3/12/2020 TOPOLOGIE B

1

EXEMPLES :

$$\left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \xrightarrow[I]{} \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$$

$$g \longmapsto I(g) = \int_0^x g(t)\,dt$$

= LA PRIMITIVE DE g QUI VAUT 0 EN $x=0$.

I EST LINÉAIRE. MONTRONS QUE I EST CONTINU

$$\|I(g)\|_\infty = \left\| \int_0^x g(t)\,dt \right\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x g(t)\,dt \right| \le \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |g(t)|\,dt$$

$$\le \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x \|g\|_\infty\,dt = \|g\|_\infty \cdot \overbrace{\left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x 1\cdot dx\right)}^{1} = \|g\|_\infty$$

CELA MONTRE QUE I EST CONTINU ET QUE

SA NORME EST $\|I\|_{op} \leq 1$.

2

EN EFFET ON A $\|I\|_{op} = 1$ ~~CAR~~ SI $g(x) = 1, \forall x \in [0,1]$

ALORS $I(\underset{g}{1}) = 1 \Rightarrow \|I(1)\|_\infty = \|1\|_\infty \Rightarrow \|I\|_{op} = 1$.

<u>COROLLAIRE</u> : (PASSAGE À LA LIMITE SOUS LE SIGNE D'INTEGRAL).

SI $(f_n)_n$ EST UNE SUITE DE FONCTIONS CONTINUES SUR $[0,1]$ ~~TELLES QUE~~ QUI CONVERGENT UNIFORMEMENT VERS f (C'EST A DIRE $\|f_n - f\|_\infty \to 0$)

ALORS :

ALORS $I(f_n) \longrightarrow I(f)$. CAR I EST CONTINU.

ET DON IL ENVOIE LES SUITES CONVERGENTES DANS DES SUITES CONVERGENTES.

EN D'AUTRES TERMES

$$(*) \quad \boxed{\lim_n \underbrace{\int_0^x f_n(t)\,dt}_{I(f_n)(x)} = \int_0^x \left(\lim_n f_n\right)(t)\,dt}$$

⚠ CE N'EST PAS VRAI SI $f_n \longrightarrow f$ PONCTUELLEMENT (C'EST À DIRE SI $\forall x \in [0,1]$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$).

POUR AVOIR $(*)$ IL FAUT QUE $\lim_n \max_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| = 0$)

EXEMPLES : LA DÉRIVÉE N'EST PAS CONTINUE PAR RAPPORT AUX NORMES $\|\cdot\|_\infty$ AU DÉPART ET À L'ARRIVÉE :

4

$$\left(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \xrightarrow[d/dx]{} \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$$

$$g(x) \longmapsto g'(x)$$

- d/dx EST LINÉAIRE, MAIS PAS CONTINUE PAR RAPPORT À CES DEUX NORMES.

PREUVE : • ON VEUT UTILISER LE CRITERE SEQUENTIEL DE CONTINUITÉ.

• ON CHERCHE UNE SUITE $(g_n)_n$ DANS $\left(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ AU DEPART TELLE QUE

5

$$(1) \quad g_n \longrightarrow 0 \iff \|g_n\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}(g_n) \not\longrightarrow 0 \iff \|g_n'\|_\infty \not\longrightarrow 0.$$

• ON CONSIDERE $\boxed{g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \quad n \geq 1.}$

6

ON A $\|g_n\|_\infty = \left\|\frac{\sin(nx)}{n}\right\|_\infty = \frac{1}{n}\|\sin(nx)\|_\infty$

$$= \frac{1}{n}\Bigg(\sup_{x\in[0,1]} \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leq 1}\Bigg) \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \|g_n\|_\infty \longrightarrow 0.$

- MONTRONS QUE $\|g_n'\|_\infty \not\longrightarrow 0.$

ON A $\boxed{g_n'(x) = \cos(nx)} \Rightarrow$

7

$$\|g_n'(x)\|_\infty = \|\cos(nx)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\cos(nx)|$$

$y = nx$

$$= \sup_{y\in[0,n]} |\cos(y)|$$

$$= 1 \quad (\text{POUR } n \geq 3.)$$

DONC $\|g_n'\|_\infty \not\to 0$

CELA DÉMONTRE QUE d/dx N'EST PAS CONTINUE

ON PEUT RENDRE $\frac{d}{dx}$ CONTINUE EN CHANGEANT LA NORME DE $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $\boxed{\|g(x)\|' \overset{\text{DEF}}{=} \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty}$, $\forall g \in C'([0,1],\mathbb{R})$

ON A DÉMONTRÉ DANS LES EXEMPLES QU'ON A FAIT QUE $\|\cdot\|'$ EST UNE NORME SUR $C'([0,1],\mathbb{R})$.

PROPOSITION: $\frac{d}{dx} : \left(C'([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|'\right) \longrightarrow \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$

EST CONTINUE PAR RAPPORT À CES DEUX NORMES

PREUVE : $\forall g \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ on a

$$\begin{cases} \|g\|_\infty \leq \|g\|' = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty \\ \|g'\|_\infty \leq \|g\|' = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty . \end{cases}$$

Si $(g_n)_n$ est une suite dans $(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\,\|')$ telle que $g_n \longrightarrow 0$ par rapport à $\|\cdot\|'$, ~~alors~~ c'est à dire $\|g_n\|' \longrightarrow 0$, alors par les gendarmes

$$\underset{\searrow}{0} \leq \|g'_n\|_\infty \leq \underset{\swarrow}{\|g_n\|'} \Rightarrow \|g'_n\|_\infty \longrightarrow 0 \Rightarrow g'_n \longrightarrow 0 \text{ dans } (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

PAR LE CRITÈRE SÉQUENTIEL DE CONTINUITÉ CELA SIGNIFIE PRÉCISÉMENT QUE d/dx EST CONTINU QUAND AU DÉPART ON MET LA NORME $\|\cdot\|'$ SUR $C^1([0,1],\mathbb{R})$ ET À L'ARRIVÉE ON MET LA NORME $\|\cdot\|_\infty$ SUR $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

10

NOUVEAU CHAPITRE

COMPLÉTUDE DANS LES EVN.

SUITES DE CAUCHY DANS LES EVN.
(RAPPEL)

11

<u>DEF:</u> Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un EVN, soit $(x_n)_n$ une suite dans V. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si $\underline{\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N}$

$$\underline{\| x_n - x_m \|_V < \varepsilon.}$$

<u>REMARQUE:</u> On a montré que dans tout E.V.N. on a

$$\left[(x_n)_n \text{ converge} \right] \Longrightarrow \left[(x_n)_n \text{ de Cauchy} \right] \Longrightarrow \left[(x_n)_n \text{ bornée} \right]$$

12

- ON SAIT QUE SI $V = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ PAR AXIOME LES SUITES DE CAUCHY DE $\mathbb{R}$ CONVERGENT TOUJOURS VERS UN NOMBRE RÉEL.

- ON A AUSSI DÉMONTRÉ QU'UNE SUITE DE CAUCHY DANS $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ CONVERGE TOUJOURS

- SI L'ON REMPLACE ~~UNE~~ LA NORME $\|\cdot\|_\infty$ DE $\mathbb{R}^m$ PAR UNE AUTRE NORME $\|\cdot\|$ $\Rightarrow$ ON SAIT QUE $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|$

$\Rightarrow$ LA SUITE $(x_m)_m$ RESTE DE CAUCHY PAR RAPPORT À

LA NORME $\|\cdot\|$ ET ELLE RESTE AUSSI CONVERGENTE VERS LA MÊME LIMITE CAR LA NOTION DE CONVERGENCE D'UNE SUITE, AINSI QUE LA LIMITE DE LA SUITE, NE DÉPENDENT QUE DE LA TOPOLOGIE DE L'ESPACE ET NON PAS DE LA NORME QUI A SERVI À DÉFINIR LA TOPOLOGIE (i.e. LES OUVERTS). DEUX NORMES ÉQUIVALENTES DONNENT LIEU ~~AUX~~ À LA MÊME TOPOLOGIE ET AUX MÊMES SUITES CONVERGENTES. DONC, ON PEUT AFFIRMER QUE TOUTE SUITE DE CAUCHY EST CONVERGENTE DANS $\mathbb{R}^n$ (PAR RAPPORT À N'IMPORTE QUELLE NORME).

MALHEUREUSEMENT IL EXISTENT

DES ESPACES VECTORIELS NORMES

AVEC DES SUITES DE CAUCHY NON

CONVERGENTES. (ON A DONNÉ UN EXEMPLE)

14

DEFINITION: UN EVN $(V, \|\cdot\|_V)$ EST

DE **BANACH** SI TOUTE SUITE DE

CAUCHY DANS V CONVERGE VERS

UN ELEMENT DE V.

EXEMPLES : 1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ EST UN EVN DE BANACH

2) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ EST DE BANACH

(QUEL QUE SOIT LA NORME $\|\cdot\|$)

3) $\left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ EST DE BANACH.

4) $\left(B([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ = FONCTIONS BORNÉES

EST AUSSI DE BANACH.

5) $\left(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|'\right)$ EST DE BANACH $\left(\|g\|' = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty\right)$

PREUVE DE 4) : Soit $(f_n)_n$ UNE SUITE DE CAUCHY DANS $(B([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, ON VEUT MONTRER QU'ELLE CONVERGE.

- LE FAIT QUE $(f_n)_n$ EST DE CAUCHY SIGNIFIE QUE $\forall \varepsilon>0, \exists N ; \forall n,m \geq N$

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon .$$

$$\|_{DEF}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon \Longrightarrow \forall x\in[0,1] \quad |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$$

- CELA SIGNIFIE QUE $\forall x\in[0,1]$ FIXÉ LA SUITE

$(f_n(x))_n$, QUI EST UNE SUITE DE NOMBRES RÉELS, EST UNE SUITE DE CAUCHY DANS $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$, $\boxed{\lim_n f_n(x) \text{ EXISTE}}$ CAR $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ EST COMPLET.

NOTONS PAR $\boxed{f(x) \overset{\text{DEF}}{=} \lim_n f_n(x)}$

$x \mapsto f(x)$ EST UNE FONCTION. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

- MONTRONS QUE f EST BORNÉE ET QUE $f_n \to f$ DANS B PAR RAPPORT À $\|\cdot\|_\infty$.

18

- Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n, m \geq N$ ON A

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

- ~~POUR TOUT $x \in [0,1]$ ON A $\lim_n f_n(x) = f(x)$~~

~~$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N'_x, \forall n \geq N'_x, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$~~

- $\forall n \geq N$, $\|f_n - f_N\| < \varepsilon \Longrightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_N(x)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall x \in [0,1], \forall n \geq N, \boxed{|f_n(x)| \leq |f_N(x)| + \varepsilon} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n} \cancel{|} f_n(x) \cancel{|} \leq |f_N(x)| + \varepsilon \ , \ \forall x \in [0,1]$$

$$\wedge\!\!\!\backslash$$

$$\|f_N\|_\infty + \varepsilon \overset{\text{DEF}}{=\!=} M \ .$$

19

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in [0,1] \ , \ \underbrace{\lim_{n} \cancel{|} f_n(x) \cancel{|}} \leq M}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in [0,1] \ , \quad f(x) \leq M \ .$$

$\Rightarrow$ f EST BORNÉE SUR $[0,1]$.

• ON A MONTRÉ QUE $f \in B([0,1],\mathbb{R})$. 20

• MONTRONS QUE $f_n \longrightarrow f$, C'EST À DIRE

$$\boxed{\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0}$$

• $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

ON VIENT DE MONTRER QUE $\forall \varepsilon > 0$ $\forall n \geq N$ ~~ON A~~

ET $\forall x \in [0,1]$ ON A $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \boxed{\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \forall n \geq N} \Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \square$$