01 - 12 - 2020

TOPOLOGIE B

1

CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES ENTRE EVN.

Rappel : Si $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ sont deux EVN.

et si

$$f : V \longrightarrow W$$

est une fonction quelconque, on sait que f est continue si une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) $\forall x \in V$, f est continue en x

(2) $\forall x \in V$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$ t.q.

$$\forall y \in V, \ \|x-y\|_V \leq \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\|_W < \varepsilon$$

2

(3) $\forall$ OUVERT $\mathcal{O}$ DE $(W, \|\cdot\|_W)$, L'ENSEMBLE

$$\boxed{f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq V}$$

EST UN OUVERT DE V

(4) $\forall$ BOULE OUVERTE $B \subseteq W$, L'ENSEMBLE

$$f^{-1}(B) \subseteq V$$

~~CONTIENT~~ A LA PROPRIETÉ QUE $\forall x \in f^{-1}(B)$ IL EXISTE UNE BOULE $B' \subseteq V$ t.q.

$$\boxed{x \in B' \subseteq f^{-1}(B)}.$$

(5) $\forall$ SUITE $(x_m)_m$ DANS V QUI CONVERGE DANS V ~~VERS~~ LA SUITE $(f(x_m))_m$ CONVERGE DANS W et

$$\boxed{\lim_m f(x_m) = f\left(\lim_m x_m\right)}.$$

RAPPEL: UNE FONCTION (NOTATIONS COMME AVANT)

$$f : V \longrightarrow W$$

EST LIPSCHITZIENNE SI ON PEUT TROUVER UNE CONSTANTE $C \geq 0$ tq.

$$\forall x, y \in V \text{ ON A } \boxed{\|f(x) - f(y)\|_W \leq C \cdot \|x - y\|_V}.$$

ON A MONTRE QUE

$$\left(f \text{ LIPSCHITZIENNE}\right) \Longrightarrow \cancel{\text{UNIF}} \left(f \text{ UNIFORMEMENT CONTINUE}\right) \Longrightarrow \left(f \text{ CONTINUE EN TOUT POINT.}\right)$$

~~PROPOSITION~~ RAPPEL : Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux EVN. Soit

$$f : V \longrightarrow W$$

une application LINEAIRE.

Alors : $\forall x, y \in V$, $\forall r, s \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} f(r \cdot x + s \cdot y) = r \cdot f(x) + s\, f(y). \\ f(0_V) = 0_W \end{cases}$$

PROPOSITION: Soit

5

$$f : V \longrightarrow W$$

UNE APPLICATION LINEAIRE. Alors LES CONDITIONS SUIVANTES SONT ~~VERIFIEES POUR~~ EQUIVALENTES.

(1) f EST CONTINUE PARTOUT.

(2) f EST CONTINUE EN 0.

(3) f EST LIPSCHIZIENNE

(4) $f(\overline{B_V(0,1)}) \subseteq W$ EST UN SOUS-ENSEMBLE BORNE DE W.

(5) $\exists C > 0$, t.q. $\forall x \in V$ $\boxed{\|f(x)\|_W \leq C \|x\|_V}$

PREUVE: (1) $\Longrightarrow$ (2) EVIDENT.

$(2) \Rightarrow (3)$ Supposons f est continue en 0 et montrons qu'elle est lipschitzienne.

$(2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3)$

• Écrivons la continuité de f en 0 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{t.q. } \underset{\substack{\| \\ y-0}}{\|y\|_V} \le \delta \Longrightarrow \underset{\substack{\| \\ f(y)-f(0)}}{\|f(y)\|_W} \le \varepsilon .$$

(car $f(0) = 0$).

• Donc, en particulier, $\forall y \in V$ t.q. $\|y\|_V = \delta$ on a $\|f(y)\|_W \le \varepsilon$.

$$\Longrightarrow \|f(y)\|_W \le \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) \cdot \delta = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)} \cdot \|y\|_V \quad \left(\text{vrai pour tout } y \in V \text{ t.q. } \|y\|_V = \delta\right)$$

• Notons $C := \varepsilon / \delta > 0$.

• Montrons que $\forall x \in V$, $\|f(x)\|_W \le C \|x\|_V$. (= propriété (5))

(↳ évident si $x = 0$)

~~[scribbled out]~~ Soit $x \in V$, $x \neq 0$.

Poson $\boxed{y = \frac{\delta}{\|x\|_V} \cdot x}$ $\Longrightarrow \|y\|_V = \left\| \frac{\delta x}{\|x\|_V} \right\|_V = \frac{\delta}{\cancel{\|x\|_V}} \|x\|_V = \delta$

$$\Longrightarrow \|f(y)\|_W \leq C \cdot \|y\|_V = C \cdot \delta$$

$\Longrightarrow$ ON UTILISE MAINTENANT LA LINÉARITÉ DE f

$$f(y) = f\left(\frac{\delta}{\|x\|_V} \cdot x\right) = \frac{\delta}{\|x\|_V} \cdot f(x).$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\|x\|_V}{\delta} \cdot f(y)$$

$$\Longrightarrow \|f(x)\|_W = \left\| \frac{\|x\|_V}{\delta} \cdot f(y) \right\|_W = \frac{\|x\|_V}{\delta} \cdot \|f(y)\|_W \leq \frac{\|x\|_V}{\cancel{\delta}} \cdot C \cdot \delta = C \cdot \|x\|_V$$

8

- ON VIENT DE MONTRER QUE (2) $\Rightarrow$ (5).

MONTRONS QUE (5) $\Rightarrow$ (3).

$\forall x, y \in V$ ON A $\|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x-y)\|_W \leq C \cdot \|x-y\|_V$

LINEARITÉ PAR (3).

CETTE CONDITION EST PRECISEMENT LA LIPSCHITZIANITÉ.

- (3) $\Rightarrow$ (1) C'EST UN FAIT GENERAL QU'ON A DEJA VU QUE LA LIPSCHIZIANITÉ ENTRAINE LA CONTINUITÉ PARTOUT.

- ON A MAINTENANT QUE (1), (2), (3), (5) SONT EQUIVALENTES

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$$

9

- IL RESTE À MONTRER QUE CES CONDITIONS SONT ÉQUIVALENTES À (4).

- (5) $\Longrightarrow$ (4). Supposons $\forall x \in V$, $\|f(x)\|_W \leq C \|x\|_V$

$$\Rightarrow \forall x \in \overline{B_V(0,1)} \text{ on a } \boxed{\|f(x)\|_W \leq C}$$

$$\|x\| \leq 1$$

$$\Rightarrow f\left(\overline{B_V(0,1)}\right) \subseteq \overline{B_W(0,C)}$$

$$\Rightarrow f\left(\overline{B_V(0,1)}\right) \text{ est borné dans } W.$$

10

• (4) Supposons que (4) soit vrai.

CELA SIGNIFIE QU'IL EXISTE UNE CONSTANTE $C > 0$ t.q.

$$\forall x \in V, \ \|x\|_V \leq 1 \implies \|f(x)\|_W \leq C.$$

$$\implies \forall x \in V, \ \|x\|_V = 1 \implies \|f(x)\|_W \leq C = C \cdot \|x\|_V$$

$\implies \forall y \in V$, $y \neq 0$, ON POSE $x = \frac{y}{\|y\|_V} \implies \|x\|_V = 1$

$$\implies \|f(y)\|_W = \left\| f\left(\|y\|_V \cdot \frac{y}{\|y\|_V}\right) \right\|_W = \left\| \|y\|_V \cdot f\left(\frac{y}{\|y\|_V}\right) \right\|_W$$

$$= \|y\|_V \cdot \|f(x)\|_W \leq \|y\|_V \cdot C$$

FIN DE LA ...

$\implies (4) \implies (5)$

DEFINITION: ON NOTE $\mathcal{L}(V,W)$ L'ESPACE VECTORIEL DES APPLICATIONS LINEAIRES **CONTINUES** DE V VERS W

POUR TOUT $f \in \mathcal{L}(V,W)$ ON POSE

$$|||f||| = \|f\|_{op} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

NOTATIONS EQUIVALENTES

~~LEMME~~ ON APPELLE ÇA LA NORME D'OPERATEUR DE f

~~[illegible]~~ **REMARQUE :** $\|f\|_{op}$ EST LA PLUS PETITE CONSTANTE C t.q.

12

$$\forall x \in V, \quad \|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V \quad (*)$$

PREUVE : • $\|f\|_{op} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{C\cancel{\|x\|_V}}{\cancel{\|x\|_V}} \leq C$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\forall C > 0$ QUI VERIFIE $(*)$ ON A $\|f\|_{op} \leq C$

• PAR AILLEURS ON A

$$\forall x \in V, \; x \neq 0, \quad \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq \left[\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}\right] = \|f\|_{op}.$$

$$\boxed{\forall x \in V, \; \|f(x)\|_W \leq \|f\|_{op} \cdot \|x\|_V}$$

$\|f\|_{op}$ EST LA PLUS PETITE CONSTANTE C.

13

REMARQUE :

$$\underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}}_{\|f\|_{op}} = \underbrace{\sup_{\|x\|_V = 1} \|f(x)\|_W}_{K}$$

PREUVE :

$\geq$) FACILE CAR LE SUP DE ~~DROITE~~ GAUCHE PORTE SUR TOUS LES $x \in V$, $x \neq 0$. ET LE SUP DE DROITE ~~PORTE~~ EST LE ~~SUP ...~~ SUP DE LA MEME QUANTITÉ MAIS IL PORTE SUR LES $x \in V$ t.q. $\|x\| = 1$. $\Rightarrow \|f\|_{op} \geq K$.

$\leq$) IL SUFFIT DE REMARQUER QUE $\forall x \in V$

$$\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \frac{1}{\|x\|_V} \cdot \|f(x)\|_W = \left\| \frac{1}{\|x\|_V} \cdot f(x) \right\|_W \overset{\text{LINÉARITÉ}}{=} \Big\| f\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{À NORME 1}} \Big) \Big\|_W \overset{\left\|\frac{x}{\|x\|_V}\right\|_V = 1}{\leq} K$$

DONC $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq K$.

FIN DE LA PREUVE

PROPOSITION: $\|\cdot\|_{op}$ EST UNE NORME SUR $\mathcal{L}(V, W)$.

PREUVE: $f \in \mathcal{L}(V, W)$

(1) Si $\|f\|_{op} = 0 \Longrightarrow \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = 0$

$\Rightarrow \forall x \neq 0 \quad \dfrac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = 0 \Rightarrow \forall x \in V,\ x \neq 0 \quad \boxed{\|f(x)\|_W = 0}$

$\Rightarrow \forall x \in V,\ x \neq 0$ ON A $f(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{f = 0}$ DANS $\mathcal{L}(V, W)$.

15

(2) $r \in \mathbb{R}, \ f \in \mathcal{L}(V,W)$

$$\forall x \in V, \quad \frac{\|r f(x)\|_W}{\|x\|_V} = |r| \cdot \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|r f(x)\|_W}{\|x\|_V} = |r| \cdot \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}}$$

$$\boxed{\|r \cdot f\|_{op} = |r| \cdot \|f\|_{op}.}$$

(3) $f, g \in \mathcal{L}(V,W)$

$$\forall x \in V, \quad \frac{\|(f+g)(x)\|_W}{\|x\|_V} = \frac{\|f(x) + g(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq \underbrace{\frac{\|f(x)\|_W + \|g(x)\|_W}{\|x\|_V}}_{\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} + \frac{\|g(x)\|_W}{\|x\|_V}}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|(f+g)(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} + \frac{\|g(x)\|_W}{\|x\|_V}\right)$$

16

$$\leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}\right) + \left(\sup_{x\neq 0} \frac{\|g(x)\|_W}{\|x\|_V}\right)$$

$$\boxed{\|f+g\|_{op} \leq \|f\|_{op} + \|g\|_{op}}$$

PROPOSITION : Si $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$, $(U, \|\cdot\|_U)$ SONT TROIS EVN, ET SI

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$

SONT DEUX APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

ALORS LA COMPOSÉE

$$V \xrightarrow{g \circ f} U$$

EST CONTINUE ET SA NORME VÉRIFIE

$$\boxed{\| g \circ f \|_{op} \leq \| g \|_{op} \cdot \| f \|_{op}}$$

PREUVE : LE FAIT QUE $g \circ f$ EST CONTINUE EST VRAI POUR TOUTES LES FONCTIONS CONTINUES (PAS NÉCESSAIREMENT LINÉAIRES).

DONC $\| g \circ f \|_{op}$ EST UN NOMBRE FINI.

18

CAR SI $f(x)=0 \Rightarrow g(f(x))=0$

$$\|g\circ f\|_{op} = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in V}} \frac{\|(g\circ f)(x)\|_U}{\|x\|_V}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \frac{\|g(f(x))\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{f(x)\neq 0} \frac{\|g(f(x))\|_U}{\|x\|_V}$$

$$= \sup_{f(x)\neq 0} \left(\frac{\|g(f(x))\|_U}{\|f(x)\|_W} \cdot \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \right)$$

$$\leq \left[\sup_{f(x)\neq 0} \left(\frac{\|g(f(x))\|_U}{\|f(x)\|_W} \right) \right] \cdot \left[\sup_{f(x)\neq 0} \left(\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \right) \right]$$

$$\leq \left[\sup_{\substack{y\neq 0\\ y\in W}} \left(\frac{\|g(y)\|_U}{\|y\|_W} \right) \right] \cdot \left[\sup_{x\neq 0} \left(\frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \right) \right].$$

$$\leq \|g\|_{op} \cdot \|f\|_{op}$$

FIN.