TOPOLOGIE PARCOURS B

1

2/12/2020

Remarque : 1) Si $f : V \longrightarrow W$ EST LINEAIRE CONTINUE

$$\Longrightarrow |||f||| \overset{\text{DEF.}}{=} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V}} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

VU AVANT

$$\boxed{= \sup_{\left(\substack{\|x\|_V = 1 \\ \text{et} \\ f(x) \neq 0}\right)} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}}$$

(APPARAIT DANS LA PREUVE DE $|||f \circ g||| = |||f||| \cdot |||g|||$.)

2) ON A VU QUE $f: V \longrightarrow W$ EST LINÉAIRE CONTINUE SI, ET SEULEMENT SI, f EST LINÉAIRE ET CONTINUE EN 0_V.

2

- CETTE PROPRIÉTÉ SE TRADUIT EN TERME DE SUITES DE LA MANIÈRE SUIVANTE :

$$\forall (x_n)_n \text{ SUITE DANS } V \text{ t.q. } \lim_n x_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{SI } \lim x_n = 0_V \Longrightarrow \lim f(x_n) = 0_W}$$

CELA TRADUIT LA CONTINUITÉ EN 0_V DE f. SACHANT QUE $f(0_V) = 0_W$.

ON A VU CETTE PROPRIÉTÉ POUR TOUTES LES ~~SUITES~~ FONCTIONS (CRITÈRE SÉQUENTIEL DE

EXEMPLE: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- MONTRONS QUE f EST CONTINUE ET CALCULONS $\|f\|_{op}$.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}.$$

IL FAUT MONTRER QU'IL EXISTE UNE CONSTATE $C>0$ TELLE QUE $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\left\|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty \leq C \cdot \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty$

ON SAIT QUE $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

$$\left\|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max(|x+2y|, |3x+4y|).$$

ON A $\begin{cases} |x+2y| \leq |x| + |2||y| \leq M + 2M = 3M \leq 7M \\ |3x+4y| \leq |3||x| + |4||y| \leq 3M + 4M = 7M. \end{cases}$ si $M = \max(|x|,|y|)$

$$\Rightarrow \left\| f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left(|x+2y|, |3x+4y| \right) \leq 7 \cdot \underbrace{M}_{= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty}$$

$$\leq 7 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty .$$

$\Longrightarrow$ CELA PERMET DE DIRE QUE $\|f\|_{op} \leq 7$ CAR $\|f\|_{op}$ EST LA PLUS PETITE CONSTANTE C (DE LIPSCHITZ) TELLE QUE $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\left\| f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq C \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty$.

- MONTRONS QUE $\|f\|_{op} = 7$.

$$\|f\|_{op} = \sup_{\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}} \frac{\left\| f\binom{x}{y} \right\|_\infty}{\left\| \binom{x}{y} \right\|_\infty} \leq 7$$

5

POUR MONTRER QUE $\|f\|_{op} = 7$ IL SUFFIT DE TROUVER UN SEUL POINT $\binom{x_0}{y_0} \in \mathbb{R}^2$ TEL QUE

$$\left\| f\binom{x_0}{y_0} \right\|_\infty = 7 \left\| \binom{x_0}{y_0} \right\|_\infty$$

CELA ENTRAINE EN EFFET QUE

$$7 = \frac{\left\| f\binom{x_0}{y_0} \right\|_\infty}{\left\| \binom{x_0}{y_0} \right\|_\infty} \leq \underbrace{\sup_{\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}} \frac{\left\| f\binom{x}{y} \right\|_\infty}{\left\| \binom{x}{y} \right\|_\infty}}_{\|f\|_{op}} \leq 7$$

$$\Rightarrow \|f\|_{op} = 7.$$

Si l'on PREND $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ça DONNE

6

- $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ PAS BON CAR $\dfrac{\|f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|_\infty}{\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|_\infty} = \dfrac{3}{1}$

  $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 1$ $\qquad$ $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 3$

- $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{\|f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\|_\infty}{\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\|_\infty} = \dfrac{4}{1}$ (PAS BON)

  $\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 1$ $\qquad$ $\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 4$

- $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{\|f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\|_\infty}{\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\|_\infty} = \dfrac{7}{1}$

  $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 1$ $\qquad$ $\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 7$

ON PEUT PRENDRE $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

FIN

PROPOSITION : Soit $m \geq 0$ UN NATUREL.

Soit $(W, \|.\|_W)$ UN EVN.

ALORS **TOUTE** APPLICATION LINÉAIRE

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow W$$

EST **AUTOMATIQUEMENT CONTINUE** (PAR RAPPORT À N'IMPORTE QUELLE NORME DE $\mathbb{R}^m$).

LA CONTINUTÉ DE f NE DEPEND PAS DE~~S~~ LA NORME DE $\mathbb{R}^m$ CHOISIE, MAIS LA VALEUR $\|f\|_{op}$ DEPEND DE LA NORME CHOISIE SUR $\mathbb{R}^m$.

AVANT LA PREUVE NOU~~S~~ AVONS BESOIN DU LEMME SUIVANT

LEMME: SI V, W SONT DEUX EV.

SI $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|'_V$ SONT DEUX NORMES ÉQUIVALENTES SUR V

SI $\|\cdot\|_W, \|\cdot\|'_W$ ——— W

SI $f: V \longrightarrow W$ EST UNE FONCTION ~~APPLICAT~~

ALORS

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ EST CONTINUE} \\ \text{PAR RAPPORT À} \\ \|\cdot\|_V \text{ et } \|\cdot\|_W \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ EST CONTINUE} \\ \text{PAR RAPPORT À} \\ \|\cdot\|_V' \text{ ET } \|\cdot\|_W' \end{array} \right\}$$

PREUVE DU LEMME : SI L'ON REMPLACE DES NORMES PAR DES NORMES EQUIVALENTES

$\Rightarrow$ LES TOPOLOGIES DE V ET W NE CHANGENT PAS.

$\Rightarrow$ LA CONTINUITÉ DE f ~~NON~~ RESTE INVARIANTE CAR ELLE PEUT S'EXPRIMER À L'AIDE DES OUVERTS.

$\square$

REMARQUE : ON SAIT QUE TOUTES LES NORMES DE $\mathbb{R}^n$ SONT ÉQUIVALENTES. 10

$\Downarrow$

PREUVE DE LA PROPOSITION :

- ON PEUT CHOISIR LA NORME $\|\cdot\|_\infty$ SUR $\mathbb{R}^n$ GRACE À LA REMARQUE PRÉCÉDENTE ET AU LEMME.
- MONTRONS QUE $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ EST CONTINUE.
- SOIT $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ LA BASE CANONIQUE DE $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ TOUT VECTEUR $V \in \mathbb{R}^m$ S'ECRIT.

11

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\|V\|_\infty = \mathrm{MAX}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|)}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m \quad , \quad \underline{\underline{x_i \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f(v) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m)$$

$$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_m f(e_m)$$

$$\Rightarrow \|f(v)\|_W = \|x_1 f(e_1) + \cdots + x_m f(e_m)\|_W$$

$$\leq |x_1| \, \|f(e_1)\|_W + \cdots + |x_m| \, \|f(e_m)\|_W$$

$$
\begin{aligned}
\|f(v)\|_W &\leq \underset{\wedge\!|}{|x_1|}\,\|f(e_1)\|_W + \dots + \underset{\wedge\!|}{|x_n|}\,\|f(e_n)\|_W \\
&\leq \underbrace{\|v\|_\infty \|f(e_1)\|_W + \dots + \|v\|_\infty \|f(e_n)\|_W} \\
&\leq \underbrace{\left(\|f(e_1)\|_W + \|f(e_2)\|_W + \dots + \|f(e_n)\|_W\right)}_{C} \cdot \|v\|_\infty \\
&= C \cdot \|v\|_\infty .
\end{aligned}
$$

12

$\Rightarrow$ f EST CONTINUE.

$\square$

REMARQUE:

EN PARTICULIER TOUTES LES APPLICATIONS LINÉAIRES

13

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

SONT AUTOMATIQUEMENT CONTINUES.

⚠ $\|f\|_{op}$ **DÉPEND** DES NORMES CHOISIES SUR $\mathbb{R}^n$ ET $\mathbb{R}^m$.

EXEMPLE: Si $n = 2$, $m = 1$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est donnée par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

~~Si la norme de $\mathbb{R}^2$ est $\| \cdot \|_\infty \Rightarrow \|f\|_{op} = \sup$~~

14

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y = (1, 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

• SI ON PREND LA NORME $\|\cdot\|_1$ SUR $\mathbb{R}^2$ ET LA VALEUR ABS SUR $\mathbb{R}$ ON A

$$\left|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = |x + y| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 \longrightarrow \|f\|_{op} = \sup_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \frac{\left|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1} = 1.$$

• SI ON PREND $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ET $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, ON A

$$\left|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq \max(|x|, |y|) + \max(|x|, |y|) = 2 \cdot \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty.$$

ET SI $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 1 + 1 = 2 = 2 \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_\infty$

$$\Rightarrow \|f\|_{op} = 2$$

DES EXEMPLES EN DIMENSION INFINIE

EXEMPLE : $\left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ = EVN. DES FONCTIONS CONTINUES $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ AVEC LA NORME

$$\boxed{\|g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|}$$

ON CONSIDER DANS CET EXEMPLE L'APPLICATION LINEAIRE

VALEUR ABS

$$L_1 : \left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$g \longmapsto g(0)$$

$$L_2 : \left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$g \longmapsto \int g(t)\,dt$$

CE SONT DEUX APPLICATIONS LINEAIRES

EST-CE QUE ELLES SONT CONTINUES ? (16)

(L_1) : $|L_1(g)| = |g(0)| \leq \max_{t\in[0,1]} |g(t)| = \|g\|_\infty$

ON A MONTRÉ QUE $|L_1(g)| \leq \|g\|_\infty$

$$\boxed{\Rightarrow \|L_1\|_{op} \leq 1 .}$$

PAR AILLEURS SI $g(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$

g = FONCTION CONSTANTE DE VALEUR 1

$\Rightarrow g(0) = 1 = g(t), \forall t \in [0,1] \Rightarrow |L_1(g)| = |g(0)| = 1 = \|g\|_\infty$

$$\Rightarrow \|L_1\|_{op} = 1$$

(L_2) : $L_2 : \left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ (17)

$$g \longmapsto \int_0^1 g(t)\, dt$$

EST LINÉAIRE ET :

$$|L_2(g)| = \left|\int_0^1 g(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 |g(t)|\, dt \leq \int_0^1 \underbrace{\left(\max_{t \in [0,1]} |g(t)|\right)}_{\|g\|_\infty} dt$$

$$\leq \|g\|_\infty \cdot \underbrace{\int_0^1 1 \cdot dt}_{=1}$$

ON A MONTRÉ QUE $|L_2(g)| \leq \|g\|_\infty$, $\forall g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$

SI $g(t)$ = FONCT. CONST DE VALEUR 1 $\Rightarrow |L_2(g)| = \int_0^1 1 \cdot dt = 1 = \|g\|_\infty$

$$\Rightarrow \boxed{\|L_2\|_{op} = 1}$$

UN AUTRE EXEMPLE

$$L_1, L_2 : \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right) \longrightarrow \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)$$

MÊMES APPLICATIONS LINÉAIRES L_1 ET L_2, MAIS NORME $\|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)|\,dt$ SUR $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

ALORS :

L_2 EST CONTINU MAINTENANT

L_1 N'EST PLUS CONTINUE

EN EFFET ON A VU AVANT QUE $\|\cdot\|_\infty$ ET $\|\cdot\|_1$ NE SONT PAS ÉQUIVALENTES SUR $C^0([0,1],\mathbb{R})$, LA TOPOLOGIE N'EST ~~SON~~ PAS LA MÊME

19

PREUVE : • $\left| L_2(g) \right| = \left| \int_0^1 g(t)\,dt \right| \le \int_0^1 |g(t)|\,dt = \|g\|_1$

$\Rightarrow L_2$ EST CONT PAR RAPPORT À $\|\cdot\|_1$

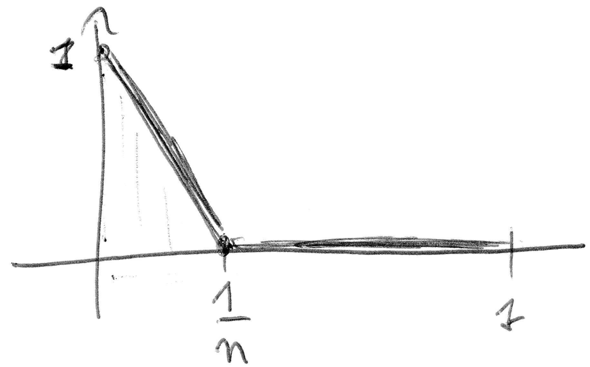
• $\left| L_1(g) \right| = |g(0)|$ EST CE QUE $\exists\, C > 0$ T.Q.

$\forall g \in C^0, \quad |g(0)| \le C \cdot \|g\|_1 = C \cdot \int_0^1 |g(t)|\,dt$

RÉPONSE NON : • PAR L'ABSURDE SUPPOSONS QUE $C > 0$ EXISTE.

• PRENONS ~~UNE~~ LA SUITE DE FONCTIONS $(g_n)_n$ SUIVANTE

g_n :



ON VOIT QUE $\underline{\underline{\|g_n\|_1 = \frac{1}{2n}}}$!

MAIS $\underline{\underline{|g_n(0)| = 1, \forall n}}$.

20

$\Rightarrow$ SI LA CONSTANTE C EXISTE JE DOIS AVOIR $\forall n \geq 1$

$$|g_n(0)| \leq C \cdot \|g_n\|_1$$

$\forall n$

$$\boxed{1 \leq C \cdot \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\to 0}}$$

POUR n SUFFISAMMENT GRAND ON A $\frac{C}{2n} < 1$

CE QUI EST ABSURDE.

REMARQUE : COMME $\|g_m\|_1 = \frac{1}{2m}$ ALORS

$$g_m \longrightarrow 0 \quad \text{DANS} \ \left(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$$

$$\lim_m g_m = 0$$

MAIS LA SUITE $\left(L_1(g_m)\right)_m$ EST LA SUITE CONSTANTE DANS $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (CAR $L_1(g_m) = 1, \ \forall m$.) QUI NE TEND PAS VERS 0. PAR LES REMARQUES FAITES AU DEBUT DE LA SEANCE, CELA MONTRE QU'ON A UNE SUITE $(g_m)_m$ QUI TEND VERS 0, DONT L'IMAGE $(L_1(g_m))_m$ EST UNE SUITE QUI NE VA PAS VERS 0.

$\Rightarrow L_1$ N'EST PAS CONT.