Supposons $\|y-x\| < s \; (< \|y-c\|-r)$

$\|x-c\| \geq \|y-c\| - \underbrace{\|y-x\|}_{\leq s} \geq \|y-c\| - s \geq \|y-c\| - \|y-c\| + r$ $\overset{\|}{r}$

2. Montrons que $\forall x \in B_f(c,r)$ $\exists (x_n)_n \in (B(c,r))^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to x$, ie tout point de $B_f(c,r)$ est adhérent à $B(c,r)$.

Si on le démontre $\to B_f(c,r) \subseteq Ad(B(c,r))$

Mais $B_f(c,r)$ est un fermé qui contient $B(c,r)$ donc $Ad(B(c,r)) \subseteq B_f(c,r)$

Ainsi on aurait $B_f(c,r) = \overline{B(c,r)}$

Soit $x \in B_f(c,r)$

- Si $\|x-c\| < r$ on prend $x_n = x \; \forall n$ alors $x_n \to x$
- Si $\|x-c\| = r$ Soit $t_n \overset{def}{=} 1 - \frac{1}{n} \to 1$

Soit $x_n \overset{def}{=} c + t_n(x-c)$

$\|x_n - c\| = |t_n| \cdot \|x-c\| = t_n \cdot r < 1 \; \forall n$

$\to x_n \in B(c,r)$ $\lim_n x_n = x$ car $\|x_n - x\| = \|(t_n-1)\| \, \|c-x\| = |t_n-1| \cdot r = \frac{r}{n} \to 0$

$\square$

Définition Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN

Soient $S_1 \subseteq S_2$ deux sous ensembles de V. On dit que S_1 est dense dans S_2 si $\overline{S_1} \supseteq S_2$

Exemple $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $]0,1[- [0,1]$, $]0,1[- [0,1[$

6

Equivalence de normes

Définition Soit V un E-V. Soient $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux NORMES sur V. On dit que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (équivalence) si on peut trouver deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $\forall x \in V$

$$\begin{cases} \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \\ \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \end{cases} \iff \frac{\|x\|_1}{C_2} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 C_1$$

~~ex~~

Exercice C'est une relation d'équivalence entre normes sur V

Notation Pour tout $c \in V$ et $r > 0$ on note $B_1(c,r) = \{x \in V \mid \|x-c\|_1 < r\}$

$B_2(c,r) = \{x \in V \mid \|x-c\|_2 < r\}$

et notons $\mathcal{T}_1 =$ la famille de tous les ouverts définis à l'aide de $\|\cdot\|_1$

$\mathcal{T}_2$ ————————

———————— $\|\cdot\|_2$

Proposition Supposons $\|\cdot\|_1 \leq C_2 \|\cdot\|_2$.

Alors

1) Pour tout $a \in V$ et $r > 0$ $B_2(a,r) \subseteq B_1(a, C_2 \cdot r)$

$B_2(a,r) \subseteq B_1(a, C_2 \cdot r)$

2) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ Tout ouvert par rapport à la norme 1 est aussi ouvert par rapport à la norme 2

Preuve 1) Si $\|x-a\|_2 < r \Rightarrow \|x-a\|_1 \leq C_2 \|x-a\|_2 < C_2 \cdot r$

$\Rightarrow B_2(a,r) \subseteq B_1(a, C_2 r)$

2) Soit $U \in \mathcal{T}_1$ un ouvert défini à l'aide de la norme $\|\cdot\|_1$. On veut mq $U \in \mathcal{T}_2$

U ouvert de $\mathcal{T}_1$

$\iff \forall x \in U, \exists r_x > 0$ tq $B_1(x,r) \subseteq U$

$U = \bigsqcup_{x \in U} B_1(x, r_x)$

Maintenant par 1), on ~~a~~ a $B_2(x, \frac{r_x}{C_2}) \subseteq B_1(x, r_x)$ pour tout x et $\frac{r_x}{C_2} > 0$

d'où $U = \bigsqcup_{x \in U} B_2(x, \frac{r_x}{C_2})$ donc U est un ouvert de T_2

Corollaire Si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ alors $T_1 = T_2$