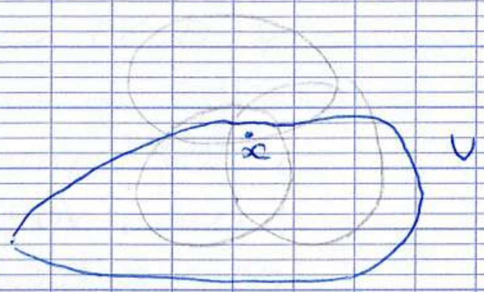
4) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert

Preuve Soient $U_1 \dots U_m$ des ouverts et $U = U_1 \cap \dots \cap U_m$
si U est vide c'est un ouvert
on utilise le (2) : soit $x \in U$, comme $\forall i$ U_i est ouvert
$\exists B_i$: BO tq $x \in B_i \subseteq U_i$



$x \in B_1 \cap \dots \cap B_m \subseteq U$

et $\forall i$, on applique (3) $\rightarrow \exists B(x, r_i) \subseteq B_i$.

Soit $r = \min(r_1, \dots, r_m) \rightarrow B(x, r) \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_r \subseteq U$ $\square$.

5) $\emptyset$ et X sont des ouverts par def

6) Un sous ensemble de $(V, \|\cdot\|)$ est fermé s'il est le complémentaire d'un ouvert

(2') Intersection arbitraire de fermés est fermée

(4') Réunion finie de fermés est fermée

Par passage au complémentaire $\left((A \overset{\cup}{\cap} B)^c = A^c \overset{\cap}{\cup} B^c\right)$

$(V, \|\cdot\|)$ et $(W, \|\cdot\|')$ des EVN

Définition (continuité) Soit $S \subseteq V$ un sous ens, $f : S \longrightarrow W$ fonction

f est continue en $x \in S$ si

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tq $\forall y \; \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

$f(B(x, \delta) \cap S) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

$B(x, \delta) \cap S \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$

Définition f est continue si elle est continue en tout point de S

Proposition f est continue sur S ssi pour tout ouvert $U \subseteq W$ il existe $U' \subseteq V$ tq $\boxed{U' \cap S = f^{-1}(U)}$ $(*)$

Preuve Si $(*)$ est vraie elle est vraie pour les boules

$\Leftarrow$

4

ouvertes donc si $U = B(f(x), \varepsilon) \to \exists B$ tq $x \in B$ et tq $f(B \cap S) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ Mais on sait que $\exists \delta$ tq $B(x, \delta) \subseteq B$ donc $f(B(x,\delta) \cap S) \subseteq f(B \cap S) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \to f$ est continue en x

$\Rightarrow$ ~~Soit~~ Supposons f continue en tout $x \in S$. Soit $U \subseteq W$ ouvert, $\forall y \in U \ \exists R_y > 0$ tq $B(y, R_y) \subseteq U$.
dans ce cas $U = \bigcup_{y \in U} B(y, R_y)$

Soit $U_2 = \bigcup_{y \in U \cap f(S)} B(y, r_y) \subseteq U$

c'est un ouvert tq $f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U)$
$U_2 \subseteq U \to U_2 \cap f(S) \subseteq U \cap f(S)$
Mais $U \cap f(S) \subseteq \bigcup_{y \in U \cap f(S)} B(y, r_y) = U_2$

$$\underset{\displaystyle \bigcup_{y \in U \cap f(S)} \{y\}}{\overset{}{\shortparallel}}$$

$\Rightarrow U_2 \cap f(S) = U \cap f(S)$

Il suffit de trouver $U' \subseteq V$ tq $f(U' \cap S) \subseteq U_2$ car $U_2 \subseteq U$

On sait que si $y \in U \cap f(S) \to \exists x \in S$ tq $y = f(x)$
$\to B(y, r_y) = B(f(x), r_{f(x)}) \subseteq U_2$ (on note ce x par x_y)

Comme f est continue en x $\exists \delta_x > 0$ tq
$f(B(x, \delta) \cap S) \subseteq B(f(x), r_{f(x)}) \subseteq U_2$

On pose $U' = \bigcup_{y \in U \cap f(S)} B(x_y, \delta_{x_y})$

$\to f(U' \cap S) = f\left(\bigcup_{y \in U \cap f(S)} B(x_y, \delta_{x_y}) \cap S\right)$

$= \bigcup_{y \in U \cap f(S)} f(B(x_y, \delta_{x_y}) \cap S)$

$\subseteq \bigcup_{y \in U \cap f(S)} B(y, r_y) = U_2$ donc f a la propriété (*)

Remarque On verra que si $S = V$ et si f est linéaire la continuité équivaut au fait d'être Lipschitzienne

Proposition Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN
des translations et la mult par un scalaire non nul sont cont

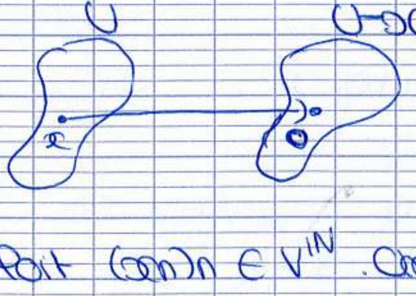
Preuve Translations $V \to V$, $v \to v + w$ bijection d'inverse "$-w$"

Car translate les BO : $w + B(x, r) = B(x + w, r)$
ouvert dans des ouverts car "$+w$" respecte la réunion des BO

Mult par un scalaire

Remarque 1) Les translations sont Bicontinues et f^{-1} est cont : homéomorphismes

2) Si U est ouvert et $x \in U \Rightarrow (U - x)$ est ouvert et $0 \in U - x$



$(V, \|\cdot\|)$ EVN

Definition Soit $(x_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$. On dit que $(x_n)_n$ est
(•) convergente s'il existe $x \in V$ tq $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$
(••) de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ tq $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Remarque Si $x_n \to x$ Alors $(x_n)_n$ est Borné

Définition Un sous ensemble $X \subseteq (V, \|\cdot\|)$ est <u>borné</u> si $\exists r > 0$ tq $X \subseteq B(0, r)$

Une suite $(x_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$ est borné si $\exists r > 0$ tq $\|x_n\| < r \; \forall n$

Preuve (remarque) $\|x_n - x\| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon \; : \|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$

$\Rightarrow \|x_n\| \leq \varepsilon + \|x\|$

Posons $M = \max\limits_{i \leq n_\varepsilon}(\|x_i\|)$ et $r = \max(M, \varepsilon + \|x\|)$

$\Rightarrow \forall n, \|x_n\| \leq r$ $\square$

Fermeture et adhérence $(V, \|\cdot\|)$ EVN $S \subseteq V$ sous-ens

Définition 1) $\bar{S} = \bigcap\limits_{\substack{S \subseteq F \\ F \text{ fermé}}} F$ fermeture de S
$=$
intersection de tous les fermés qui contiennent S

Rq on a déjà $S \subseteq V$

2) $Ad(S) = \{x \in V \mid \exists (x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ tq $x = \lim\limits_n x_n\}$

Proposition $x \in Ad(S) \Leftrightarrow \forall$ ouvert U tq $x \in U$, $U \cap S \neq \emptyset$

Preuve $x \in Ad(S) \Rightarrow \exists (x_n)_n$ tq $x = \lim\limits_n x_n$, $\forall n \; x_n \in S$
$\forall U$ ouvert, $x \in U$ on peut trouver une BO $B(x, r)$ tq $x \in B(x, r) \subseteq U$ mais par déf de lim $\exists n$ tq $\|x_n - x\| < r$ donc $x_n \in B(x, r) \subseteq U$ donc $x_n \in U \cap S$
Donc $U \cap S \neq \emptyset$.