$ UNE SUITE DE POINTS DANS I

t.q. $\forall n \quad x_n < x_{n+1}$, $\lim_n x_n = b$.

HYPOTHESE $f(x) \geq 0, \forall x \in I \Longrightarrow \left(\int_I f \text{ CONV.} \Longleftrightarrow \sum_{n \geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt \text{ CONVERGE} \right)$

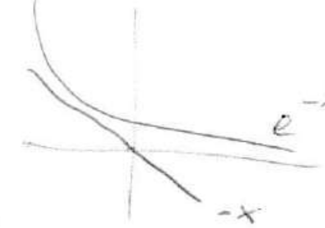
$\boxed{EX. 4}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx$

1

- $\dfrac{\ln(x)}{x+e^{-x}} \geq 0, \ \forall x \geq 1$.

- $\dfrac{\ln(x)}{x+e^{-x}}$ EST CONTINUE SUR SON DOMAINE DE DEFINITION D_f

- $x+e^{-x}=0 \iff -x=+e^{-x}$



SI $y=-x$
CELA EQUIVAUT À
$y=e^{y}$ QUI N'A AUCUNE SOLUTION

$\Rightarrow D_f =]0,+\infty[\Rightarrow$ $\boxed{\text{L'INTEGRALE CONVERGE EN 1}}$

- Comme $\dfrac{\ln(x)}{x+e^{-x}} \geq 0$ ON PEUT UTILISER LA COMPARAISON ET L'EQUIVALENCE.

- ON A $\dfrac{\ln(x)}{x+e^{-x}} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$ CAR e^{-x} EST NEGLIGEABLE PAR RAPPORT À X.

~~ON A~~ DONC $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx$ A MEME NATURE À L'∞ DE $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

• $\frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ SI $x \geq e$.

2

DONC $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \underbrace{\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx}_{(1)} + \underbrace{\int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{(2)}$

(1) CONVERGE CAR $\frac{\ln(x)}{x}$ EST CONTINUE SUR L'INTERVALLE $[1, e]$ QUI EST FERMÉ ET BORNÉ.

(2) DIVERGE CAR IL EST MINORÉ PAR $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ QUI DIVERGE.

DONC $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}} dx$ DIVERGE.

EX. 4.3 ON PEUT IMMÉDIATEMENT AFFIRMER QUE

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}} dx$ DIVERGE, CAR ÇA DIVERGE EN $+\infty$.

4.2 $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx$

3

• COMME AVANT, LA FONCTION EST CONTINUE ET DÉFINIE EN UN INTERVALLE FERMÉ CONTENANT 1, DONC ELLE CONVERGE EN 1.

• $\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}} < 0, \forall x \in]0,1]$.

$\Rightarrow$ ON PEUT APPLIQUER LA COMPARAISON.
(QUI FONCTIONNE SI LA FONCTION EST TOUJOURS POSITIVE, OU TOUJOURS NÉGATIVE)

PLUS PRÉCISÉMENT

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx \text{ CONVERGE} \Leftrightarrow \int_0^1 \left|\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\right| dx \text{ CONVERGE}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx = -\int_0^1 -\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx$$

$$\int_0^1 \left|\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\right| dx = +\int_0^1 \underbrace{-\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}}_{\geq 0}\,dx$$

OR $\int_0^1 -\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx$ CONVERGE CAR

9

$$\left(-\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \left(-\ln(x)\right)$$

ET $\int_0^1 -\ln(x)\,dx$ CONVERGE.

POUR LE VOIR ON A 2 METHODES

(1) UNE PRIMITIVE DE $-\ln(x)$ EST

$(-x\ln(x)+x)$ ET DONC

$$\begin{aligned}
\int_0^1 -\ln(x)\,dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 -\ln(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to 0^+} \Big[-x\ln(x)+x\Big]_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0^+} 1-\left(-t\cdot\ln(t)+t\right) \\
&= 1+\lim_{t\to 0^+} t\cdot\ln(t) - t = 1
\end{aligned}$$

$t\cdot\ln(t) = \frac{\ln(t)}{1/t} \Rightarrow$ REGLE DE L'HOPITAL

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1/t}{-1/t^2} = -t \longrightarrow 0\right) \Rightarrow \left(t\ln(t)\longrightarrow 0\right)$$

(2) DEUXIEME METHODE : CHANGEMENT DE VARIABLE

5

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx \underset{\substack{x=e^t \\ dx=e^t dt \\ t=\ln x}}{=} \int_{t=-\infty}^{t=0} t\cdot e^t\cdot dt \underset{P.P.}{=} \left[t e^t\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^t dt$$

$$= \Big(0 - \underbrace{(\lim_{t\to-\infty} t e^t)}_{=0}\Big) - \left[e^t\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= -\Big(e^0 - \underbrace{\lim_{t\to-\infty} e^t}_{=0}\Big) = -1 .$$

$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x)\,dx$ CONVERGE.

CONCLUSION : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\,dx$ CONVERGE.

5

4.4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2+1}\,dx$

- LA FONCTION EST CONTINUE, POSITIVE, DEFINIE SUR $\mathbb{R}$. DONC L'INTEGRALE CONVERGE EN 1.

- ~~À L'INFINI~~ DE PLUS ON PEUT APPLIQUER LES CRITERES.

- À L'INFINI ON A

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ CONVERGE PAR EQUIVALENCE

$\Downarrow$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\,dx$ CONVERGE PAR COMPARAISON.

$\boxed{4.5}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 7

$f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ EST CONTINUE ET POSITIVE SUR $]0,+\infty[$

CONVERGENCE EN 0 : $e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1 \Rightarrow \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

COMME $f(x) \geq 0$ ON PEUT APPLIQUER L'ÉQUIVALENCE.

L'INTEGRALE CONVERGE EN 0 SI, ET SEULEM. SI, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE EN 0.

ON SAIT QUE $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ CONVERGE EN 0.

CONVERGENCE À L'∞ :

$$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{x^2}$$

POUR x ASSEZ GRAND

CROISSANCES COMPARÉES

EN EFFET : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{x}} = 0$

• PAR LA DEFINITION DE LIM.

8

$\exists M > 0$ t.q. $\forall x \geq M$ ON A

$$x^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{x}} \leq 1$$ (EN PRENANT $\varepsilon = 1$ DANS LA DEFINITION DE LIMITE)

• $\Rightarrow \forall x \geq M$, $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$

PAR COMPARAISON $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ CONVERGE

CAR IL EST MAJORÉ PAR $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ QUI EST UN INTEGRALE DE RIEMANN CONVERGENT

• REMARQUE: $\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}$

$\Rightarrow -2 \cdot e^{-\sqrt{x}}$ EST UNE PRIMITIVE DE $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \int_0^X \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \left[-2 e^{-\sqrt{t}}\right]_0^X = -2 e^{-\sqrt{X}} - 2 \cdot e^0 = -2\left(e^{-\sqrt{X}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{X \to +\infty} +2\left(1 - \underset{\downarrow 0}{e^{-\sqrt{X}}}\right) = 2$$

CECA DONNE UNE AUTRE PREUVE DE LA CONVERGENCE

EX. 4. 6

9

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} e^{-x}\, dx$$

CONVERGENCE EN X=1 : $\ln(x) \longrightarrow 0$, $\frac{1}{x} \longrightarrow 1$, $e^{-x} \longrightarrow \frac{1}{e}$.

LA FONCTION EST ALORS CONTINUE EN $[1,+\infty[$ ET CONVERGE EN 1.

CONVERGENCE EN $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\}$$

GLOBALEMENT, LES CROISSANCES COMPARÉS MONTRENT QUE e^{-x} L'EMPORTE

EN EFFET :

$$\frac{\frac{\ln(x)}{x} e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = x \ln(x)\, e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

COMME AVANT ~~...~~, LA DEFINITION DE LIMITE NOUS DIT QUE $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ t.q. $\forall x \geq M$

$$|x \ln(x) e^{-x}| \leq \varepsilon$$

$\longrightarrow$

EN PRENANT $\varepsilon = 1$ ON TROUVE $\forall x \geq M$

10

$$\left| x \, \frac{\ln(x)}{\cancel{x}} \, e^{-x} \right| \leq 1 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\ln(x)}{x} e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}}}$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} e^{-x} \, dx$ <u>CONVERGE</u> CAR $\int_M^{+\infty} \frac{\ln(x) e^{-x}}{x} dx$ EST MAJORÉ PAR $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ À L'INFINI.

<u>EX 4.7</u>

$$\int_0^{+\infty} \left(x+2 - \sqrt{x^2+4x+1} \right) dx$$

- $x^2+4x+1 \leq x^2+4x+4 = (x+2)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+4x+1} \leq \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$

$$\boxed{\Rightarrow x+2 - \sqrt{x^2+4x+1} \geq 0, \ \forall x \geq 0.}$$

DONC ON PEUT FAIRE DE LA COMPARAISON.

~~IL EST PLUS SIMPLE DE RAISONNER AVEC DES QUANTITÉS POSITIVES.~~

~~REGARDONS DONC L'INTEGRALE~~

CONVERGENCE EN 0 :

(11)

$x^2+4x+1 \geq 0 \iff ?$

SI z_1, z_2 SONT LES RACINES DU POLYNOME

$\Rightarrow x^2+4x+1 \geq 0 \iff x \leq z_1 , x \geq z_2$.

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \begin{cases} \frac{-4+\sqrt{12}}{2} < 0 \\ \frac{-4-\sqrt{12}}{2} < 0 \end{cases}$$

AUTRE METHODE : $x^2+4x+1 = (x^2+4x+4)-3$

$= (x+2)^2 - 3 = 0$

$\Updownarrow$

$(x+2)^2 = 3$

$x+2 = \pm\sqrt{3}$

$\boxed{x = -2 \pm \sqrt{3}}$

LA FONCTION $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ EST

DEFINIE SUR $[0,+\infty[$ ET Y EST CONTINUE

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE EN 0.

CONVERGENCE À L'INFINI

12

$$x+2-\sqrt{x^2+4x+1} = \frac{\left((x+2)-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\left((x+2)+\sqrt{x^2+4x+1}\right)}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$= \frac{(x+2)^2-(x^2+4x+1)}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$= \frac{x^2+4x+4-x^2-4x-1}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$= \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} = f(x)$$

- CELA MONTRE QUE $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ (UNE AUTRE FOIS)
- NOUS POUVONS ~~MONTRER~~ UTILISER LA COMPARAISON

→ LE DENOMINATEUR SEMBLE SE COMPORTER COMME $\frac{1}{x}$

ESSAYONS DE COMPARER $f(x)$ AVEC $\frac{1}{x}$.

$$\frac{f(x)}{1/x} = \frac{3x}{(x+2+\sqrt{x^2+4x+1})} = \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\underbrace{1+\frac{2}{x}}_{\downarrow\, 1}+\underbrace{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\downarrow\, 1}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3}{2}$$

13

$\Rightarrow \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{3}{2}$ DONC $f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{3}{2}\frac{1}{x}$.

"$f(x)$ EST EQUIVALENTE À $\frac{3}{2x}$ POUR $x \rightarrow +\infty$".

COMME $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ DIVERGE (INTEGRALE DE RIEMANN), ALORS

$\int_0^{+\infty} f(x)$ DIVERGE À L'INFINI.

EX. 4.81 $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[2]{x^2+1}\right) dx$

CONVERGENCE EN 1: x^3+1 ET x^2+1 SONT POSITIVES QUAND $x \geq 1$

$\Rightarrow$ LA FONCTION $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[2]{x^2+1}$ EST CONTINUE SUR $[1,+\infty[$ $\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE EN 1.

CONVERGENCE EN $+\infty$:

$\sqrt[3]{x^3+1} \underset{\infty}{\sim} x$ EN EFFET $\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \frac{|x|\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

$\sqrt[2]{x^2+1} \underset{\infty}{\sim} x$

L'IDEE EST, COMME DANS LES DL, QUE X EST UNE APPROXIMATION AU 1^ER ORDRE. IL FAUT APPROXIMER EN x^2 POUR PLUS D'INFORMATIONS :

13

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[2]{x^2+1} = \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) - \left(\sqrt[2]{x^2+1} - x\right)$$

MONTRONS QUE

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^3+1} - x \leq \frac{1}{x^2} & \text{POUR } x \to +\infty \\ \sqrt[2]{x^2+1} - x \leq \frac{1}{x^2} & \text{POUR } x \to +\infty \end{cases}$$

- $\sqrt[3]{x^3+1} - x \leq \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow x^2\sqrt[3]{x^3+1} - x^3 \leq 1$

Regardons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)\right)$

$$\frac{x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)}{} = \frac{\sqrt[3]{x^3+1} - x}{1/x^2} \Longrightarrow \text{UTILISONS HOPITAL}$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \frac{\frac{1}{3}\left(x^3+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 - 1}{-\frac{2}{x^3}} \to \text{PAS BON.}$$

POUR APPLIQUER HOPITAL IL FAUT EXPRIMER EN FONCTION DE $\frac{1}{x}$.

14

$$x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) = x^3\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1\right) = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - 1}{1/x^3}$$

<u>HOPITAL</u>: $$\frac{\left(\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} = \frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-2/3}\cdot\cancel{(-3)}\cdot\cancel{\frac{1}{x^4}}}{\cancel{(-3)}\cdot\cancel{\frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-2/3} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow$ ~~PAR DEFINIT~~

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ PAR DEFINITION DE LIMITE

$\exists n > 0$ t.q. $\forall x \geq n$ ON A

$$x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) \leq 1$$

PAR CONTRE L'

$$x^2\left(\sqrt[2]{x^2+1}-x\right) = x^3\left(\sqrt[2]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{x^3}}$$

<u>HOPITAL:</u> $$\frac{\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)\,\frac{1}{x^3}}{(-3)\,\frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot x \longrightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ CE N'EST PAS VRAI QUE

$$\left(\sqrt[2]{x^2+1}-x\right) \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{EN EFFET } \left(\sqrt[2]{x^2+1}-x\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

<u>PREUVE:</u> $$\left(\sqrt[2]{x^2+1}-x\right) = \frac{\left(\sqrt[2]{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt[2]{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

ON VOIT QUE

$$\frac{\left(\sqrt[2]{x^2+1}-x\right)}{\frac{1}{x}} = x \cdot \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

CALCUL PRECEDENT

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E) \quad \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

• L'INTEGRALE $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx$ DIVERGE CAR

C'EST UN INTEGRALE DE RIEMANN.

~~L'INT~~ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) dx$ DIVERGE.

GLOBALEMENT $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[2]{x^2+1}\right) dx$ DIVERGE CAR

IL S'EXPRIME COMME SOMME D'UN ITEGRALE

$$\int_1^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) dx$$ QUI CONVERGE

17

ET UN INTEGRALE $$\int_1^{+\infty} \left(\sqrt[2]{x^2+1} - x\right) dx$$

QUI DIVERGE.

$$\begin{cases} \text{CONVERGE} + \text{DIV.} \Longrightarrow \text{DIV.} \\ \text{CONV.} + \text{CONV.} \Longrightarrow \text{CONV.} \\ \text{DIV.} + \text{DIV.} \Longrightarrow ? \end{cases}$$

EX. 4.9 $$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx \qquad f(x) = e^{-\sqrt{x^2-x}}$$

CONVERGENCE EN 1:

$x^2 - x = x(x-1)$ A DES ZEROS EN $x = 0, 1$.

ET EST POSITIVE ≥ 0 POUR

$x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

LA FONCTION f EST DEFINIE POUR $x \geq 1$

ET EST CONTINUE SUR $[1, +\infty[$.

L'INTEGRALE CONVERGE DONC EN 1.

CAR LA FONCTION EST DEFINIE ET CONT. AUTOUR DE 1

CONVERGENCE À L'∞ :

ON PEUT UTILISER LA COMPARAISON CAR $f(x) \geq 0,\ \forall x \geq 1$

$$\sqrt{x^2 - x} \leq \sqrt{x^2} = |x| = x, \text{ POUR } x \geq 1.$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x^2 - x} \geq -x$$

$$\Rightarrow e^{-\sqrt{x^2-x}} \geq e^{-x}$$

- $\Rightarrow$ IL N'EST PAS UTILE DE COMPARER À e^{-x}.

- TOUTEFOIS, LE COMPORTEMENT DE $\sqrt{x^2 - x}$ À L'INFINI EST ASYMPTOTIQUE À CELUI DE x :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1$$

~~ON PEUT ECRIRE~~

- ON VA ALORS FAIRE UNE AUTRE TENTATIVE EN CHERCHANT QUELQUE CHOSE DU TYPE $\sqrt{x^2 - x} \geq ?$

$$\sqrt{x^2-x} = \sqrt{x(x-1)} \geqslant \sqrt{(x-1)(x-1)} = |x-1| = x-1$$

19

$$\Rightarrow -\sqrt{x^2-x} \leq -x+1$$

$$\Rightarrow e^{-\sqrt{x^2-x}} \leq e^{1-x} = e \cdot e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$$ EST DOMINÉ PAR $$\int_1^{+\infty} e^{1-x}\,dx.$$

OR $\int_1^{+\infty} e^{1-x}\,dx$ CONVERGE CAR

$$\int_1^{+\infty} e^{1-x}\,dx = e \cdot \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e\left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty}$$

$$= e \cdot \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x})}_{=0} - (-e^{-1})\right)$$

$$= e \cdot e^{-1} = 1.$$

DONC $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ CONVERGE PAR COMPARAISON.

4.10 $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3}\, dx$

20

$\ln(x)$, $\sqrt{x}$ SONT DEFINIES POUR $x > 0$ ET CONTINUES SUR $\mathbb{R}_{>0}$.

$\Rightarrow$ ELLES SONT CONTINUES ~~AU~~TOURS DE 2

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE EN 2.

- CONVERGENCE À L'INFINI

LES CROISSANCES COMPARÉS MONTRENT QUE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)^3} = +\infty$$

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE DIVERGE À L'INFINI (BORNÉ INFERIEUREMENT PAR UNE CONSTANTE POSITIVE).

$\Downarrow$

PREUVE : (REGLE DE L'HOPITAL)

$$\frac{(\sqrt{x})'}{(\ln(x)^3)'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3\ln(x)^2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)^2}$$

$\Rightarrow$ HOPITAL ENCORE $\Rightarrow \frac{1}{6} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\ln(x)\frac{1}{x}} = \frac{1}{12}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

HOPITAL ENCORE $\Rightarrow \frac{1}{12} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{24}\sqrt{x} \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)^3} = +\infty$.

2

4.11 $\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(x)+\sin^2(x)}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\,dx$

- LA FONCTION EST CONTINUE ET DEFINIE POUR $\underline{\underline{x \geq 1}}$.

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE EN 1.

BETISE

- LA FONCTION N'EST PAS POSITIVE NI NEGATIVE

$\rightsquigarrow$ REGARDONS LA CONVERGENCE ABSOLUE

$$\left|\frac{2+\sin(x)+\sin^2(x)}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\right| \leq \frac{2+|\sin(x)|+|\sin^2(x)|}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}$$

$$\leq \frac{4}{x^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}} \leq \frac{4}{x^{4/3}}.$$

$\frac{4}{3} > 1 \Rightarrow$ L'INTEGRALE $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^{4/3}}\,dx = 4\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{4/3}}\,dx$

CONV.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{2+\sin(x)+\sin^2(x)}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\right|dx$ CONVERGE CAR C'EST DOMINÉ PAR

$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{2+\sin(x)+\sin(x)^2}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\,dx$ CONVERGE.

9.12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

22

e^{-x^2} EST DEFINIE ET CONTINUE SUR $\mathbb{R}$.
ELLE EST POSITIVE, DONC ON PEUT APPLIQUER LES CRITERES
→ NOUS AVONS 2 PROBLEMES DE CONVERGENCE

EN $-\infty$ ET EN $+\infty$.

ECRIVONS DONC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

REGARDONS $+\infty$:

$$x^2 \geq x \Rightarrow e^{x^2} \geq e^{x} \Rightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^{x}}$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ EST DOMINÉ PAR $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

ON PEUT CALCULER LA PRIMITIVE DE e^{-x}
ET MONTRER QUE $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ CONVERGE.

$\Rightarrow$ PAR COMPARAISON $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ CONVERGE.

~~CHANGEMENT DE VARIABLE $t=-x$~~

~~MAINTENANT~~ ~~CONVERGE~~

REGARDONS $-\infty$:

23

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx \underset{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}{=\!=} \int_{+\infty}^{0} e^{-y^2} (-dy) = \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

$\Rightarrow$ LES INTEGRALES COINCIDENT $\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx$ CONVERGE.

- EN ALTERNATIVE ON PEUT REPETER LA PREUVE D'AVANT ET MONTRER QUE POUR $x \leq 0$ ON A

$$e^{-x^2} \leq e^{x}.$$

EX. 4.13 $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx$ $\qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}$

$\begin{cases} 1-x \text{ EST DEFINIE POUR } x \neq 1 \\ \ln(x) \text{ ——— } x > 0 \end{cases} \Rightarrow D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\leadsto$ NOUS AVONS DEUX PROBLEMES DE CONVERGENCE <u>EN 0</u> ET <u>EN 1</u>.

$\leadsto \frac{\ln(x)}{1-x} < 0$ si $x \in]0,1[$.

DONC ON PEUT APPLIQUER LES CRITERES

PAR COMODITÉ CHANGEONS LE SIGNE

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}dx = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}dx = -\int_0^{1/2}\frac{\ln(x)}{x-1}dx - \int_{1/2}^1 \frac{\ln(x)}{x-1}dx$$

REGARDONS LA CONVERGENCE EN 0 :

$$+\int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{x-1}dx$$

$$+\frac{\ln(x)}{x-1} \underset{0}{\sim} -\ln(x) \quad \left(\text{CAR } \lim_{x\to 0} x-1 = -1\right)$$

DONC $\int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{x-1}dx$ CONVERGE $\Longleftrightarrow$ $\int_0^{1/2} \ln(x)\,dx$ CONVERGE

PAR EQUIVALENCE

PRIMITIVE DE $\ln(x) = \underline{x\ln(x) - x}$ (DÉJÀ RENCONTRÉ)

$F(x) = x\ln(x) - x \Rightarrow \int_0^{1/2} \ln(x)\,dx = \lim_{x\to 0^+}\left(F(\tfrac{1}{2}) - F(x)\right)$

C'EST LA DEFINITION

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x\ln(x)}_{\downarrow\,?} - \underbrace{x}_{\downarrow\,0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$\Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{} \, dx$ CONVERGE VERS $\ln(1/2)$

25

$\Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{\ln(x)}{x-1} \, dx$ CONVERGE PAR EQUIVALENCE.

CONVERGENCE EN 1

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(x)}{x-1} \, dx \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$$

- EST CE QUE $f(x)$ VA VERS L'INFINI QUAND $x \to 1^-$?

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = ?$ HOPITAL : $\frac{\ln(x)'}{(x-1)'} = \frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \frac{\ln(x)}{x-1}$ EST BORNÉE AU VOISINAGE DE 1^-

$\Rightarrow \int_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{x-1} \, dx$ CONVERGE

PREUVE :

EN EFFET LA FONCTION $\frac{\ln(x)}{x-1}$ EST POSITIVE

DONC $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1[$ ON A $F(x) := \int_{1/2}^{X} \frac{\ln(t)}{t-1} \, dt \geq 0$

ET $F(x)$ EST CROISSANTE SUR $[\frac{1}{2}, 1[$. DONC

$\lim_{x \to 1^-} F(x)$ EST SOIT $+\infty$ SOIT EXISTE ET FINI.

EN EFFET C'EST UNE PROPRIETÉ DES FONCTIONS CROISSANTES : SOIT ELLES ONT UNE LIM. FINIE SOIT $+\infty$. (PAS DE SITUATIONS BIZARRES OU LA LIMITE N'EXISTE PAS).

- OR $\lim_{x \to 1^-} F(x)$ EXISTE ET C'EST FINI CAR $f(x)$ EST <u>BORNÉ</u>. C'EST À DIRE

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c \in [\tfrac{1}{2}, 1[\\ \exists M > 0 \end{array} \right\} \text{ t.q. }, \ \forall x \in [c, 1[, \ \underline{0 \leq f(x) \leq M}.$$

$\Rightarrow$ SUR $[\frac{1}{2}, c]$ l'integrale $\int_{1/2}^{c} f(t)\,dt$ CONVERGE

$\Rightarrow$ SUR $[c, 1[$ L'INTEGRALE $\int_c^1 f(t)\,dt$ EST <u>BORNÉ</u>

PAR $\int_c^1 M\,dt \Rightarrow \int_c^1 f(t)\,dt \leq \int_c^1 M\,dt = M \cdot (1-c)$.

$\Rightarrow \int_c^1 f$ CONVERGE $\Rightarrow \int_{1/2}^1 f$ CONVERGE.

C'EST UNE PREUVE SYSTEMATIQUE, VOICI L'ENONCÉ :

<u>**PROPOSITION:**</u> SOIT $[a, b[$ UN INTERVALLE <u>BORNÉ</u>.

SI $f(x)$ EST <u>CONTINUE</u>, <u>POSITIVE</u> ET QUI EST <u>BORNÉE</u>

ALORS $\int_a^b f(t)\,dt$ CONVERGE.

GLOBALEMENT

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx$$

CONVERGE <u>EN 0</u> ET <u>EN 1</u> $\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE SUR $]0,1[$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\boxed{\text{EX. 5}}$ 1) $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$

continue par morceaux t.q. $\exists\, \ell > 0$ t.q.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ PAR DEFINITION DE LIMITE, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$

t.q. $\forall x \geq M, |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

- OR, SI $\varepsilon = \ell/2 \Rightarrow f(x) > \underbrace{\ell - \frac{\ell}{2}}_{C} > 0$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f = \int_0^M f + \int_M^{+\infty} f$$

$\int_0^M f =$ CONVERGE CAR f EST CONTINUE PAR MORCEAUX, ET $[0,M]$ EST <u>COMPACT</u>. ~~[illegible]~~

REGARDONS $\int_M^{+\infty} f(t)\,dt$ (28)

PAR DEFINITION $\int_M^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{X \to +\infty} \int_M^X f(t)\,dt$

OR ON A MONTRÉ QUE

$$\int_M^X f(t)\,dt \geqslant \int_M^X c\,dt = \underline{c\cdot(X-M)} \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \int_M^X f(t)\,dt \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ DIVERGE.}$$

- LE RAISONNEMENT EST SIMILAIRE SI $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell$

---

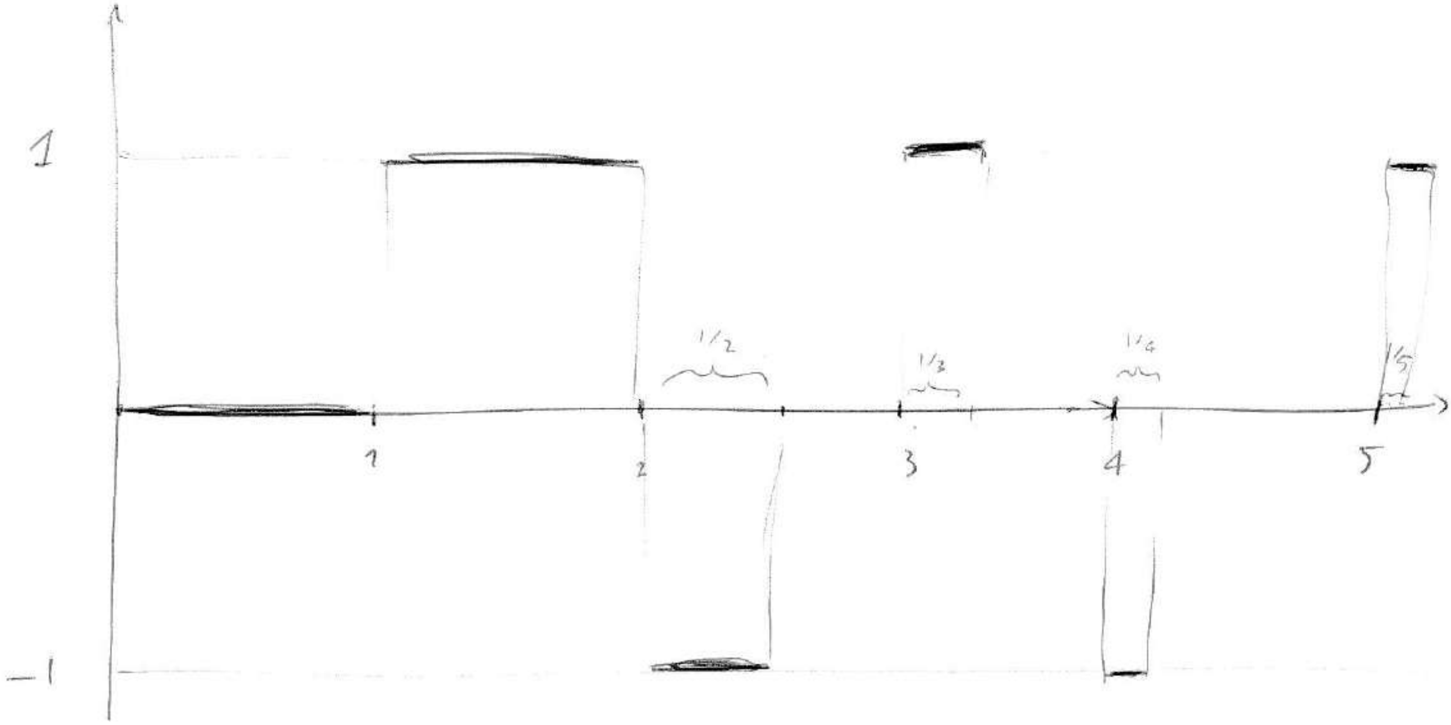
2) PAR LE POINT 1, $g(t)$ ~~SOIT~~ NE PEUT PAS ETRE POSITIVE OU NEGATIVE ET NE PEUT PAS AVOIR UNE LIMITE $\ell > 0$ ($\text{ou } \ell < 0$)

NOUS SAVONS QUE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ CONVERGE.

29

POSONS :

$$g(t) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } \exists n \geq 1, \ t \in [n, n+\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \notin \bigsqcup_{n \geq 0} [n, n+\frac{1}{n}] \end{cases}$$



$$\int_0^X g(t)dt = \left(\int_0^{[X]} g(t)dt\right) + \left(\int_{[x]}^X g(t)dt\right) = \left(\sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{(-1)^k}{k}\right) + \underbrace{\int_{[x]}^X g(t)dt} = \sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{(-1)^k}{k} + I_X$$

$$\Rightarrow \lim_{X \to +\infty} \int_0^X g(t)dt = \lim_{X \to +\infty} \sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{(-1)^k}{k} + \lim_{X \to +\infty} \int_{[x]}^X g(t)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad + \qquad 0$$

$$\left|\int_{[x]}^X g(t)dt\right| \leq \int_{[x]}^X |g(t)|dt \leq \int_{[X]}^X \frac{1}{[X]} dt = \frac{X-[x]}{[x]} \leq \frac{1}{[x]} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt$ CONVERGE

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} g(t)$ converge

$\boxed{EX.6.1}$ $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$.

$g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ EST DEFINIE SUR $\mathbb{R} - \{0\}$ ET CONTINUE.

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE EN 1

• CONVERGENCE EN 0 : $\frac{e^{-t}}{t} \sim_0 \frac{1}{t}$

$g(t) \geq 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ ON PEUT UTILISER L'EQUIVALENCE

$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ DIVERGE $\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ DIVERGE

• [redacted]

[redacted]

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, $\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$, $\frac{e^{-t}}{t} \geq 0 \Rightarrow$ ON PEUT UTILISER L'EQUIV. ET COMPARAISON

$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ CONVERGE (VU AVANT)

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ CONVERGE PAR COMPARAISON

6.2)

31

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

SOIT $H(t)$ UNE PRIMITIVE DE $\frac{e^{-t}}{t}$

PAR DEFINITION ON A

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \overset{DEF}{=\!=} \left[H(t)\right]_x^{\infty} = \left(\lim_{t \to +\infty} H(t)\right) - H(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\left(\lim_{t \to +\infty} H(t)\right)}_{C} - H(x) \right)$$

$$= C - \lim_{x \to +\infty} H(x)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} H(t) - \lim_{x \to +\infty} H(x) = 0.$$

6.3)

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \left[\frac{-e^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{(-e^{-t})}{-t^2}\, dt$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$$

MONTRONS QUE $f(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$

NOTE :
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}_{\text{CONSTANTE}} - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

32

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = -\frac{d}{dx}\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x^2}$$

THEOREME FOND. DE L'ANALYSE

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{e^{-x}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}}\right)$$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}}$$

Hopital

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{e^{-x}}{x^2}}{\frac{e^{-x}}{x}}$$

$$= 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 1.$$

6.4 Montrons que $f(x) \underset{0^+}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

33

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt\right)'}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-e^{-x} \cdot x - e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2}}{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot e^{-x} (x + \cancel{1} - \cancel{1})}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x^2} \cdot e^{-x}}{\cancel{x^2}} = 1$$

EX. 7 $f(x) > 0, \forall x$, $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

MONTRER QUE $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ CONV $\Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)}\, dt$.

PREUVE :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{CONVERGE}$$

$\Updownarrow$ DEFINITION

$$\left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - F(1) \quad \text{EXISTE ET EST } \underline{\text{FINI}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \quad \text{EXISTE FINI} \quad (\text{COMME } f>0 \text{ ON A } F>0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(F(x))$$

EXISTE FINI CAR $\ln$ EST CONTINUE DONC

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln(F(x))$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\ln(F(x))\right]_1^{+\infty} \quad \text{CONVERGE}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^{+\infty} \ln(F(t))'\,dt \quad \text{CONVERGE}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{F(t)'}{F(t)}\,dt \quad \text{CONVERGE} \iff \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)}\,dt \quad \text{CONVERGE}$$

EX. 8 $n \geq 0$

35

1) $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)^2}{1+x}\,dx$, $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)^2}{1+x}\,dx$

$$a_n := u_n + v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2(x) + \sin(x)^2}{1+x}\,dx$$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$$

- $$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$$

- $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x}\,dx$$

OR $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ DIVERGE CAR $\frac{1}{1+x} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ ET $\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx}_{\text{DIVERGE}}$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ DIVERGE.

2) $u_n - v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)^2}{1+x}\,dx$ 36

PRIMITIVE DE $\cos(x)^2 - \sin(x)^2$?

$\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x)$

$\Rightarrow$ PRIMITIVE $= \frac{\sin(2x)}{2}$.

$$\Rightarrow u_n - v_n = \underbrace{\left[\frac{\sin(2x)}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}}_{=0} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(2x)}{2} \cdot \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) dx$$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(2x)}{2\cdot(1+x)^2}\,dx$$

OR: ON A : $|u_n - v_n| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(2x)}{2\cdot(1+x)^2}\,dx \right|$

$$\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(2x)}{2(1+x)^2} \right| dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{2(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1+n\pi+\pi} - \frac{-1}{1+n\pi}\right) \Longrightarrow$$

$$|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{-1}-\cancel{n\pi}+\cancel{1}+\cancel{n\pi}+\pi}{(1+n\pi+\pi)(1+n\pi)}\right)$$

(37)

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+n^2\pi^2+n\pi+n\pi+\pi+n\pi^2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{n^2\pi^2}$$

$$\leq \frac{1}{2n^2\pi}$$

---

3) • ON SAIT QUE $\sum a_n$ <u>DIVERGE</u>

$a_n = u_n + v_n$.

• ON SAIT QUE SI $b_n = u_n - v_n$

ALORS $\sum_n b_n$ <u>CONVERGE ABSOLUMENT</u> CAR

$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi n^2}$ ET $\sum \frac{1}{2\pi n^2} = \frac{1}{2\pi} \sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

$\Rightarrow$ • ON ECRIT $u_n = \frac{(u_n+v_n)+(u_n-v_n)}{2} = \frac{a_n+b_n}{2}$

$$\Rightarrow \sum u_n = \underbrace{\frac{1}{2}\sum a_n}_{\text{DIV.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum b_n}_{\text{CONV}} \Rightarrow \sum u_n \text{ DIVERGE}$$

~~ON PEUT~~ $\sum u_n$ EST DONC

SOMME D'UNE SERIE DIVERGENTE (38)

ET UNE SERIE CONVERGENTE, DONC

$\sum u_n$ DIVERGE.

• POUR V_n ON ECRIT

$$V_n = \frac{(u_n + V_n) - (u_n - V_n)}{2} = \frac{a_n - b_n}{2}$$

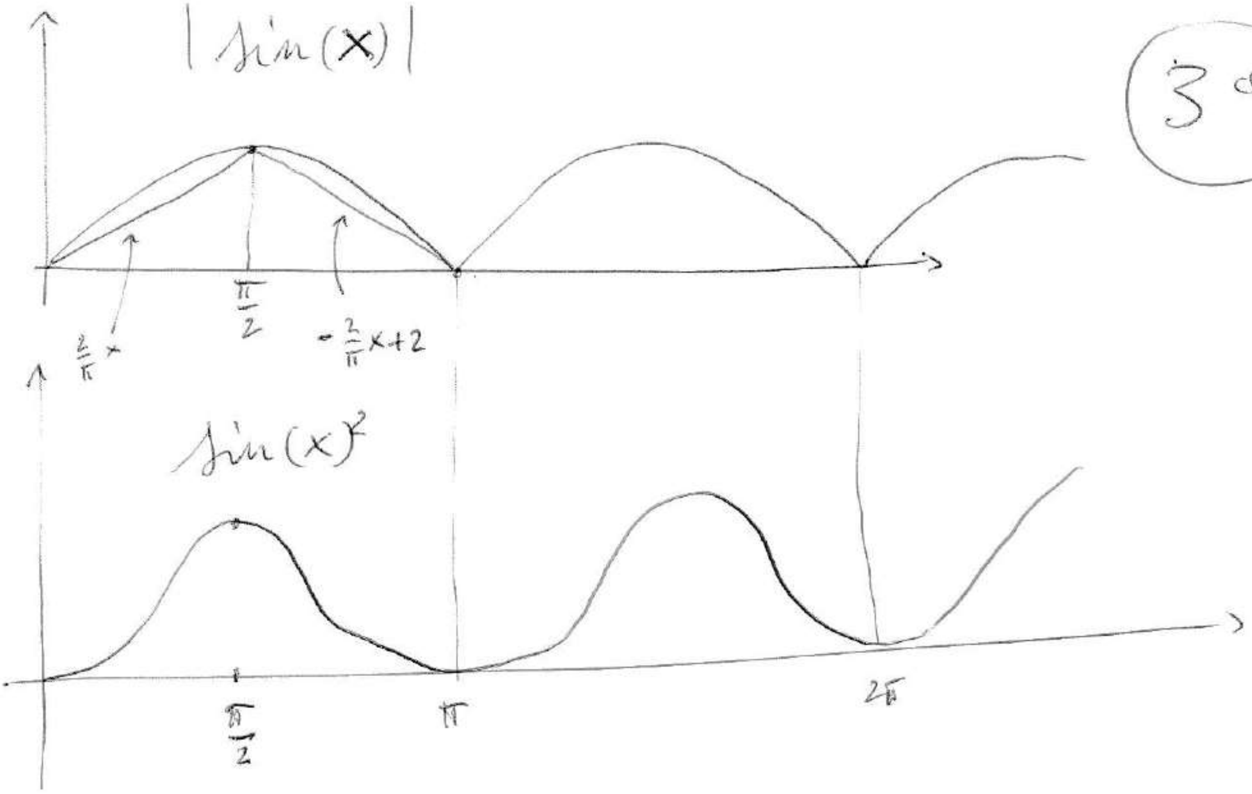
ET PAR LE MEME RAISONNEMENT $\sum V_n$ DIVERGE

• ON PEUT EGALEMENT UTILISER LE FAIT

$$V_n = -b_n + u_n$$

$$\sum V_n = \underbrace{-\sum b_n}_{\text{CONV}} + \underbrace{\sum u_n}_{\text{DIV.}} \Rightarrow \sum V_n \text{ DIVERGE}$$

• AUTRE METHODE PLUS COMPLIQUÉ MAIS TRES UTILE DANS D'AUTRES EXEMPLES.



$$\begin{cases} \text{SUR } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ON A } |\sin(x)| \geq \frac{2}{\pi}x \geq 0 \\ \text{SUR } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ ON A } |\sin(x)| \geq -\frac{2}{\pi}x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{SUR } \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right] \text{ ON A } |\sin(x)| \geq \frac{2}{\pi}(x - n\pi) \geq 0 \\ \text{SUR } \left[n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right] \text{ ON A } |\sin(x)| \geq -\frac{2}{\pi}(x - n\pi) + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{SUR } \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right] \text{ ON A } \sin(x)^2 \geq \frac{4}{\pi^2}(x - n\pi)^2 \geq 0 \\ \text{SUR } \left[n\pi + \frac{\pi}{2}, (n+1)\pi\right] \text{ ON A } \sin(x)^2 \geq \frac{4}{\pi^2}(x - n\pi)^2 + 4 - \frac{8}{\pi}(x - n\pi) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)^2}{1+x}dx \geq \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi^2}\frac{(x - n\pi)^2}{1+x}dx + \int_{n\pi + \frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi} \frac{\frac{4}{\pi^2}(x - n\pi)^2 + 4 - \frac{8}{\pi}(x - n\pi)}{1+x}dx$$

MAINTENANT ON A L'INTEGRALE DE DEUX FRACTIONS RATIONNELLES.

40

- CHANGEMENT DE VARIABLE

$$x = n\pi + t \qquad \begin{cases} x = n\pi \iff t = 0 \\ x = n\pi + \frac{\pi}{2} \iff t = \pi/2 \\ x = (n+1)\pi \iff t = \pi \end{cases}$$

$$dx = dt$$

$$\Rightarrow V_n \geq \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{1+n\pi+t}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\frac{4}{\pi^2}t^2 + 4 - \frac{8}{\pi}t}{1+n\pi+t}\,dt$$

$$\vee\!/ \qquad\qquad \vee\!/$$

$$\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{1+n\pi+\frac{\pi}{2}}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\frac{4}{\pi^2}t^2 + 4 - \frac{8}{\pi}t}{1+n\pi+\pi}\,dt$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{\left(1+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(\pi/2)^3}{3}\right) + 4\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-\frac{(\pi/2)^2}{2}\right)}{1+n\pi+\pi}$$

$$\vee\!/ \qquad\qquad \vee\!/$$

$$C_1\,\frac{1}{n\pi+\pi} + C_2\,\frac{1}{n\pi+2\pi}$$

C_1, C_2 constantes. $C_1 = \frac{4}{\pi^2 \cdot 3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$, $\cancel{C_2 = \frac{4\pi^3}{\pi^2 3} + \frac{4\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \cancel{}\, V_n \geqslant \frac{C_1}{(n+1)\pi} + \frac{C_2}{(n+2)\pi} = \frac{C_1(n+2) + C_2(n+1)}{(n+1)(n+2)\pi}$$

41

OR ATTENTION LES DEUX DIVERGENT MAIS CELA N'ENTRAINE PAS QUE V_n DIVERGE LES CONSTANTES C_1 ET C_2 POURRAIENT SE "COMPENSER" QUAND L'ON FAIT DENOMINATEUR COMMUN ET LE TERME EN $\frac{1}{n}$ POURRAIT DISPARAITRE.

$$\frac{C_1(n+2)+C_2(n+1)}{(n+1)(n+2)\cancel{\pi}} = \frac{(C_1+C_2)n + 2C_1 + C_2}{(n^2+3n+2)\cancel{\pi}} \sim \frac{(C_1+C_2)\cancel{n}}{\pi n^2}$$

IL SUFFIT D'AVOIR $C_1 \neq -C_2$ POUR AVOIR EQUIVALENCE

OR ON ~~...~~ A MONTRÉ QUE ON PEUT PRENDRE

$$C_1 = \frac{4\pi}{\cancel{\pi}\,24} = \frac{\pi}{8} \quad , \quad C_2 = \cancel{\frac{4}{3}\pi + 2\pi} = \frac{10}{3}\pi$$

$\Rightarrow C_1 = -C_2$

$\Rightarrow$ PLUS EN GENERAL IL SUFFIT DE REMARQUER QUE $C_1, C_2 > 0 \Rightarrow C_1 \neq -C_2$.

DONC V_n EST MINORÉ PAR UNE SERIE QUI EST ÉQUIVALENTE À $\frac{C_1+C_2}{n\pi}$ ET QUI DIVERGE $\Rightarrow \sum V_n$ DIVERGE

UN RAISONNEMENT ANALOGUE MONTRE AUSSI QUE $\sum u_n$ DIVERGE, OU L'ON PEUT UTILISER (COMME AVANT) QUE $\sum (u_n - v_n)$ CONV. ABSOLUMENT ET DONC $u_n = \underbrace{(u_n - v_n)}_{\text{CONV. ABS}} + \underbrace{v_n}_{\text{DIV.}}$

$\Rightarrow \sum u_n$ DIVERGE.

42

$\boxed{\text{EX. 8.4}}$ DETERMINER LES $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{(1+x)^\alpha}\, dx \quad \text{CONVERGE.}$$

(0) LA CONVERGENCE EN $x=0$ EST SATISFAITE GRACE AU FAIT QUE $\frac{\sin(x)^2}{1+x}$ EST DEFINIE ET CONTINUE ~~SUR~~ SUR UN INTERVALLE CONTENANT 0.

REGARDONS LA CONVERGENCE À L'∞

(1) SI $\alpha = 1$, ALORS

43

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{1+x}\, dx \quad \text{CONVERGE}$$

<u>SI ET SEULEMENT SI LA SERIE</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\sin(x)^2}{1+x}\, dx \right) \quad \text{CONVERGE.}$$

~~(VOIR LE COURS)~~

<u>PREUVE</u>: COMME $f(x) = \frac{\sin(x)^2}{1+x} \geq 0, \forall x \geq 0$

ALORS $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ EST UNE FONCTION

CROISSANTE DE x.

- ELLE A DONC UNE LIMITE <u>FINIE</u> OU <u>$+\infty$</u>
- LA LIMITE DE $F(x)$ EST FINIE SI ET SEULEMENT SI $F(x)$ EST <u>BORNÉ</u>.
- $F(x)$ EST BORNÉ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ UNE SUITE $(x_n)_n$ t.q. $\forall n$ $x_n < x_{n+1}$ ET $\lim x_n = +\infty$ ET $\lim F(x_n) < +\infty$

MAIS $F(x_n) = \underbrace{F(x_n) - F(x_{n-1})} + \underbrace{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})} + F(x_{n-2})$

$\cdots - F(x_0) + F(x_0)$

44

$= F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt.$

DIRE QUE $\lim_n F(x_n) < +\infty$ ÉQUIVAUT

À DIRE QUE $\sum_{k \geq 0} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$ CONVERGE.

DONC DANS NOTRE CAS

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{1+x}\,dx$ CONVERGE $\Longleftrightarrow$

LA SÉRIE $\sum_{n \geq 0} \underbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)^2}{1+x}\,dx}_{V_n}$ CONVERGE.

OR ON A DÉMONTRÉ QUE $\sum_n V_n$ DIVERGE

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{1+x}\,dx$ DIVERGE.

CAS $\alpha > 1$: $\dfrac{\sin(x)^2}{(1+x)^\alpha} \leq \dfrac{1}{(1+x)^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$

COMME $\alpha > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ CONV. À L'INFINI

95

$\Rightarrow$ PAR COMPARAISON ET ÉQUIVALENCE L'INTÉGRALE $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{(1+x)^\alpha}\,dx$ CONVERGE QUAND $\alpha > 1$.

CAS $\alpha < 1$: SI $\alpha < 1$ ALORS

$$\frac{\sin(x)^2}{(1+x)^\alpha} \geqslant \frac{\sin(x)^2}{1+x}$$

PAR COMPARAISON $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{(1+x)^\alpha}\,dx$

DIVERGE QUAND $\alpha < 1$.

EX. 9 | $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} \, dt$ DIVERGE.

46

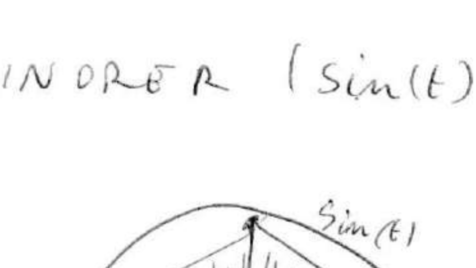
ON SAIT QUE CET INTEGRALE DIVERGE SI, ET SEULEMENT SI, LA SERIE

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} \, dt \right)}_{u_n} \quad \text{DIVERGE.}$$

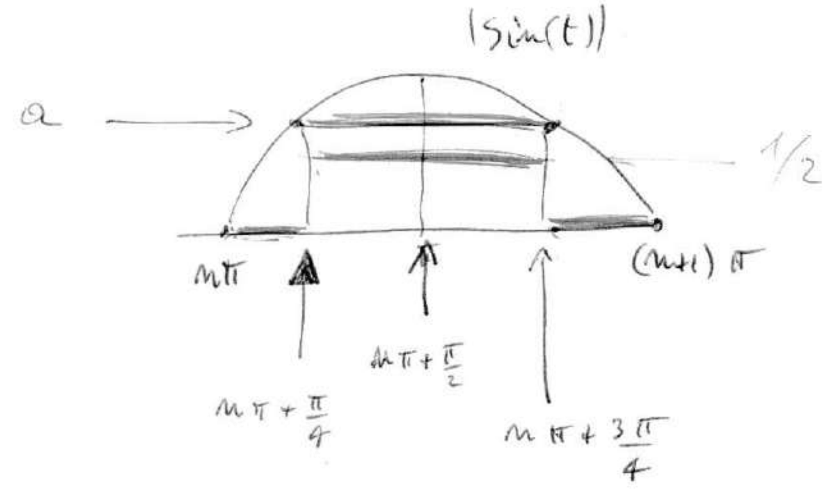
9.1) ~~...~~ ON CHERCHE A BORNER PAR LE BAS (MINORER) CETTE INTEGRALE

IL Y A PLUSIEURS POSSIBILITÉS.

ON A VU À L'EXERCICE 8.3 QU'ON POUVAIT MINORER $|\sin(t)|$ PAR UN TRIANGLE



ICI ON VA LE MINORER PAR UN ~~...~~ RECTANGLE.



47

$$\left|\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\sin\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

PAR CONVEXITÉ DE $|\sin(t)|$ SUR $\left[n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$

ON A $\forall x \in \left[n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow |\sin(x)| \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

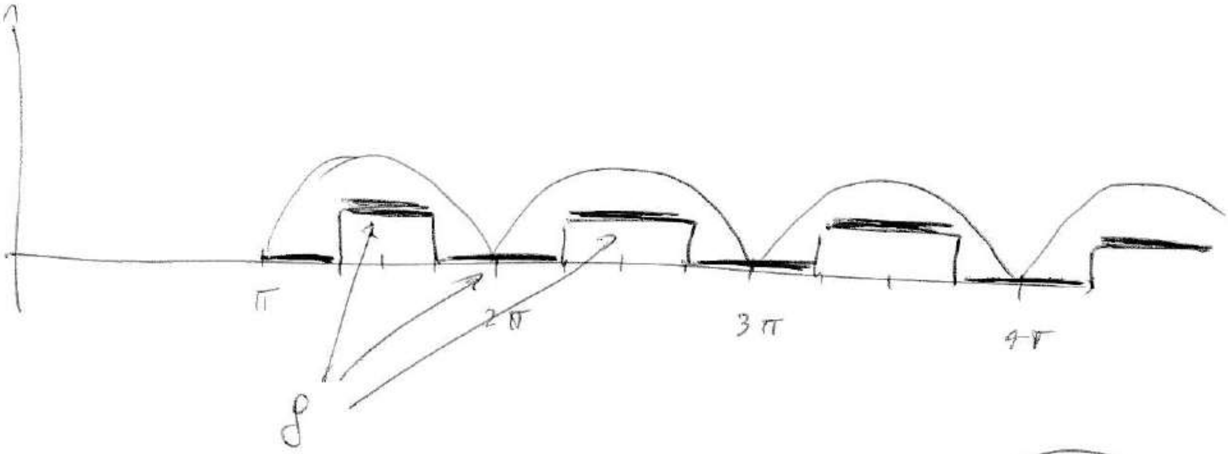
$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ON PEUT PRENDRE EN EFFET N'IMPORTE QUEL NOMBRE $\neq 0$ QUI SOIT $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(PAR EX. $a = \frac{1}{2}$ EST AUSSI POSSIBLE)

9.2 Soit $g(t)$ LA FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX t.q. $\forall n \geq 1$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in \left[n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{3\pi}{4}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[n\pi, n\pi+\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]n\pi+\frac{3\pi}{4}, (n+1)\pi\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \forall t \geq \pi, \quad |\sin(t)| \geq g(t).$

48

$$\Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{g(t)}{t}\,dt$$

OR COMME $g(t) = 0$ si $t \notin \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$

ALORS
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_{n\pi + \frac{\pi}{4}}^{n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{1/2}{t}\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(n\pi + \frac{3\pi}{4}\right) - \ln\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)}_{}$$

C'EST COMPLIQUÉ

C'EST PLUS FACILE DE MINORER

$\forall t \in \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$ ON A $\frac{1}{t}$ DECROISSANTE DONC

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}.$$

DONC $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{g(t)}{t} \geq \underbrace{\frac{1}{2(n+1)\pi} \cdot \int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}} 1 \cdot dt}_{\frac{\left(n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{2(n+1)\pi} = \frac{\pi/2}{2\cancel{\pi}(n+1)}}$$

4 9

$$\Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \frac{1}{4(n+1)}.$$

9.3)

CAR $|\sin(t)|/t \geq 0$.

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \sum_{n\geq 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \sum_{n\geq 1} u_n$$

$\Rightarrow$ COMME $u_n \geq \frac{1}{4(n+1)}$ ET LA SERIE

$\sum \frac{1}{4(n+1)}$ DIVERGE $\Rightarrow \sum u_n$ DIVERGE

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \text{ DIVERGE}.$$

CRITERE D'ABEL POUR LES INTEGRALES SUR $[a, +\infty[$

<u>THEOREME</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$, ET

$$f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{CONTINUES}$$

DEUX FONCTIONS T.Q.

1) $\forall x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$

2) f DECROISSANTE

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4) $\exists M, \forall a \leq c < d$ ON A

$$\left| \int_c^d g(t)\,dt \right| \leq M.$$

ALORS $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t) \cdot g(t)\,dt$ CONVERGE.

EX. 10.1

51

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)}\,dx$$

REMARQUE : ON PEUT MONTRER QUE $\int_2^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{\ln(x)}\right|$ DIVERGE À L'INFINI CAR $\frac{|\cos(x)|}{|\ln(x)|} \geq \frac{|\cos(x)|}{x-1}$

ET ON MONTRE COMME DANS L'EXERCICE 9 QUE $\int_2^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x-1}\,dx$ DIVERGE.

LA CONVERGENCE EN $x=2$ EST CLAIRE CAR $\frac{\cos(x)}{\ln(x)}$ EST DÉFINIE ET CONTINUE ~~SUR UN~~ AUTOUR DE $x=2$.

REGARDONS LA CONVERGENCE À L'INFINI AVEC LE CRITÈRE D'ABEL.

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \quad \text{EST}$$

52

1) POSITIVE, CONTINUE SUR $[2, +\infty[$

2) DECROISSANTE

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

LA FONCTION $g(t) = \cos(t)$ VERIFIE

$\forall \; 0 \leq c < d$

$$\left| \int_c^d \cos(t)\, dt \right| = \left| \Big[+ \sin(t) \Big]_c^d \right| = \left| \sin(d) - \sin(c) \right|$$

$$\leq 2$$

$\Rightarrow \exists M = 2 > 0$ t.q. $\forall c < d$ ON A

$$\left| \int_c^d g(t)\, dt \right| \leq M$$

PAR ABEL $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\ln(t)}\, dt$ CONVERGE

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)}\,dx$

53

ON A 2 PROBLÈMES :
- → CONVERGENCE <u>EN 1</u>
- → CONVERGENCE <u>EN $+\infty$</u>

<u>CONVERGENCE EN 1 :</u>

- Si $c > 1$ EST PROCHE DE 1, ALORS $\forall x \in]1, c]$ ON A

$$\sin(x-1) > 0 \quad , \quad \ln(x) > 0 .$$

$\Rightarrow$ ON PEUT UTILISER LA COMPARAISON ET ÉQUIVALENCE AUTOUR DE $x = 1$

- $$\frac{\sin(x-1)}{\ln(x)} \underset{1}{\sim} \frac{x-1}{x-1} = 1 .$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{c} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)}\,dx$ CONVERGE <u>EN 1</u>.

CONVERGENCE EN $+\infty$:

54

COMME POUR L'EXERCICE 10.1 ON UTILISE ABEL. ON PEUT CONTROLER $\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)} dx$

1) $f(x) = \ln(x)^{-1}$ EST CONT. POSITIVE DECROISSANTE, et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) $\forall$ c<d, $c, d \in [2, +\infty[$ ON A

$$\left| \int_c^d \sin(x-1) dx \right| = \left| \left[-\cos(x-1) \right]_c^d \right|$$
$$= \left| -\cos(d-1) + \cos(c-1) \right|$$
$$\leq 2 .$$

PAR ABEL L'INTEGRALE

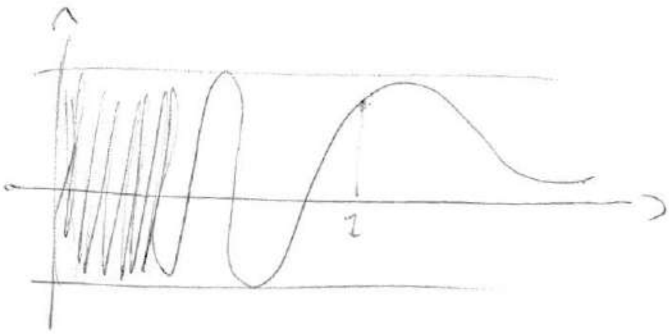
$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)} dx$$ CONVERGE. À L'INFINI

CONCLUSION : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)} dx$ CONVERGE

EX. 10.3

55

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$



CET INTEGRALE CONVERGE ABSOLUMENT

PREUVE: $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \geq 0$, $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ CONTINUE EN $]0, 1]$.

LA CONVERGENCE EN 1 SUIT COMME D'HABITUDE DE LA CONTINUITÉ.

- CONVERGENCE EN 0: $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$, $\forall t \in]0,1]$

$\int_0^1 1\, dt$ CONVERGE EN 0 $\Rightarrow \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt$ CONVERGE EN 0

FIN

AUTRE METHODE

56

$y = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{1}{y^2} dy$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{t=1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{y=+\infty}^{y=1} -\frac{\sin(y)}{y^2} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^2} dy$$

COMME $\frac{|\sin(y)|}{y^2} \leq \frac{1}{y^2}$ $\Rightarrow$ PAR COMPARAISON AVEC $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy$

L'INTEGRALE $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^2} dy$ CONVERGE.

EX. 10.4 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x}\,dx$ 57

CONVERGENCE EN 1 : $\dfrac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x}$ EST

DEFINIE ET CONTINUE DANS UN INTERVALLE

CONTENANT 1 $\Rightarrow$ L'INTEGRALE CONVERGE ~~INTERVALLE~~

EN $x=1$.

CONVERGENCE EN 0 : $\cos\left(\frac{2}{x}\right) \rightarrow$ N'A PAS DE LIM EN $x=0$.

IDEE : ~~PASSER L~~ CHANGEMENT DE VARIABLE $y = 1/x$, $dx = -\frac{1}{y^2}dy$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x}\,dx = \int_{+\infty}^1 \cos(2y)\cdot y \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2y)}{y}\,dy.$$

ON UTILISE ABEL. 58

1) $1/y$ EST POSITIVE, DÉCROISSANTE ET SA LIMITE, POUR $y \to +\infty$, EST 0.

2) $\forall\ c<d$ ON A

$$\left|\int_c^d \cos(2y)\,dy\right| = \left|\left[\frac{\sin(2y)}{2}\right]_c^d\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(\sin(2d)-\sin(2c)\right)\right|$$

$$\leq 1.$$

PAR ABEL L'INTEGRALE

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2y)}{y}\,dy$$ CONVERGE.