TOPOLOGIE B 15- DECEMBRE -2020



$\left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ EST <u>DE BANACH</u>.

<u>PREUVE</u> : • ON A VU QUE $\left(\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ EST DE BANACH. (VU LA DERNIERE FOIS)

• ON A VU AUSSI QUE SI $(f_n)_n$ EST UNE SUITE DANS $\left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ QUI CONVERGE <u>UNIFORMEMENT</u> (ÇA VEUT DIRE, PAR RAPPORT À LA NORME $\|\cdot\|_\infty$) VERS UNE FONCTION $f$, ALORS $f$ EST CONTINUE ET BORNÉE.

• POUR MONTRER QUE $\left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ EST DE BANACH

ON DOIT MONTRER QUE TOUTES LES SUITES

2

DE CAUCHY $(f_n)_n$ ~~CONVERGENT VER~~ DANS $(C^0([0,1],\mathbb{R})$

CONVERGENT VERS UNE FONCTION $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ PAR

RAPPORT À LA NORME $\|\cdot\|_\infty$. $\left(\lim_n f_n = f\right)$.

• SOIT $(f_n)_n$ UNE SUITE DE CAUCHY DANS $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

$\Longrightarrow C^0([0,1],\mathbb{R}) \subseteq B([0,1],\mathbb{R})$ ET $(f_n)_n$ EST AUSSI

UNE SUITE DE CAUCHY DANS $\left(B([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

• ON A VU QUE LES SUITES DE CAUCHY DANS $(B([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

CONVERGENT. DONC $\exists f \in B([0,1],\mathbb{R})$ t.q. $\lim_n f_n = f$ DANS $(B([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

C'EST À DIRE $f_n$ CONVERGE UNIFORMÉMENT VERS $f$. 3

. DONC PAR CE QU'ON A VU IL Y A QUELQUE SÉANCE LA FONCTION $f$ EST CONTINUE. (LIMITE UNIFORME DE FONCTIONS CONTINUES EST CONTINUE).

→ LA SUITE $(f_n)_n$ CONVERGE DANS $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

$\square$

---

ON NE FERA PAS LA PREUVE DU FAIT QUE $(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|')$ EST COMPLET.

---

# SERIES DE FONCTIONS

EXEMPLE : $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

FORMULE DE TAYLOR : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ , $c \in I$.

$I$ = INTERVALLE OUVERT.

$f$ EST DERIVABLE ~~n fois~~. UNE INFINITÉ DE FOIS.

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \left[ f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right] + \sigma_n(x).$$

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{\sigma_n(x)}{(x-c)^n} = 0}$$

LA FORMULE DE TAYLOR DONNE UN POLYNÔME

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$$ QUI EST UNE <u>APPROXIMATION</u> DE $f$

5

DANS LE SENS QUE

$$\boxed{\lim_{x \to c} \left( \frac{f(x) - P_m(x)}{(x-c)^m} \right) = 0}$$

CELA DIT QUE LA DIFFÉRENCE/DISTANCE DE $f$ À $P_m$

EST PLUS PETITE QUE $(x-c)^m$ <u>QUAND $x \to c$</u>.

⚠ MALHEUREUSEMENT CE N'EST PAS ~~TOUJ~~ FORCÉMENT UNE

APPROXIMATION <u>UNIFORME SUR $I$</u>.

· C'EST À DIRE QUE SI $x$ RESTE "LOIN" DE $c$
ON NE SAIT PAS SI $f - P_n$ EST PETIT

6

· ON VOUDRAIT DÉMONTRER QUE

$$(1) \quad \forall x \in I, \quad \boxed{\lim_{n} P_n(x) = f(x).}$$

LIMITE PONCTUELLE

$$(2) \quad \lim_{n} \| P_n(x) - f \|_{\infty} = 0.$$

LIMITE UNIFORME

ANALYSONS (1) ET (2).



(1) $\forall x \in I$, $\boxed{\lim_n P_n(x) = f(x)}$ CA DIT QUE ON A FIXE $x \in I$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$$

LA SOMME PARTIELLE EST D'UNE SERIE NUMERIQUE COMME CELLES QUE VOUS AVEZ VU EN L2.

$$\lim_n P_n(x) = \lim_n \left( \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!} \right).$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}}$$

(1) Signifie que $\forall x \in I$, $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!} = f(x)}$

EXEMPLE : EN L2 VOUS AVEZ DÉMONTRÉ QUE

$\forall x \in \mathbb{R}$ ON A

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \lim_{n} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = e^x .$$

C'EST LE DL DE TAYLOR CAR

$$(e^x)' = e^x \quad \text{et} \quad (e^x)^{(k)}(0) = e^0 = \underline{\underline{1}} .$$

$$\left( \to f^{(k)}(0) = 1 , \forall k \right) .$$

C'EST UNE SÉRIE NUMÉRIQUE.

9

DANS (2) ON FAIT QUELQUE CHOSE DE DIFFERENT. ~~ON SE DEMANDE SI LA~~

- ON **INTERPRETE** $\left(f^{(k)}(c)\,\dfrac{(x-c)^k}{k!}\right) = f_k(x)$ COMME UNE FONCTION SUR $I$.

- ON INTERPRETE $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(f^{(k)}(c)\,\dfrac{(x-c)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = P_n(x)$ COMME UNE FONCTION SUR $I$.

- ON INTERPRETE $(P_n(x))_n$ COMME UNE SUITE DANS

$$\left(C^0(I,\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_\infty\right),\quad I=[0,1].$$

DANS LA QUESTION (2) ON SE DEMANDE

10

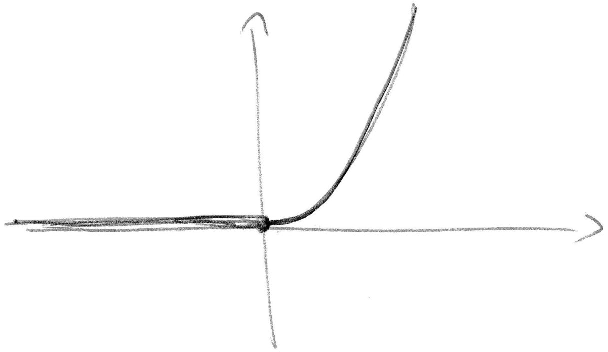
SI $P_n(x)$ CONVERGE VERS $f(x)$ **UNIFORMEMENT.**

. C'EST À DIRE $\lim_{n} \| P_n(x) - f(x) \|_\infty = 0$

---

! PARFOIS $P_n(x)$ NE CONVERGE PAS VERS $f$ **UNIFORMEMENT.**

**EXEMPLE :**



$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

11

ON A $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

CAR
$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \end{cases}$$

---

. ON MONTRE QUE $f(x)$ EST DERIVABLE EN TOUT POINT DE $\mathbb{R}$ UNE <u>INFINITÉ DE FOIS</u> ET $\forall n \geq 0$

ON A $\boxed{f^{(n)}(0) = 0.}$

$\Rightarrow$ LE DL DE $f$ EN $0$ EST $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{f^{k}(0)}_{=0} \frac{(x-0)^k}{k!} = 0.$

MAIS $f(x) \neq 0$.

DONC $\underline{\underline{\lim_{n} P_n(x) \neq f(x)}}$, si $x > 0$.

- CE DL DE TAYLOR NE VERIFIE NI (1)

NI (2).

(LE FAIT QUE $f$ SOIT INFINIMENT DERIVABLE ON NE LE VERRA PAS).

ON PEUT SE POSER LE PROBLEME DE MANIERE PLUS GENERALE.

13

QUESTION : QUAND EST-CE QUE UNE SERIE DE FONCTIONS $\sum_{n \geq 0} f_n$ CONVERGE DANS $\left( C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \right)$.

IL FAUT DONNER UN SENS À CETTE NOTION.

CONVERGENCE D'UNE SERIE DE FONCTIONS.

REPONSE/DEFINITION :

14

- SOIT $(f_n)_n$ UNE SUITE DE FONCTIONS DANS $\left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

- ~~ON DIT QUE~~ POUR TOUT $n \geq 0$ ON POSE

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k = \left(f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n\right)$$

- ON DEFINIT LA SERIE $\sum f_n$ COMME LA SUITE $(S_n)_n$.

- ON DIT QUE LA SÉRIE $\sum f_n$ CONVERGE SI LA SUITE $S_n$ CONVERGE DANS $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

- $(S_n)_n$ EST UNE SUITE DE FONCTIONS.

PROCHAINE FOIS :

- SÉRIES DANS LES EVN
- CRITÈRE DE LA CONVERGENCE NORMALE.
- RETOUR SUR LES DL ET TAYLOR.
- APPLICATIONS ?