MAT302 : Séries et intégrales généralisées — Université Grenoble Alpes
2020-2021

TD n° 4 : Intégrales de Riemann

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

Cette feuille est en grande partie des révisions de L1. Il peut être utile de faire un tableau des primitives usuelles.

*** Définitions à connaître par cœur**

somme de Riemann

*** Propriétés à connaître par cœur**

- linéarité, positivité de l'intégrale
- lien entre intégration et primitive
- formule d'intégration par parties
- formule de changement de variable

Exercice 1. *Des sommes de Riemann

1. Montrer que la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$
est une suite de sommes de Riemann convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
3. Pour quelle valeur du réel α la suite
$$v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin\frac{k}{n}$$
est-elle une suite de sommes de Riemann ? Que vaut alors sa limite ? Que se passe-t-il pour les autres valeurs de α dans $]-1, +\infty[$?
4. A l'aide des sommes de Riemann, montrer les équivalents
$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \quad (\alpha > 0) \qquad\qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \sim n \ln n .$$

Exercice 2. *Rappel de primitives

Pour chacune des intégrales suivantes,
- déterminer les intervalles $[a, b]$ tels que la fonction soit Riemann intégrable sur $[a, b]$,
- calculer alors la valeur de l'intégrale :

1. $\int_a^b t^n\,dt$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\int_a^b e^{\alpha t}\,dt$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $\int_a^b \sqrt{t}\,dt$
4. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$
5. $\int_a^b t^{1/3}\,dt$
6. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 3. *Calcul de primitives de fractions rationnelles

Déterminer des intervalles sur lesquels les fractions rationnelles suivantes sont définies et donner leurs primitives sur ces intervalles :

$$\frac{x^3}{x^2+1},\ \frac{1}{x(1+x)^2},\ \frac{1}{4x^2-3x+2},\ \frac{x^2}{x^4-1}.$$

Exercice 4. *Calcul de primitives par changement de variable

Donner des primitives de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur des intervalles sur lesquels ces fonctions sont définies (utiliser les changements de variable $x = \sinh u$ ou $x = \cosh u$ ou $x = \sin u$).

Exercice 5. *Linéarisation de polynômes en sin, cos

Linéariser les polynômes trigonométriques suivants de la variable x, puis en donner des primitives : $\sin^2 x$, $\cos^4 x$, $\sin^2 x \cos^4 x$, $\sin^5 x$.

Exercice 6. **Calcul de primitives de fonctions en sin, cos

Calculer les primitives des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto (\sin x)^3$, $\quad x \mapsto \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$, $\quad x \mapsto \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}$, $\quad$, $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$,

$x \mapsto \frac{1}{1+\sin^2 x}$ (attention au domaine de définition du changement de variable).

Exercice 7. **Calcul de primitives

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$$x \mapsto x^3 \ln x, \qquad x \mapsto e^{-x}\cos x.$$

Exercice 8. *Intégration et dérivation

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 9. ** Cas d'égalité

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Donner une CNS sur f pour que $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$.
2. Même question si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10. ** Primitive avec fonction exponentielle

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)e^{ax}$ où P est un polynôme et a un réel est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$ où Q est un polynôme et C une constante.
2. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)\cos\alpha x$ où P est un polynôme et α un réel est de la forme $x \mapsto Q_1(x)\cos\alpha x + Q_2(x)\sin\alpha x + C$ où Q_1, Q_2 sont des polynômes et C une constante.

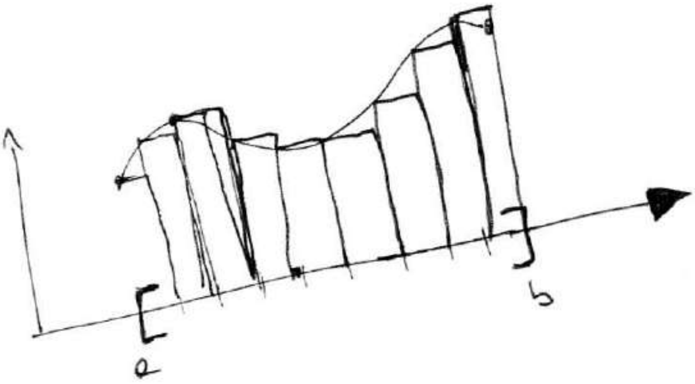
INTEGRALE DE RIEMANN.

ANALOGIE

SERIES	INTEGRALES
$\sum_{k=0}^{n} a_k$	$\int_a^b f$, f continue sur $[a,b]$
$\sum_{k=0}^{\infty} a_n$	$\int_I f$, f cont. I ouvert.
$\forall n, a_n \geq 0$	$f(x) \geq 0, \forall x \in I$.
$\sum \lvert a_n \rvert$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.	$\int_I \lvert f \rvert$ conv. $\Rightarrow \int_I f$ conv.
?	$\longleftrightarrow$ f non continue
ABEL.	INTEGRATION PAR PARTIES
SERIES ALTERNÉS	? FONCT. PERIODIQUES?
?	PRIMITIVE ET EGALITÉ $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

DÉFINITION SUR UN INTERVALLE FERMÉ ET BORNÉ $[a,b]$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$



⚠ ce n'est pas une série

$$I_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$I_n^+ = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n I_n$$

~~EXEMPLE~~ **THM :** Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable t.q. $F' = f$.

$$\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

EXEMPLE : $f(x) = t$, $\int_a^b t\,dt$

$$I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\left[\sum_{k=0}^{n} a + \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right.$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot a\cdot n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$I_n \to (b-a)\cdot a + \frac{(b-a)^2}{2} =$$

$$I_n \to (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} = \cancel{ba} - a^2 + \frac{b^2+a^2-\cancel{2ab}}{2}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}.$$

3

$F = t^2/2$, $F(b) - F(a) = \frac{b^2-a^2}{2}$.

EX. 1:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n+\frac{k^2}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$$

$a=0$, $b=1$

$$f\left(0+\frac{k}{n}\right) = \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

1) $\frac{1+x}{1+x^2}$ est CONT. SUR $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f$ EXISTS

C'EST À DIRE QUE $\lim_n u_n$ EXISTS.

2) PRIMITIVE: $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow F(x) =$ PRIMITIVE

$= \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} + \frac{1}{2}\ln(2) - \underbrace{\cancel{\arctan(0)}}_{0} - \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{0}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2}). \Rightarrow \boxed{\lim_n u_n = \frac{\pi}{4} + \ln(\sqrt{2})}$$

1.3 $V_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin\left(\frac{k}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n^\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

$\Rightarrow$ Si $\alpha = 1$ C'EST LA SOMME DE RIEMANN DE

$$f(x) = x \cdot \sin(x) \quad , \quad a = 0 \, , \quad b = 1$$

~~$\Rightarrow$ Si $\alpha \neq 1$ ce n'est pas une somme de Riemann~~

· Si $\alpha = 1$, $f(x) = x \sin(x)$ est cont. sur $[0,1]$.

$\Rightarrow \lim_n \underbrace{I_n(f)}_{V_n}$ conv. VERS $F(b) - F(a)$

où F est une PRIMITIVE DE $x \sin(x)$.

PRIMITIVE:

$$\int_0^1 \underset{F}{x} \, \underset{g}{\sin(x)} \, dx = \left[\underset{F}{x} \, \underset{G}{(-\cos(x))} \right]_0^1 - \int_0^1 (-\cos(x)) \, dx$$

$$= (-\cos(1) + 0) + \left[\sin(x)\right]_0^1$$

$$= -\cos(1) + \sin(1)$$

1.2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

4

$$\bullet \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{n+\ell}$$

$n+\ell =: k$

$\ell = k-n$

ON SOUHAITE FAIRE PARAITRE DES $\frac{\ell}{n}$ POUR AVOIR UNE SOMME DE RIEMANN DE LA FORME

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + (b-a)\frac{\ell}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+\ell} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{\ell}{n}} \quad , \quad f\left(a+(b-a)\frac{\ell}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{\ell}{n}}$$

$$f\left(1 + 1 \cdot \frac{\ell}{n}\right) = \frac{1}{1+\ell/n}$$

$a = 1$, $b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(b-a)}{n} \sum_{\ell=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{\ell}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+1\cdot\frac{\ell}{n}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Si $\alpha \neq 1$, $\alpha \geq -1$ alors.

(5)

$$V_n = \frac{n^{\alpha}}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= n^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{\substack{\text{SOMME DE RIEMANN} \\ \text{DE } f(x) = x^{\alpha} \sin(x)}}$$

⚠ $f(x) = x^{\alpha} \sin(x)$ N'EST PAS DEFINIE EN $x=0$. QUAND $\alpha < 0$.

TOUTEFOIS $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} \sin(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x^{\alpha+1}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\downarrow\, 1} = \begin{cases} 0 & \alpha > -1 \\ 1 & \alpha = -1 \end{cases}$

DONC, ON PEUT PROLONGER $f(x) = x^{\alpha} \sin(x)$ EN UNE FONCTION CONTINUE EN 0 :

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ EST LA n-ème SOMME DE R. DE g SUR $[0,1]$

COMME $g(x)$ EST CONT. $\Rightarrow \lim\limits_{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ EXISTE. FINI

5* $$\int_0^1 g(t)\,dt = \lim_{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right) = I.$$

<u>Remarque :</u> $\int_0^1 g = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 g = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 f$

<u>DONC</u> : IL RESTE A COMPRENDRE

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha \in]-1,1[. \end{cases}$$

<u>Donc</u> :

$$\lim_{n} V_n = \left(\lim n^{\alpha-1}\right)\left(\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & , \alpha > 1 \\ \int_0^1 g(t)\,dt & , \alpha = 1 \\ 0 & , \alpha \in]-1,1[\end{cases}$$

EX. 2.1 $\quad \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = A_n \quad , \quad B_n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}}{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}} = \frac{\alpha+1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{\alpha}}{n^{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha+1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}}$$

$\Rightarrow \frac{A_n}{B_n} =$ RIEMANN SUM DE $f(x) = (\alpha+1) \cdot x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \geq 0$

$$\Rightarrow F(x) = x^{\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n} \frac{A_n}{B_n} = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 1.$$

$$\Rightarrow A_n \sim B_n .$$

Remarque : Si $\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \Rightarrow A_n = B_n$

$\boxed{\text{EX. 2.2}}$ $\quad A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) \sim n \cdot \ln(n) = B_n$

$$\cancel{\frac{A_n}{B_n} = \frac{\sum_{k=n}^{2n} \ln(k)}{n \ln(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k+n)}{n \cdot \ln(n)}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k+n)}{\ln(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(n \cdot \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)}{\ln(n)}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{n} \sum \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{1}{n} \sum 1 + \ln}$$

2.2

$$A_n = \sum_{k=1+n}^{2n} \ln(k) \qquad B_n = n \cdot \ln(n)$$

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\sum_{k=1+n}^{2n} \ln(k)}{n \ln(n)} = \frac{\sum_{k=1+n}^{2n} \ln(k/n) + \ln(n)}{n \ln(n)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1+n}^{2n} \frac{n \cdot \ln(k/n)}{n \ln(n)} + \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \sum_{k=1+n} \frac{n \cancel{\ln(n)}}{\cancel{n \ln(n)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1+n}^{2n} \ln(k/n)}{\ln(n)} + 1$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \ln\left(\frac{n+s}{n}\right)}{\ln(n)} + 1$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right)}{\ln(n)} + 1 \longrightarrow \text{"}\frac{C}{\infty}\text{"} + 1 = 1$$

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = C$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{A_n}{B_n} = 1$$

2) $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{it}\right) = \frac{d}{dt}\left(\cos(t)\right) + i \cdot \frac{d}{dt}\left(\sin(t)\right).$$

$$= -\sin(t) + i\cos(t)$$

$$= i^2 \sin(t) + i\cos(t)$$

$$= i\left(\cos(t) + i\sin(t)\right.$$

$$= i \cdot e^{it}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(e^{it}\right)' = i \cdot e^{ib}}$$

DE MEME ON MONTRE QUE SI $b \in \mathbb{R}$ ALORS

$$\left(e^{ibt}\right)' = i \cdot r\, e^{ibt}$$

et DANS LE CAS GENERAL SI $\alpha = a + ib \in \mathbb{R}$

$$\left(e^{\alpha \cdot t}\right)' = \left(e^{(a+ib)t}\right)' = \left(e^{at} \cdot e^{ibt}\right)' = a\, e^{at} e^{ibt} + e^{at}\left(ib\, e^{ibt}\right)$$

$$= (a+ib) \cdot e^{(a+ib)t} = \alpha \cdot e^{\alpha t}.$$

PRIMITIVES

8

1) $n \in \mathbb{N}$, $f(t) = t^n$ EST CONT SUR $\mathbb{R}$.

$\rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(t)\,dt$ EXISTE.

PRIMITIVE : $F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $e^{\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Si $\alpha = p + iq$, $p, q \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{\alpha t} = e^{pt+iqt} = e^{pt} \cdot e^{iqt}$

$\overset{!}{=} \underline{e^{pt} \cdot \cos(qt)} + \underline{i e^{pt} \sin(qt)}$.

Rappel : une fct $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à valeurs en $\mathbb{C}$ est toujours de la forme

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t).$$

⚠ $(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}$

et f est CONTINUE $\Leftrightarrow$ f_1 et f_2 SONT SIMULTANÉMENT CONTINUES.

$\Rightarrow$ $e^{\alpha t}$ CONTINUE SUR $\mathbb{R}$.

Primitiv. $\Rightarrow \int_a^b e^{\alpha t}\,dt$ EXISTE POUR TOUT $[a, b]$.

PRIMITIVE : $\boxed{\text{EX } 10.2}$

$f_1(t) = e^{pt} \cos(qt) \qquad F_1(t) = ?$

$\boxed{\text{EX. } 10.2} \Longleftarrow$ ⚠

FAIT : LES FONCTIONS DE LA FORME

$$f(t) = e^{pt} \cdot (\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt)) \quad (\text{AVEC } p^2+q^2 \neq 0)$$

une primitive de la même forme

EN EFFET : SI L'ON DÉRIVE $f(t)$ on trouve

$$f'(t) = \left[e^{pt}(\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt))\right]'$$

$$= p e^{pt}(\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt)) + e^{pt}(-\alpha \cdot q \cdot \sin(qt) + \beta q \cos(qt))$$

$$= e^{pt}\left(\underline{(\alpha p + \beta q)} \cos(qt) + \underline{(\beta p - \alpha q)} \sin(qt)\right)$$

LA TRANSFORMATION $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha p + \beta q \\ \beta p - \alpha q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ EST LINÉAIRE

ET COMME $\underline{\det \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} = p^2 + q^2}$ ELLE EST BIJECTIVE.

$\Rightarrow F_1(t)$ et $F_2(t)$ SONT DE LA MÊME FORME.

ET EXISTENT SUR $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ LA FONCTION $e^{\alpha t}$ EST RIEMANN INTÉGRABLE SUR TOUS LES INTERVALLES $[a,b]$.

. POUR LE CALCUL DE L'INTEGRAL

(10)

→ Si $\alpha \in \mathbb{R}$ on sait que une ~~prim~~ PRIMITIVE

EST $\dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$. $\Rightarrow \int_a^b e^{\alpha t} = \left[\dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_a^b = \dfrac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha}$.

→ Si $\alpha \in \mathbb{C}$. La primitive est calculable par le calcul précédent :

~~CALCUL GENERAL~~ :

$$\begin{cases} F_1(t)' = e^{pt} \cos(qt) = e^{pt}\left((\alpha p + \beta q)\cos(qt) + (\beta p - \alpha q)\sin(qt)\right) \\ F_1(t) = e^{pt}\left(\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha p + \beta q = 1 \\ \beta p - \alpha q = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE INVERSE $\dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} \\ \frac{q}{p^2+q^2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow F_1(t) = e^{pt}\left(\frac{p}{p^2+q^2}\cos(qt) + \frac{q}{p^2+q^2}\sin(qt)\right)$$

MEME CALCUL POUR F_2 :

$$\begin{cases} F_2'(t) = e^{pt} \cdot \sin(qt) \\ F_2(t) = e^{pt}\left(\alpha' \cos(qt) + \beta' \sin(qt)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_2(t) = e^{pt}\left(\frac{-q}{p^2+q^2}\cos(qt) + \frac{p}{p^2+q^2}\sin(qt)\right). \Longrightarrow \dots$$

2.3 $\sqrt{t} = t^{1/2} \overset{DEF}{=} e^{\frac{1}{2}\ln(t)}$

$\Rightarrow$ DEFINIE POUR $t \geq 0$

$\Rightarrow$ CONTINUE POUR $t \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{t}\,dt$ EXISTE, $\forall\ 0 \leq a \leq b < +\infty$

__PRIMITIVE__: $\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)' = t^{1/2}$.

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{t} = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_a^b = \frac{2}{3}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right).$$

2.4 $\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2}\ln(t)}$

DEFINIE POUR $t > 0$

CONTINUE POUR $t > 0$

$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ existe $\forall\ 0 < a \leq b < +\infty$

__PRIMITIVE__: $(2\sqrt{t})' = t^{-1/2}$.

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\left[\sqrt{t}\right]_a^b = 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right).$$

11

2.5 $t^{1/3} = \sqrt[3]{t}$

DEFINIE SUR $\mathbb{R}$

CONTINUE SUR $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_a^b \sqrt[3]{t}\,dt$ EXISTE $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

PRIMITIVE : $\left(\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right)' = t^{1/3}$

MEME DOMAINE DE DEF.

$$\Rightarrow \int_a^b t^{1/3}\,dt = \left[\frac{3}{4}t^{4/3}\right]_a^b = \frac{3}{4}\left(b^{4/3} - a^{4/3}\right).$$

2.6 $\frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1}$

DEFINIE ~~POUR~~ $\mathbb{R}$

CONTINUE SUR $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt$ EXISTE $\forall a,b \in \mathbb{R}$

PRIMITIVE : $\arctan(t)' = \frac{1}{1+t^2}$.

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[\arctan(t)\right]_a^b = \arctan(b) - \arctan(a).$$

EX. 3

La DECOMPOSITION EN FRACTIONS RATIONNELLES PERMET DE SE RAMENER À DES FRACTIONS DU TYPE :

1) $\dfrac{a}{x-b} \Longrightarrow$ PRIMITIVE $= \left(a \cdot \ln|x-b|\right)$

2) $\dfrac{a}{(x-b)^n}$, $n \geq 2 \Rightarrow$ PRIMITIVE $=$ $\dfrac{a}{-(n-1)} \cdot \dfrac{1}{(x-b)^{n-1}}$

3) $\dfrac{x+d}{(ax^2+bx+c)^n}$ t.q. $(b^2-4ac)<0$, $(a \neq 0)$
$\Delta < 0$

POUR NOUS $n=1$ POUR SIMPLIFIER.

$\Rightarrow$ PRIMITIVE = ? IDEE : "NUM = (DENOM)$'$ "

$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

$$x+d = \frac{2a(x+d)}{2a} = \frac{2ax+2ad}{2a} = \frac{1}{2a}(2ax+b) - \frac{b}{2a} + d$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+d}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{1}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \int \frac{-\frac{b}{2a}+d}{ax^2+bx+c}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

PRIMITIVE : $\frac{1}{2a} \ln|ax^2+bx+c|$?

1

4) $\displaystyle\int \frac{K}{ax^2+bx+c}\,dx$ (12)

ON SAIT INTEGRER $\frac{1}{1+y^2}\,dy$ $\Rightarrow$ ON VEUT EXPRIMER

$ax^2+bx+c = (1+y)^2 \cdot a$
CONST

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= (\sqrt{a}x)^2 + 2\frac{b/2}{\sqrt{a}}\sqrt{a}x + c \\
&= (\sqrt{a}x)^2 + 2\,\frac{b/2}{\sqrt{a}}\,\sqrt{a}\,x + \left(\frac{b/2}{\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{b/2}{\sqrt{a}}\right)^2 + c \\
&= \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b/2}{\sqrt{a}}\right)^2 + c - \left(\frac{b/2}{\sqrt{a}}\right)^2 \\
&= \left[\Bigg(\underbrace{\frac{\sqrt{a}x + \frac{b/2}{\sqrt{a}}}{\sqrt{c-\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}}}_{y}\Bigg)^2 + 1\right]\left(c - \left(\frac{b/2}{\sqrt{a}}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

C'EST PLUS COMPLIQUÉ À ECRIRE QU'À FAIRE

EXEMPLE: $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-3x+2}\,dx$ EX. 3.

$$\int \frac{1}{4x^2-3x+2}\,dx \qquad \Delta = 9-32<0$$

$$\Downarrow$$

"arctan (y)"

$$4x^2-3x+2 = (2x)^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot 2x + 2$$

$$= \underbrace{(2x)^2 - 2\,\frac{3}{4}\,2x + \left(\frac{3}{4}\right)^2}_{(2x-\frac{3}{4})^2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2$$

$$\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2 + 2 - \frac{9}{16}$$

1^{er} changement DE VARIABLE :

$$y = 2x - \frac{3}{4} \quad , \quad dy = 2\,dx \qquad 2-\frac{9}{16} = \frac{23}{16}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{y^2+2-\frac{9}{16}}\,\frac{dy}{2}$$

$$y^2+2-\frac{9}{16} = \left(2-\frac{9}{16}\right)\left(\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{23}{16}}}\right)^2+1\right)$$

2^{eme} CHANGEMENT DE VARIABLE

$$z = \frac{y}{\sqrt{\frac{23}{16}}} \Rightarrow dz = \frac{4}{\sqrt{23}}\,dy$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{4x^2-3x+2} = \int \frac{1}{y^2+\frac{23}{16}}\,\frac{dy}{2} = \int \frac{1}{\frac{23}{16}(z^2+1)}\,\frac{\sqrt{23}}{2\cdot 4}\,dz$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{23}}{23}\cdot\frac{16}{8}}_{c} \int \frac{1}{1+z^2}\,dz = c\cdot\arctan(z)$$

13

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{4x^2 + 3x + 2} = \frac{\sqrt{23}}{23} \cdot \frac{16}{8} \int \frac{1}{1+t^2}\, dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \int \frac{1}{1+z}\, dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \cdot \arg\tan(z) + \text{const}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \arg\tan\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{23}{16}}}\right) + \text{const}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \arg\tan\left(\frac{(2x - 3/4)\,4}{\sqrt{23}}\right) + \text{const}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \arg\tan\left(\frac{8x - 3}{\sqrt{23}}\right) + \text{const}$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow \text{si} \quad \underline{\deg \text{NUM} \geq \deg \text{DEN}}$$

$\Downarrow$

FAIRE DIVISION EUCLIDIENNE

$$\begin{array}{l|l} x^3 & (x^2+1) \\ \hline x^3 + x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$\deg$ NUM < $\deg$ DEN

$$x^3 = (x^2+1)x - x$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)x - x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \text{const}.$$

NOTE : 1) LES POSSIBLES POLYNOMES IRREDUCTIBLES DE $\mathbb{R}[x]$ SONT DE DEG 1 OU 2.

2) LES POSSIBLES ELEMENTS SIMPLES SONT

$(\cdot)$ $\frac{a}{(x-b)^m}$, $m \geq 1$ $\longrightarrow$ $\lg$ si $m=1$; $\frac{\text{CONST}}{(x-b)^{m-1}}$, $m \geq 2$

$(:)$ $\frac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^m}$, $m \geq 1$ $\longrightarrow$ NOUS ON NE REGARDE QUE ~~[illegible]~~ LE CAS $m=1$

$\longrightarrow$ arctan, $\longrightarrow$ ln

FRACTIONS RATIONNELLES

(ALGORITHME)

14

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ P, Q POLYNOMES.

1) Si $\deg P \geq \deg Q$ $\Longrightarrow$ FAIRE DIVISION EUCLIDIENNE ET RETROUVER $\deg(P) < \deg(Q)$

2) DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLES

3) TROUVER LA PRIMITIVE DES ELEMENTS SIMPLES.

EX.3 $\int \frac{1}{x(1+x)^2} dx$ $f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

$$a = x f(x)\Big|_{x=0} = x \cdot \frac{1}{x(1+x)^2}\Big|_{x=0} = 1$$

$$c = (1+x)^2 f(x)\Big|_{x=-1} = (1+x)^2 \frac{1}{x(1+x)^2}\Big|_{x=-1} = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{1}{x \cdot (1+x)^2}$$

$$b = \left(f(x) + \frac{1}{(1+x)^2}\right)(1+x)\Big|_{x=-1}$$

$$= \left(\frac{1}{x(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x^2)}\right)(1+x)\Big|_{x=-1}$$

$$= \frac{\cancel{(1+x)^2}}{x\,\cancel{(1+x)^2}}\Big|_{x=-1} = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{1+x} - \int \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$= \ln|x| - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}.$$

15

EX.3

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$$

$$d = f(x)\cdot(x+1)\Big|_{x=-1} = \frac{x^2}{x^4-1}(x+1)\Big|_{x=-1} = \frac{x^2}{(x^2+1)(x-1)}\Big|_{x=-1} = \frac{+1}{2\cdot(-2)} = \frac{-1}{4}$$

$$c = f(x)(x-1)\Big|_{x=1} = \frac{x^2}{(x^2+1)(x+1)}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

a et b $\in \mathbb{R}$ donc on peut appliquer une astuce

$$ai+b = f(x)\cdot(x^2+1)\Big|_{x=i} = \frac{x^2}{x^2-1}\Big|_{x=i} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $a = 0$ $b = 1/2$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1/2}{x^2+1} + \frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1}}$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \boxed{\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|1+x|}$$

EX 4

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \sin'(x) = \frac{\cancel{i}e^{ix} + ie^{-ix}}{2\cancel{i}} = \cos(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos(x)' = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = -\sin(x)$$

DEFINITION :

$$\begin{cases} \sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sinh(x)' = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \\ \cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \Rightarrow \cosh(x)' = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh(x) \end{cases}$$

$$\sin(x)^2 + \cos^2(x) = 1 \Longrightarrow \cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$$

$\cancel{\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2 =}$

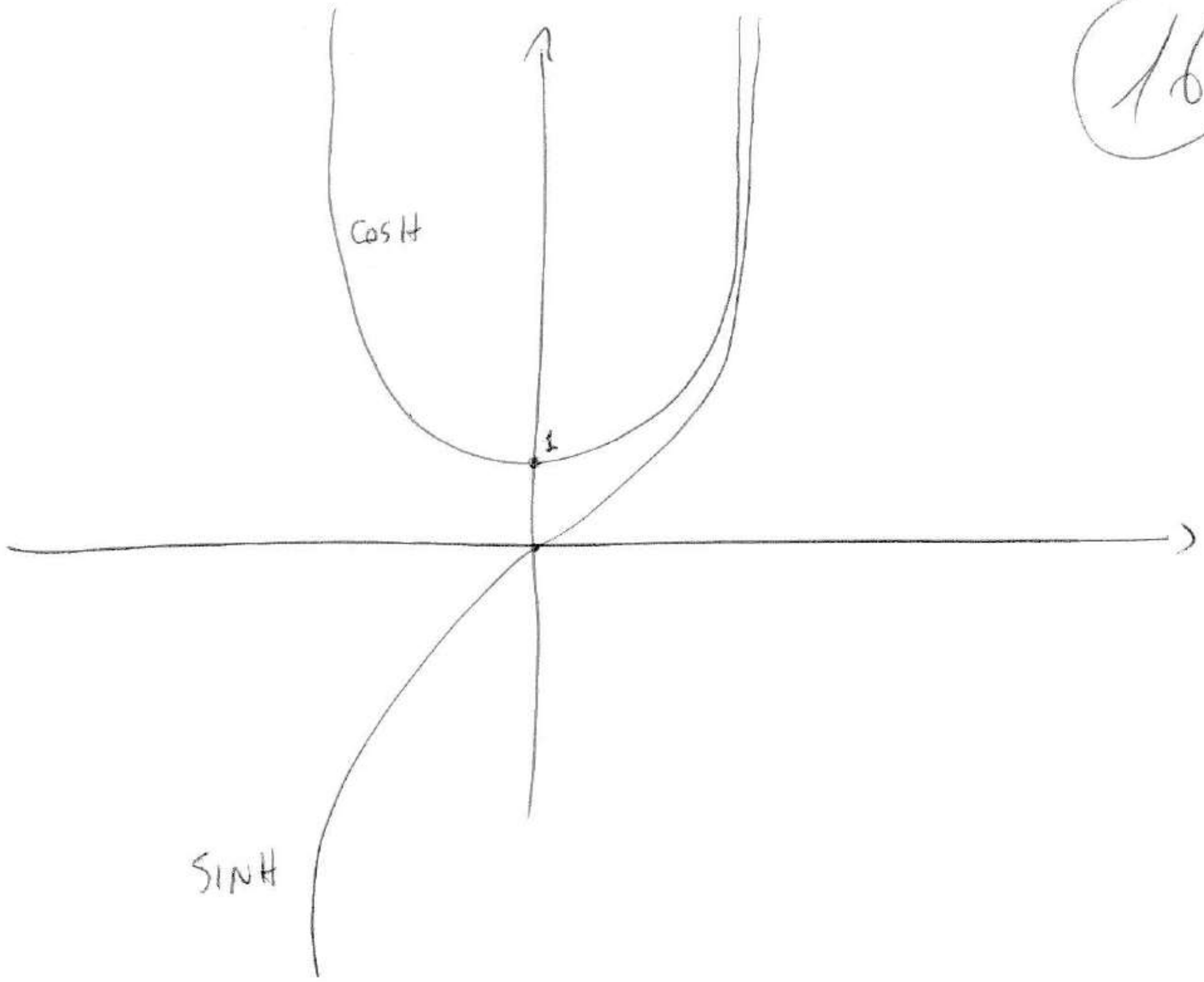
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \Rightarrow \cosh(x)^2 = 1 + \sinh(x)^2$$

Remarque : • $\sinh(x)$ EST BIJECTIVE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ARCSINH(x) = SON INVERSE

$$= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsinh}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$



COSH
1
SINH

$\Rightarrow$ <u>EX. 4.1</u> $\quad \int \sqrt{1+x^2}\, dx$ ON UTILISE

$\cosh(t)^2 = 1 + \sinh(t)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sinh(t) \\ dx = \cosh(t)\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{1+\sinh(t)^2}\,.\cosh(t)\, dt$$

$$= \int \sqrt{\cosh(t)^2}\, \cosh(t)\, dt$$

$$= \int |\cosh(t)|\, \cosh(t)\, dt \qquad \underline{|\cosh(t)| = \cosh(t)\ \forall t}$$

$$= \int \cosh(t)^2\, dt.$$

COMME POUR LES FONCTIONS POLYNOMIALES DE SIN ET COS ON PEUT <u>LINEARISER $\cosh(t)^2$</u>.

$$\cosh(t)^2 = \left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\underbrace{e^{t}e^{-t}}_{1}\right) = \frac{1}{2}\cosh(2t) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \cosh(t)^2 dt = \int \frac{1}{2}\cosh(2t) + \int \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sinh(2t)}{2} + \frac{t}{2}.$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2\,\mathrm{arcsinh}(x)) + \frac{\mathrm{arcsinh}(x)}{2}$$

$\boxed{EX.4.2}$ $\int \sqrt{x^2-1}$

$x^2-1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

Si $x \geq 1$ on peut poser $\begin{cases} x = \cosh(t), \ t \geq 0. \\ dx = \sinh(t)\,dt \end{cases}$

$\cosh(t)^2 - 1 = \sinh^2(t)$ $\quad t \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sinh(t)^2} = |\sinh(t)| = \sinh(t)$.

$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot\sinh(t)\,dt$

$= \int \sinh(t)^2\,dt$

LINEARISATION $\sinh(t)^2$:

$\sinh(t)^2 = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t} - 2e^t e^{-t}\right)$

$= \frac{1}{2}\sinh(2t) - \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4} \frac{e^{2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} - e^{-2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\right) - \left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 - \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sinh(2t) - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cosh(2t)}{2} - \frac{1}{2}\, t$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cosh(2\,\operatorname{argcosh}(x))}{2} - \frac{1}{2}\,\operatorname{argcos}(x).$$

Si $X \leq 1 \Rightarrow x = -\cosh(t),\ t \geq 0. \quad t = \operatorname{argcosh}(-x)$

$$\Rightarrow dx = -\sinh(t)\, dt, \quad t \geq 0.$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = \cosh(t)^2 - 1 = \sinh(t)^2, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sinh(t)^2} = |\sinh(t)| = \sinh(t)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \sinh(t) \cdot (-\sinh(t))\, dt$$

$$= -\int \sinh^2(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\cosh(2t)}{2} + \frac{1}{2}\, t$$

$$= -\frac{1}{4}\cosh(2\,\operatorname{argcosh}(-x)) + \frac{1}{2}\operatorname{argcosh}(-x)$$

4.3 $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$$1-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff x \in [-1,1].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sin(t) \\ dx = \cos(t)\,dt \end{cases} \qquad \sin(t) = \text{BIJECTIVE CROISSANTE}$$

$$t \longrightarrow \sin(t) = x$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\cong} [-1,1]$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin(t)^2} = \sqrt{\cos(t)^2} = |\cos(t)| \underset{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{=} \cos(t).$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

LINEARISATION $\cos(t)^2$

$$\cos(t)^2 = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2t}+e^{-i2t}+2\cancel{e^{it}}\cancel{e^{-it}}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \cos(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int \cos(2t) + \int \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2}$$

$$t = \arg\sin(t)$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2 \arg\sin(x)) + \frac{\arg\sin(t)}{2} .$$

5

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-i2x} - 2e^{ix}e^{-ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \int \frac{dx}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{x}{2}\ .$$

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\Big(e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + \binom{4}{2}e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-i4x}\Big)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\left(e^{i4x} + e^{-i4x}\right) + 4\left(e^{i2x} - e^{-2x}\right) + \underset{\frac{4\cdot 3}{2} = 6}{\binom{4}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{6}{16}$$

$$\Rightarrow \int \cos^4(x)\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{8}x\ .$$

$$\sin^2(x)\cdot\cos^4(x)$$
$$\parallel$$
$$\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}-2\overbrace{e^{ix}e^{-ix}}^{1}\right)\left(e^{i4x}+4\overbrace{e^{i3x}e^{-ix}}^{e^{2ix}}+6\overbrace{e^{i2x}e^{-i2x}}^{1}+4\underbrace{e^{ix}e^{-3ix}}_{e^{-2ix}}+e^{-i4x}\right)$$

$$= \frac{-1}{64}\Big(e^{i6x}+4e^{i4x}+\boxed{6e^{i2x}}+4+e^{-i2x}$$
$$\boxed{e^{+i2x}}+4+6e^{-i2x}+4e^{-i4x}+e^{-i6x}$$
$$-2e^{i4x}\boxed{-8e^{i2x}}-12-8e^{-2ix}-2e^{-i4x}\Big)$$

$$= \frac{-1}{64}\left(\left(e^{i6x}+e^{-i6x}\right)+2\left(e^{i4x}+e^{-i4x}\right)-\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)-4\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\cos(6x)-\frac{1}{16}\cos(4x)+\frac{1}{32}\cos(2x)+\frac{1}{16}.$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx = -\frac{1}{32}\frac{\sin(6x)}{6}-\frac{1}{16}\frac{\sin(4x)}{4}+\frac{1}{32}\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{x}{16}$$
$$+\text{Const}$$

$$\sin^5(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$$

$$= \frac{1}{32 \cdot i^5} \Big(e^{i5x} - 5 e^{i4x} e^{-ix} + \underbrace{10}_{\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10} e^{i3x} e^{-i2x} - 10 e^{i2x} e^{-i3x}$$

$$+ 5 e^{ix} e^{-i4x} - e^{-i5x} \Big)$$

$i^5 = i$

$$= \frac{1}{32 \cdot i} \left(\left(e^{i5x} - e^{-i5x}\right) - 5\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{16} \sin(5x) - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{10}{16} \sin(x).$$

$$\Rightarrow \int \sin^5(x)\,dx = \frac{-1}{16} \frac{\cos(5x)}{5} + \frac{5}{16} \frac{\cos(3x)}{3} - \frac{10}{16} \cos(x).$$

EX. 5 (BIS)

ON PEUT TROUVER UNE PRIMITIVE DE $\sin(x)^p \cos(x)^q$, $p, q \in \mathbb{N}$ PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

1) p, q IMPAIRS $\Rightarrow t = \cos(2x)$, $x = \frac{1}{2}\arccos(t)$

$$dx = \frac{-1}{2\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

2) $\begin{cases} p & \text{IMPAIR} \\ q & \text{PAIR} \end{cases} \Rightarrow t = \cos(x)$

3) $\begin{cases} p & \text{PAIR} \\ q & \text{IMPAIR} \end{cases} \Rightarrow t = \sin(x)$

4) p, q PAIRS $\Rightarrow$ ON LINÉARISE

__EXEMPLES__ $\int \sin^5(x)\, dx$, $\begin{cases} p = \text{IMPAIR} \\ q = \text{PAIR} \end{cases} \Rightarrow t = \cos(x)$, $x = \arccos(t)$

$$dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\int \sin^5(x)\, dx = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^5 \cdot \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int (1-t^2)^2\, dt = -\int 1 + t^4 - 2t^2\, dt$$

$$= -t - \frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} = -\cos(x) - \frac{\cos(x)^5}{5} + \frac{2}{3}\cos(x)^3.$$

RÈGLE DE BIOCHE

$$\int \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}\, dx \quad , \quad P(x,y), Q(x,y) = \text{POLYNÔMES EN 2 VARIABLES}$$

(À COEFFICIENTS DANS $\mathbb{R}$)

= FRACTION RATIONNELLE EN $\sin(x)$, $\cos(x)$.

<u>Règle</u>: Soit $\boxed{f(x) = \dfrac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}}$

1) Si $f(x) = -f(-x) \Longrightarrow$ ~~FAIRE~~ ~~faire le changement~~ $t = \cos(x)$

$\Updownarrow$

$f(x) = g(\cos(x)) \cdot (\sin(x)\, dx)$

g FRACTION RATIONNELLE

---

2) Si $f(\pi - x) = -f(x) \Longrightarrow t = \sin(x)$

$\Updownarrow$

$f(x) = g(\sin(x)) \cdot \cos(x)\, dx$

---

3) Si $f(x + \pi) = f(x) \Longrightarrow t = \tan(x)$

$\Updownarrow$

$f(x) = g(\tan(x)) / \cos^2(x)$

---

4) Si aucun des précédents $\Rightarrow t = \tan(\frac{x}{2})$

(cela marche aussi dans les cas 1), 2), 3) mais donne des calculs très difficiles)

UTILE POUR BIOCHE

$$t = \sin(x) \Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = \sqrt{1-t^2} \\ \tan(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \arcsin(t) \\ dx &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{aligned}$$

$$t = \cos(x) \Rightarrow \begin{cases} \sin(x) = \sqrt{1-t^2} \\ \tan(x) = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \arccos(t) \\ dx &= \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \end{aligned}$$

$$t = \tan(x) \Rightarrow \begin{cases} \sin(x) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \arctan(t) \\ dx &= \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{aligned}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2\arctan(t) \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{aligned}$$

FORMULES RECURRENTES :

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

SI BESOIN :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}} \\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \end{cases}$$

NOTE POUR BIOCHE

LE DOMAINE DE DEFINITION DES CHANGEMENTS DE VARIABLE

$t = \sin(x)$ $\quad\quad$ $\underset{x}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \xrightarrow{\cong} \underset{t}{[-1, 1]}$

$x = \arcsin(t)$

$t = \cos(x)$ $\quad\quad$ $\underset{x}{[0, \pi]} \xrightarrow{\cong} \underset{t}{[-1, 1]}$

$x = \arccos(t)$

$t = \tan(x)$ $\quad\quad$ $\underset{x}{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \xrightarrow{\cong} \underset{t}{\mathbb{R}}$

$x = \arctan(t)$

Dans la pratique ON CHERCHE UNE PRIMITIVE DEFINIE SUR CES INTERVALLES, PUIS ON VERIFIE SI C'EST UNE PRIMITIVE PARTOUT

EX. 6.1 $\int \sin(x)^3\,dx \quad \rightarrow f(x) = \sin^3(x) \qquad f(-x) = -f(x)$

$t = \cos(x)$, $x = \arccos(t)$, $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$

$$\Rightarrow \int \sin(x)^3\,dx = \int \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \cdot \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int (1-t^2)\,dt$$

$$= -t + \frac{t^3}{3} = -\cos(x) + \frac{\cos(x)^3}{3}$$ DEFINIE POUR TOUT $x \in \mathbb{R}$

ON PEUT EGALEMENT LINEARISER :

$$\sin(x)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8i^3}\left(e^{i3x} - 3\underbrace{e^{i2x}e^{-ix}}_{e^{ix}} + 3\underbrace{e^{ix}e^{-i2x}}_{e^{-ix}} - e^{-i3x}\right)$$

$$= \frac{-1}{8i}\left(\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right)$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)^3\,dx = -\frac{1}{4}\left(\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right) - 3\left(-\cos(x)\right)\right)$$

$$= \frac{\cos(3x)}{12} - \frac{3}{4}\cos(x)$$

$$\left(-\cos(x) + \frac{\cos(x)^3}{3}\right)' = +\sin(x) + \frac{\cancel{3}\cos(x)^2(-\sin(x))}{\cancel{3}} = \sin(x) + (1-\sin(x)^2)(-\sin(x))$$

$$= \cancel{\sin(x)} + \cancel{(-\sin(x))} + \sin^3(x)$$ Ok

6.2 $\displaystyle\int \underbrace{\frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}}_{f(x)}\, dx$ DEFINIES POUR TOUT $x \in \mathbb{R}$

On a $f(-x) = -f(x) \Rightarrow \begin{cases} t = \cos(x), \quad x = \arccos(t) \\ \qquad dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\ \sin(x) = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}\, dx = \int \frac{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}{(2+t)^2} \frac{-dt}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$= -\int (2+t)^{-2}\, dt$$

$$= + \frac{(t+2)^{-1}}{} = \frac{1}{t+2}$$

$$= \frac{1}{\cos(x)+2}.$$ DEFINE POUR TOUT $x \in \mathbb{R}$

On auroit PU DEVINER QUE SI $g(x) = 2 + \cos(x)$

ALORS $f(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)^2} = g'(x) \cdot g(x)^{-2} \Rightarrow \int f = \dfrac{1}{g}.$

LE CHANGEMENT DE VARIABLE DE BIOCHE VAUT POUR $t \in [-1,1]$ ET $x \in [0,\pi]$ MAIS LA PRIMITIVE QU'ON A TROUVE EST UNE PRIMITIVE PARTOUT : $\left(\dfrac{1}{\cos(x)+2}\right)' = \dfrac{-1}{(\cos(x)+2)^2} \cdot (-\sin(x)) = f(x)$ ok

6.3 $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\, dx$ ← DÉFINIE POUR TOUT $x \in \mathbb{R}$

• changement DE VARIABLE $x = 6y \quad dx = 6\, dy$

$$\int \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{3}\right) dx = \int \sin(3y)\cdot\cos(2y)\, 6\, dy$$

MAINTENANT $\sin(3y)$ et $\cos(2y)$ sont COMBINAISON DE $\sin(y)$ et $\cos(y)$ (FORMULES DE DUPLICATION)

$\Rightarrow \boxed{f(y) = \sin(3y)\cdot\cos(2y)}$ EST EN RÉALITÉ UNE FRACTION RATIONNELLE DE $\sin(y)$ $\cos(y)$.

COMME $f(-y) = -f(y) \Rightarrow t = \cos(y)$

(BIOCHE) → $y = \arccos(t)$

$dy = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

MAIS AVANT IL FAUT EXPRIMER $\sin(3y)$ et $\cos(3y)$ EN FONCTION DE $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

FORMULE DE MOIVRE: $\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n$

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

→

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^2$$

$$= \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) + i\,2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1 \\ \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^3$$

$$= \underline{\cos(\theta)^3} + 3\cos(\theta)^2\left(i\sin(\theta)\right) + \underline{3\cos(\theta)\left(i\sin(\theta)\right)^2} + i^3\sin(\theta)^3$$

$$= \left(\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2\right) + i\left(3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 \\ \sin(3\theta) = 3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3 \end{cases}$$

=> EX. 6.3

$6y = x$

$$\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int \sin(3y)\,\cos(2y)\,6\,dy$$

$$= 6\cdot\int \left(3\cos(y)^2\sin(y) - \sin(y)^3\right)\cdot\left(2\cos(y)^2 - 1\right)dy$$

$$= 6\int \left(6\cos(y)^4\sin(y) - 3\cos(y)^2\sin(y) - 2\cos^2(y)\sin(y)^3 + \sin(y)^3\right)dy$$

BIOCHE : $t = \cos(y)$, $dy = -dt/\sqrt{1-t^2}$, $y = \arccos(t)$.

$$= 6\int\left(\left(6t^4\cancel{\sqrt{1-t^2}} - 3t^2\cancel{\sqrt{1-t^2}} - 2t^2\underbrace{(1-t^2)\cancel{\sqrt{1-t^2}}}_{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3} + (1-t^2)\cancel{\sqrt{1-t^2}}\right)\frac{-dt}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}\right.$$

$$= -36\frac{t^5}{5} + 18\frac{t^3}{3} + 12\int\underbrace{t^2(1-t^2)}_{t^2-t^4}dt - 6\int(1-t^2)\,dt$$

$$= \overbrace{-\frac{36}{5}t^5} + \underbrace{6t^3 + 4t^3} - \overbrace{\frac{12}{5}t^5} - 6t + \underbrace{2t^3}$$

$$= -\frac{48}{5}\cos\left(\frac{x}{6}\right)^5 + 12\cos\left(\frac{x}{6}\right)^3 + \ldots - 6\cos\left(\frac{x}{6}\right).$$

(DEFINIE PARTOUT)

$\underline{6.4]}$ $\int \sin^2(x) \cos^3(x)\, dx = (*)$

$$t = \sin(x), \quad x = \arcsin(x), \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos(x) = \sqrt{1-t^2}$$

$$(*) = \int t^2 (1-t^2) \cancel{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}} = \int (t^2 - t^4)\, dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin(x)^3}{3} - \frac{\sin(x)^5}{5}$$

ON AURAIT PU LINEAIRISER

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{+i2x} + e^{-2ix} - 2 \cancel{e^{ix} e^{-ix}}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}(\cos(2x) + \frac{1}{2}.\right)$$

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3 e^{i2x} e^{-ix} + 3 e^{ix} e^{-2ix} + e^{-i3x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).\right)$$

$$\sin^2(x)\cos^3(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\left(e^{+i2x} + e^{-2ix} - 2\right)\left(e^{i3x} + 3 e^{ix} + 3 e^{-ix} + e^{-i3x}\right)$$

$$= \frac{-1}{32}\left(e^{5ix} + 3 e^{+3ix} + 3 e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} + 3 e^{-ix} + 3 e^{-3ix} + e^{-i5x} - 2 e^{i3x} - 6 e^{ix} - 6 e^{-ix} - 2 e^{-i3x}\right)$$

$\boxed{6.5}$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,dx$ ← DEFINIE POUR TOUT $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)} \qquad f(-x) = f(x)$$

$$f(\pi - x) = f(x)$$

~~AUCUN DES CAS DE BIOCHE NE FONCTIONNE~~

$$t = \tan(x) \Leftarrow f(\pi + x) = + f(x).$$

$$x = \arctan(t)$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\sin(x)^2 = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+\sin(x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{(1+2t^2)\cancel{(1+t^2)}}\,dt = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}\,t)^2}\,dt$$

$$y = \sqrt{2}\,t$$

$$dy = \sqrt{2}\,dt \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\,t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(x))$$

↖ DEFINIE POUR $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$

$$= \frac{-1}{32}\left(\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)+\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right)$$

PEUT-ON PROLONGER PAR CONTINUITÉ CETTE FONCTION

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\operatorname{argtan}\big(\sqrt{2}\, \underbrace{\tan(x)}_{+\infty}\big)}_{\to \pi/2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \\[2em] \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\operatorname{argtan}\big(\underbrace{\sqrt{2}\, \tan(x)}_{-\infty}\big)}_{\to -\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

EX. 7 $\int x^3 \ln(x)\, dx = I(x)$ définie pour $x > 0$

$$\underset{F}{x^3}\ \underset{g}{\ln(x)}$$

$\boxed{\text{PAR PARTIES}}$ $\qquad (x\ln(x) - x)' = \ln(x)$.

$$I = \underset{F}{x^3}\,\underset{G}{(x\ln(x) - x)} - 3\int x^2 (x\ln(x) - x)$$

$$I = x^4 \ln(x) - x^4 - \underbrace{3\int x^3 \ln(x)}_{-3I} + 3\int x^3$$

$$I = x^4 \ln x - x^4 - 3I + \frac{3}{4} x^4$$

$$\Rightarrow 4I = x^4 \ln(x) - \frac{1}{4} x^4$$

$$I(x) = \frac{1}{4} x^4 \ln(x) - \frac{1}{16} x^4$$

VERIFICATION: $I'(x) = \frac{4}{4} x^3 \ln(x) + \cancel{\frac{1}{4} x^3} - \cancel{\frac{4}{16} x^3} \Rightarrow$ ok.

$$I = \int \underset{F}{e^{-x}} \underset{g}{\cos(x)}\, dx$$

$\boxed{\text{PAR PARTIES}}$ (2 FOIS).

$$I = e^{-x} \sin(x) + \int (+e^{-x}) \cdot \sin(x)$$

$$= e^{-x} \sin(x) + e^{-x}(-\cos(x)) + \int (+e^{-x})(-\cos(x))$$

$$\Rightarrow I(\cancel{x}) = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) - I(x)$$

$$\Rightarrow 2I(x) = e^{-x}(\sin(x) - \cos(x))$$

$$\boxed{I(x) = \frac{e^{-x}}{2}(\sin(x) - \cos(x)).}$$

SOLUTION ALTERNATIVE :

$$e^{-x} \cdot \cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{-x}(\cos(x) + i \sin(x))\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{-x} \cdot e^{ix}\right)$$

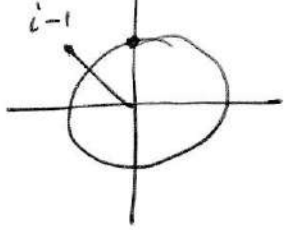
$$= \mathrm{Re}\left(e^{-x+ix}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(-1+i)x}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\text{PRIMITIVE} \\ \text{DE } e^{(i-1)x}\end{pmatrix} = \frac{1}{i-1} e^{(i-1)x}$$

$$\Rightarrow \int Re\left(e^{(i-1)x}\right) = Re\left(\int e^{(i-1)x}\right)$$

$$= Re\left(\frac{1}{i-1}\cdot e^{(i-1)x}\right)$$

$i-1 = ?$



$$i-1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\,3\pi/4} \Rightarrow \frac{1}{i-1}e^{(i-1)x} = \sqrt{2}^{-1} e^{-i\frac{3}{4}\pi + (i-1)x}$$

$$= \sqrt{2}^{-1} e^{-x}\cdot e^{i(-\frac{3}{4}\pi + x)}$$

$$= \sqrt{2}^{-1} e^{-x}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}+x\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi + x\right)\right)$$

$$\Rightarrow Re\left(\frac{1}{i-1}e^{(i-1)x}\right) = \sqrt{2}^{-1}\cdot e^{-x}\cdot\cos\left(-\frac{3\pi}{4}+x\right)$$

EN EFFET ON PEUT VERIFIER QUE

$$\frac{1}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right).$$

EX. 8 $\quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$\Longrightarrow h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ EST DERIVABLE ET

$h'(x) = f(x)$.

$$g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt = \int_0^{x^2} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt$$

$$= h(x^2) - h(x) .$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ est ~~de~~ composée de fonctions derivables $\Rightarrow$ $g(x)$ est derivable

$$\Rightarrow g'(x) = h'(x^2) \cdot 2x - h'(x).$$

$$= f(x^2) \cdot 2x - f(x).$$

Ex. 9 : 1) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE

PROPOSITION : $$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0 \right) \text{ OU } \left(\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq 0 \right).$$

Preuve : $\Uparrow$) • Si $\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq 0$ ALORS

$$\begin{cases} |f(t)| = -f(t), \ \forall t \in [a,b] \\ \int_a^b f(t)\, dt \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = -\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b - f(t)\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

• Si $\forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0$ ALORS

$$\begin{cases} |f(t)| = f(t), \ \forall t \in [a,b] \\ \int_a^b f(t)\, dt \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

$\Downarrow$) PAR L'ABSURDE. Si $\exists\, t_1, t_2 \in [a,b]$ t.q.

$f(t_1) < 0$ et $f(t_2) > 0$

~~$\Rightarrow \exists\, c < t_1 < d$ tels que $\forall t \in [c,d],\ f(t) < \frac{f(t_1)}{2} < 0$~~

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt + \int_d^e f(t)\,dt$$

$$\int_c^d f(t)\,dt \le \int_c^d \frac{f(t_1)}{2}\,dt = \frac{f(t_1)}{2}\cdot(d-c) < 0$$

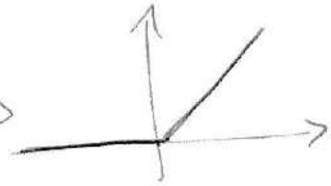
$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^c |f(t)|\,dt + \underbrace{\int_c^d |f(t)|\,dt}_{= -\int_c^d f(t)\,dt} + \cancel{\int_d^e |f(t)|\,dt}$$

Soit $f^+(t) := \max(f(t), 0)$

$f^-(t) := -\min(f(t), 0) = \max(-f(t), 0)$

f^+ et f^- sont <u>continues</u> car composées

DE FONCTIONS CONTINUES :

$\max(x, 0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \Longrightarrow$ 

$$\begin{cases} f^+ = \max(x, 0) \circ f(t) : [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\max(\cdot, 0)} \mathbb{R} \\ f^- = \min(0, x) \circ f(t) : [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow[\min(\cdot, 0)]{} \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \int_a^b f^+(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ EXISTENT.

$$\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}, \quad f^+ \geq 0, \; f^- \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} \left|\int f^+\right| = \int |f^+| \\ \left|\int f^-\right| = \int |f^-| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists t_1 \text{ t.q. } f(t_1) > 0 \Rightarrow f^+ \neq 0 \Rightarrow \int f^+ \neq 0 \\ \exists t_2 \text{ t.q. } f(t_2) < 0 \Rightarrow f^- \neq 0 \Rightarrow \int f^- \neq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f = \int f^+ - \int f^- = \left|\int f^+\right| - \left|\int f^-\right| \quad \circledast$$

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- = \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right|$$

CAR $f^+ \geq 0$ et $f^- \geq 0 \Rightarrow$ ON A VU QUE $\begin{cases} \left|\int f^+\right| = \int |f^+| = \int f^+ \\ \left|\int f^-\right| = \int |f^-| = \int f^- \end{cases}$

$$\circledast \Rightarrow -\left|\int f^-\right| < \int f < \left|\int f^+\right| \Rightarrow \boxed{\left|\int f\right| \leq \text{MAX}\left(\left|\int f^-\right|, \left|\int f^+\right|\right)}$$

$$\Rightarrow \left|\int f(t)\,dt\right| \leq \max\left(\left|\int f^-\right|, \left|\int f^+\right|\right) \underset{\neq}{<} \left|\int f^-\right| + \left|\int f^+\right| = \int |f|$$

L'INÉGALITÉ EST STRICTE

CAR

$$\left|\int f^-\right| > 0 \quad \text{et} \quad \left|\int f^+\right| > 0$$

$$\boxed{\underline{\text{Lemme}} : \forall\, r, s \in \mathbb{R},\ \text{si } r, s > 0 \Rightarrow \max(r,s) < r+s .}$$

---

9) 2)

$$\left|\int f\right| = \left|\int (f_1, f_2)\right| = \left|\left(\int f_1, \int f_2\right)\right| = \sqrt{\left(\int f_1\right)^2 + \left(\int f_2\right)^2} = \left(\left(\int f_1\right)^2 + \left(\int f_2\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\int |f| = \int |(f_1, f_2)| = \int \left(f_1^2 + f_2^2\right)^{1/2}$$

2) $f(x) = P(X) \cdot \cos(\alpha x)$ $\quad P \in \mathbb{R}[x]$

$\alpha \in \mathbb{R}$

COMME AVANT ON PEUT FAIRE UNE PREUVE PAR RECURRENCE :

- Si $P(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \Rightarrow \int P(x)\cos(\alpha X) = \sum_{n=0}^{d} a_n \int X^n \cos(\alpha X)$

$\Rightarrow$ il suffit de DEMONTRER L'ASSERTION POUR $P(x) = X^n$.

RECURRENCE: $\begin{cases} n = 0 \Rightarrow \int \cos(\alpha X) = + \frac{\sin(\alpha X)}{\alpha} \\ n = 1 \Rightarrow \int x\cos(\alpha x) = x\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} - \int \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} = \frac{x}{\alpha}\sin(\alpha x) + \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} \end{cases}$ EST BIEN DE LA FORME INDIQUEE.

Supposons que $\int x^{n-2}\cos(\alpha X) = Q_1(x)\cos(\alpha X) + Q_2(x)\sin(\alpha x)$.

$$\Rightarrow \int \underset{f}{X^n} \cdot \underset{g}{\cos(\alpha x)} \underset{\text{PAR PARTIES}}{=} X^n \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} - n\int x^{n-1}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

$$= X^n \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} - \frac{n}{\alpha}\left(x^{n-1}\frac{(-\cos(\alpha X))}{\alpha} - (n-1)\int x^{n-2}\frac{(-\cos(\alpha x))}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{X^n}{\alpha}\sin(\alpha x) + \frac{n}{\alpha^2}x^{n-1}\cos(\alpha x) - \frac{n}{\alpha}(n-1)\left(Q_1(x)\cos(\alpha x) + Q_2(x)\sin(\alpha x)\right)$$

c'est bien de la forme indiquée.

EX. 10 | 1) $P(x) =$ POLYNOME $\in \mathbb{R}[x]$.

$f(x) = P(x)\, e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\Longrightarrow \int f(x)\,dx = Q(x)\, e^{ax} + \text{Const} \qquad Q(x) \in \mathbb{R}[x].}$$

Preuve: Si $P(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n x^n \Rightarrow \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{d} a_n \int x^n e^{ax} dx$

- Il suffit de démontrer l'assertion pour $P(x) = x^n$.
- On va procéder par ~~induction~~ RECURRENCE sur n.

Si $n = 0 \Longrightarrow P(x) = 1$ et $\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \Rightarrow Q = \frac{1}{a}$

Supposons l'assertion démontrée pour $n-1$.

$$\Rightarrow \int \underset{F}{x^n} \underset{g}{e^{ax}} \underset{\text{PAR PARTIES}}{=} \underset{F}{x^n} \underset{G}{\frac{e^{ax}}{a}} - \frac{n}{a} \int \underset{f}{x^{n-1}} \underset{G}{e^{ax}}$$

PAR HYPOTHESE $\exists\, Q_{n-1}$ t.q. $\int x^{n-1} e^{ax} = Q_{n-1} \cdot e^{ax}$

$$\Rightarrow \int x^n e^{ax} = \frac{x^n}{a} e^{ax} - \frac{n}{a} Q_{n-1} e^{ax} = \left(\frac{x^n}{a} - \frac{n Q_{n-1}}{a}\right) e^{ax}$$

$$\Longrightarrow Q_n = \frac{1}{a}(x^n - n Q_{n-1}). \qquad \square$$

2) Autre solution :

$f(x) = P(x) \cos(\alpha x)$ EST LA PARTIE RÉELLE DE

$$f(x) = Re\left(P(x) \cdot \left(\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)\right)\right)$$

$$= Re\left(P(x)\, e^{i\alpha x}\right)$$

$$\Rightarrow \int Re\left(P(x)\, e^{i\alpha x}\right) = Re\left(\int P(x)\, e^{i\alpha x}\right)$$

$$\left(Q(x)\, e^{i\alpha x}\right)' = Q' e^{i\alpha x} + Q \cdot i \cdot \alpha \cdot e^{i\alpha x}$$

$$= \left(Q' + Q \cdot i \cdot \alpha\right) e^{i\alpha x}$$

$P = x^n \Rightarrow$