6) $\mathbb{K}[X]$ polynomes à coeff dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}[X] \simeq \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$

$\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \longleftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_d, 0 \dots 0)$

7) $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ polynomes à plusieurs variables

8) X = ens, E = un ev sur $\mathbb{K}$ (ev/$\mathbb{K}$)

$F(X, E)$ = fonctions quelconques de X vers E

$= \{ f \in X \to E, f = \text{fonctions} \}$

si $f, g \in F(X,E)$ $f+g : X \to E$ somme de fonctions

$x \to f(x) + g(x)$

si $r \in \mathbb{K}$ $r \times f : X \longrightarrow E$ multiplication par

$x \longrightarrow r \times f(x)$ un scalaire

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = F(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$M_{n \times m} \subseteq F(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$

$\mathbb{K}[X] \subseteq F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$

E = ev $\Rightarrow F(\{x\}, E) \simeq E$.

Espaces vectoriels normés (EVN) (intro)

V = espace vectoriel, Une norme sur V est une fonction

$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+$

tq (1) $\forall v, w \in V$ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(2) $\forall r \in \mathbb{K}$, $\|r.v\| = |r|.\|v\|$

(3) $\forall v \in V$, $v \neq 0 \Rightarrow \|v\| \neq 0$

Norme $\longrightarrow$ distance $\longrightarrow$ topologie

$\|\cdot\|$ $\qquad$ $d(x,y) = \|x-y\|$

$\downarrow$

$\mathcal{T}$ = topologie dont les ouverts sont les réunions (arbitraires) de boules ouvertes

Boule ouverte de centre $x \in V$ et de rayon R :

$B(x,R) = \{y \in V \mid \|x-y\| < R\}$

Boule fermée : $B_f(x,R) = \{y \in V \mid \|x-y\| \leq R\}$

Exemples : Sur $\mathbb{K}^n$

(1) $\|\cdot\|_\infty$, $\left\|\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |a_i|$, $a_i \in \mathbb{K}$

Si $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $(x,y) \in B((0,0),1) \Leftrightarrow |x| < 1$ et $|y| < 1$

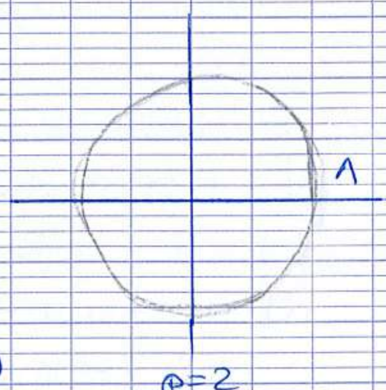
$B(0,1)$:

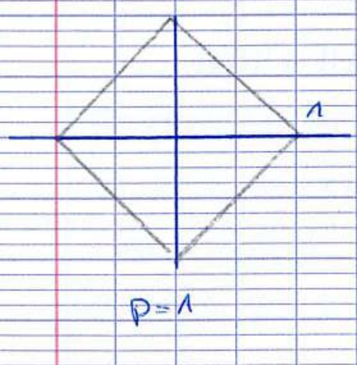
(2) sur $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$

Soit $p > 0$. On pose $\left\|\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\|_p = \left(|a_1|^p + \dots + |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Si $p \geq 1 \Rightarrow \|\cdot\|_p$ est une norme

Ex : $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a



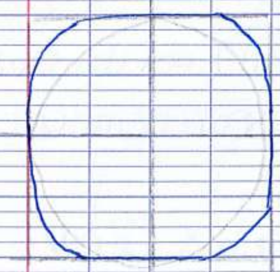


$B((0,0),1)$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in B((0,0),1)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$ avec $p=1$

$\Leftrightarrow |x|+|y|<1$

entre cercle & carré



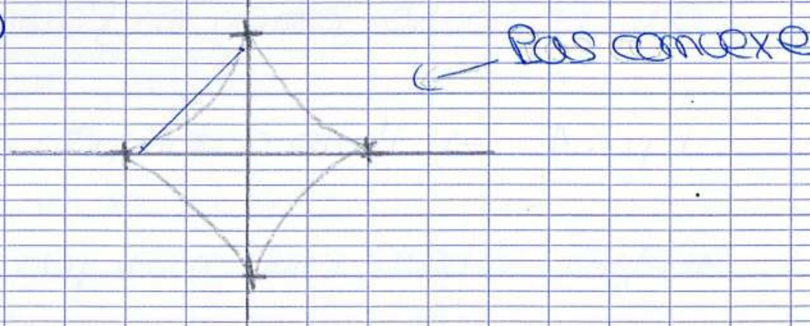
$p \geq 2$

Si $0<p<1$, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme. En effet, on a $\|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p$ $\forall x,y \in \mathbb{K}^n$

toutefois $\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$

$\Rightarrow$ la position $d(x,y) = \|x-y\|_p^p$ est une distance

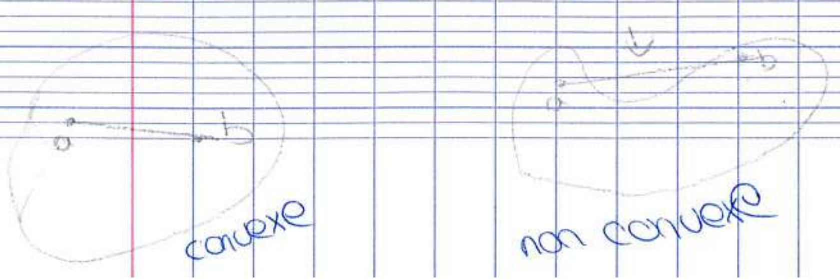
Dans ce cas ($0<p<1$, $n=2$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$), on a $B((0,0),1)$



Celle ci est une boule pour l'espace métrique associé à $\|\cdot\|_p$ quand $p<1$, mais elle ne peut pas être la boule d'un espace ~~vect~~ normé car les boules des EVN sont convexes

Definition

Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est convexe si $\forall a,b \in A$, le segment $[a,b] = \{x \in V \mid x = a + t(b-a),\ t \in [0,1]\}$ est entièrement contenu dans A.



La boule ouverte unité pour la distance associée à $\|\cdot\|_p$ avec $p<1$ n'est pas convexe

Proposition Si $\|\cdot\|$ est une norme et $(V, \|\cdot\|)$ est un evn, alors les boules ouvertes et fermées sont convexes

Preuve Boule ouverte : $A = B(c, r)$ $\ni a, b$, $c \in V$
On veut mq pour tout $t \in [0,1]$ le point $x = a + t(b-a)$ appartient à $B(c,r)$
$x = tb + (1-t)a$
Il suffit de mq $\|x-c\| < r$
$\|x-c\| = \|tb+(1-t)a - c\| = \|tb + (1-t)a - (tc + (1-t)c)\|$
$= \|t(b-c) + (1-t)(a-c)\| \leq |t| \underbrace{\|b-c\|}_{<r} + |1-t| \underbrace{\|a-c\|}_{<r}$
$< tr + (1-t)r = r$. $\square$

Pour les boules fermées, on fait pareil.

Corollaire Si $p<1 \Rightarrow \|\cdot\|_p$ n'est pas une norme

en effet, la boule unité n'est pas convexe.

Définition Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est ABSORBANT si $\forall x \in V$ on peut trouver $t \in \mathbb{K}$ tq $\left| \begin{array}{l} t.x \in A \\ x \in t.A = \{ta \mid a \in A\} \end{array} \right.$

En particulier $\bigcup_{t>0} t.A = V$.

Proposition Importante Soit $(V, \|\cdot\|)$ un EVN. Les boules ouvertes et fermées centrées en 0 sont absorbantes