Reciproquement si $\forall U$ ouvert, $x \in U$ on a $U \cap S \neq \emptyset$
en particulier $B(x, \frac{1}{n}) \cap S \neq \emptyset$.
$\forall n$, soit $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap S \rightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$
$\rightarrow x_n \in S$ et $\lim_n x_n = x$

Proposition $Ad(S) \supseteq \overline{S}$ ie $Ad(S)$ est un fermé qui contient S.

Preuve $S \subseteq Ad(S)$ est évident (suites cst)
Pour montrer que c'est un fermé on montre que le complémentaire est ouvert
soit $y \in V - Ad(S)$, $y \notin Ad(S)$ par la prop précédente, on peut trouver un ouvert U tq $y \in U$ et $U \cap S = \emptyset$
Maintenant, on a $U \cap Ad(S) = \emptyset$. En effet, soit $y \in U$,
$\exists \varepsilon$ tq $B(y, \varepsilon) \subseteq U$ et une contient aucun point de S:
$\forall (x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$, $\|x_n - y\| \geq \varepsilon$: $x_n \not\rightarrow y$ donc $y \notin Ad(S)$
donc $V - Ad(S)$ est ouvert donc $Ad(S)$ est fermé.

Proposition $Ad(S) \subseteq \overline{S}$

Lemme Si F est fermé alors $Ad(F) = F$

Preuve de la proposition
Le lemme entraine que si $x_n \in S$ $\forall n$ et si $\lim_n x_n = x \in V$
Alors $\forall$ Fermé F contenant S on a $x_n \in F \Rightarrow \lim_n x_n \in F$
car $F = Ad(F)$
Donc $x \in F$ pour tout fermé F contenant S
$\Rightarrow x \in \bigcap_{\substack{S \subseteq F \\ F \text{ fermé}}} F = \overline{S}$
donc $Ad(S) \subseteq \overline{S}$

5

Corollaire Pour tout sous-ensemble $S \subseteq (V, \|\cdot\|)$ on a $\mathrm{cl}(S) = \bar{S}$

Preuve du lemme F fermé, $(x_m)_m$ suite cv tq $x_m \in F \ \forall m$. Soit $x = \lim x_m$. On doit mq $x \in F$.

Par l'absurde si $x \notin F$ alors $x \in V-F$ ouvert
$\Rightarrow \exists r>0$ tq $B(x,r) \subseteq V-F$. Autrement dit $B(x,r) \cap F = \emptyset$
$\rightarrow x_m \notin B(x,r) \ \forall m$ (car $x_m \in F \ \forall m$)
$\Rightarrow$ par définition de suite, x ne peut pas être la limite des x_m (car $\|x - x_m\| \geq r \ \forall m$)
cela est absurde car $x = \lim x_m \Rightarrow x \in F$

Proposition FONDAMENTAL La norme $\|\cdot\|$ est continue

Preuve <u>Rappel</u> $f: V \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in V$
ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$
Soit $N(\cdot) = \|\cdot\|$ | $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$
On doit mq si $N(x-y) = \delta$ alors
$|N(x) - N(y)| < \varepsilon$
$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y-x\| + \|x\| < \delta + \|x\|$

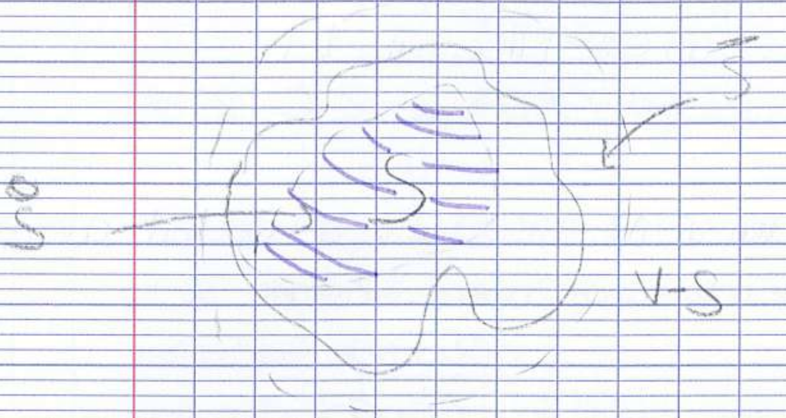
On va mq si $N(x-y) < \varepsilon$ alors $|N(x) - N(y)| < \varepsilon$
on vient de voir que $\|y\| - \|x\| < \varepsilon$
Par symmetrie on a $|\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$ $N(y) - N(x)$
Reste à mq $N(y) - N(x) > -\delta$ ie $N(y) > N(x) - \delta$
Pour le voir on écrit
$\|y\| = \|y - x + x\| \geq |\|y-x\| - \|x\||$

$\blacksquare$

Remarque Ceci est un ingrédient fondamental pour mq sur $\mathbb{K}^n$ toutes les normes sont ÉQUIVALENTES

Intérieur d'un ensemble

Notion duale de fermeture



$S \subseteq S'$
$\overline{V-S} \subseteq \overline{V-S'}$

Définition Soit $(V, \|\cdot\|)$ un evn et $S \subseteq V$ un sous ens
on pose $\mathring{S} = V - (\overline{V-S})$ enlève de S les limites qui proviennent d'ailleurs

$\mathring{S}$ est obtenu de S en supprimant les points de S qui sont limite d'une suite d'éléments de V-S
On a $V - \mathring{S} = \overline{V-S}$

Définition Les points de $\bar{S} - \mathring{S}$ s'appellent des points de frontière pour S $Fr(S) \underset{\text{def}}{=} \bar{S} - \mathring{S}$

Exemple $(V = \mathbb{R})$

S	$\bar{S}$	$\mathring{S}$	$Fr(S)$
$]a,b[$	$[a,b]$	$]a,b[$	$\{a,b\}$
$]a,b]$	$[a,b]$	$]a,b[$	$\{a,b\}$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \cap]0,1[$	$[0,1]$	$\emptyset$	$[0,1]$
$[a,b]$	$[a,b]$	$]a,b[$	$\{a,b\}$

Exemple $V = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ norme usuelle

$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| < 1\}$

$Bf(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$

$\Rightarrow \overline{B(0,1)} = Bf(0,1)$

$Fr(B(0,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 1\}$

$\mathring{B}(0,1) = B(0,1)$

Remarque Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN si $U \subseteq V$ est ouvert alors $\mathring{U} = U$. Si F est fermé alors $\overline{F} = F$

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN

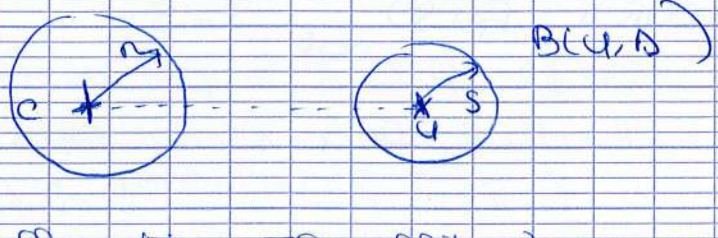
Proposition 1 Les Boules fermés $Bf(c,r) = \{x \in V \mid \|x - c\| \leq r\}$ sont des fermés

2 De plus, $\overline{B(c,R)} = Bf(c,R)$

Preuve 1 $V - Bf(c,r)$ est ouvert $\Leftrightarrow \forall y \in V - Bf(c,r)$ $\exists s > 0$ tq $B(y,s) \subseteq V - Bf(c,r)$

$\Leftrightarrow \forall y \notin Bf(c,r)$ $\exists s > 0$ tq $B(y,s) \cap Bf(c,r) = \emptyset$

Bf(c,r)



Affirmation Il suffit de prendre $s < \|y - c\| - r$

Remarque $y \notin Bf(c,r) \Rightarrow \|y - c\| > r$

donc un tel $s < \|y - c\| - r$ existe.

Soit $s < \|y - c\| - r$ on doit mq si $x \in B(y,s) \Rightarrow x \notin Bf(c,r)$

Autrement dit $\|x - y\| < s \Rightarrow \|x - c\| > r$