Preuve Si $x \in V$, $\|x\| = r$

Si $B = B(0,R) \Rightarrow t \cdot B(0,R) = B(0, t \cdot R)$

$\Rightarrow$ Si $t > \frac{r}{R}$, on a que $t \cdot R > r \Rightarrow x \in B(0, t \cdot R)$ $\square$

Définition Un sous-ensemble $A \subset V$ est symétrique par rapport à O si $-A \subseteq A$

Proposition Si $(V, \|\cdot\|)$ est un evn, les boules ouvertes ou fermées centrées en O sont symétrique par rapport à O.

Preuve $B(0,r) \ni x \rightarrow \|-x\| = \|x\| \Rightarrow -x \in B(0,r)$ $\square$

Dans les exemples $\|\cdot\|_p$ on a si $n=2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$p<1$ $\quad p=1 \quad p>1 \quad p=+\infty$

sont tous symmétriques par rapport à O

On peut montrer que dans un sens convenable les propriétés de convexité, absorbance et sym/O caractérisent les boules des EVN.

Exemples en dim +∞

5) $V = EV / \mathbb{K}$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur V

$\Rightarrow \|x\| \underset{\text{déf}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur V

De plus $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwartz)

6) $V = C^0([a,b], \mathbb{R})$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

fonctions continues

$f \in V$, • $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

• $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ $p > 0$

en particulier $\|f\|_1 = \int_a^b |f| dx$

Remarque $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme si $p < 1$ Mais $\|\cdot\|_p^p$ vérifie l'inégalité triangulaire

$\Rightarrow d(f,g)$ est une distance sur $C^0([a,b], \mathbb{R}) = V$

On peut mq $\exists f, g \in B(0,1) = \{x \in V \mid d(x,0) < 1\}$ et un $t \in [0,1]$ tq $tf + (1-t)g \notin B(0,1)$

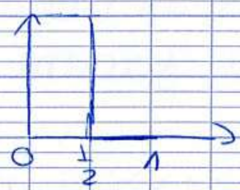
Si $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme

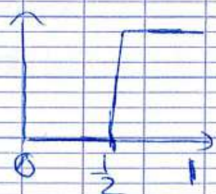
Remarque On peut définir l'espace $L^p([a,b])$ des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui ne sont pas forcément continues mais telles que $\int_a^b |f(x)|^p$ existe (et $\neq +\infty$)

intégrable

Si $p \geq 1$ on munit $L^p([a,b])$ de la norme $\|\cdot\|_p$

Exemple

f : 

g : 

Si $p<1$, $a=0$, $b=1$, f :

$p = \frac{1}{2} < 1$

$$\|f\|_{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |f|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\|g\|_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \to \|f+g\|_{\frac{1}{2}} = 1 \not\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$\to$ $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ n'est pas une norme

On peut mq $\forall f,g \in L^p([a,b])$ on a
$\| |f| + |g| \| \geq \|f\|_p + \|g\|_p$

$\to$ ⚠ $L^p([a,b])$
$\to$ théorie de la mesure $\sim$ = aire
$\to$ Intégration de Lebesgue

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \longrightarrow \text{mesure} = 0 \quad (*) \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \to \int_0^1 f\,dx = 0$

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une fonction qui possède

$\to$ inégalité triangulaire
$\to$ $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$

Problème On a des fonctions f tq $\|f\|_p = 0$ mais $f \neq 0$
(voir (*)) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme

$\|\cdot\|_p$ est une semi-norme

Pour resoudre pb

L^p est le quotient de l'espace des fonctions intégrables sur $[a,b]$ tq $\|f\|_p < +\infty$ par le sous-espace des fonctions f tq $\|f\|_p = 0$

Topologie des EVN

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un evn. $d : V \times V \to \mathbb{R}$

$$(v,w) \to d(v,w) = \|v-w\|$$

est une distance

→ (V,d) est un espace métrique, cela définit une topologie ; dont les ouverts sont les sous-ens de V qui sont réunion de boules ouvertes

$\forall x \in V \ \forall r > 0 \quad B(x,r) = \{v \in V \mid \|x-v\| < r\}$

$$B_f(x,r) = \{v \in V \mid \|x-v\| \leq r\}$$

Propriétés

1) La réunion arbitraire d'ouverts est ouverte

2) $U \subseteq V$ est ouvert $\Leftrightarrow$ $\forall x \in U$ on peut trouver une BO B_x (boule ouverte)
telle que $x \in B \subseteq U$.

$$\left(U = \bigcup_{x \in U} B_x\right)$$

3) Si B est une BO ($B = B(x,r)$) et $y \in B(x,r)$

Alors $\exists r' > 0$ tq $B(y,r') \subseteq B(x,r)$

Preuve Soit $z \in V$ $\|z-y\| \leq \|z-x\| + \|x-y\|$

Si $\|z-y\| < \underbrace{r - \|y-x\|}_{r'}$ → $\|z-x\| < r$

$\|z-y\| \geq \big| \|z-x\| - \|y-x\| \big|$ (*)

~~Si~~

Si $\|z-x\| < r' \underset{\text{déf}}{=} R - \|x-y\|$

Alors soit $\|z-x\| < \|y-x\| < R \to z \in B(x,R)$

soit $\|z-x\| \geq \|y-x\| \to$ (*) on trouve

$\|z-x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| < R$

$\to z \in B(x,R)$