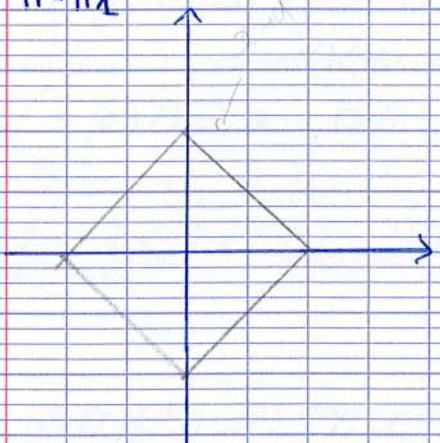
Chapitre : Topologie des espaces vectoriels normés

Boules, fermés et ouverts

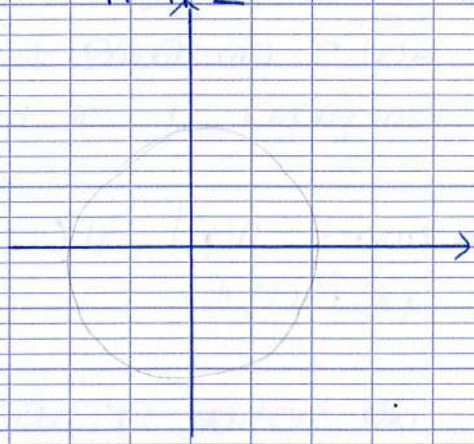
Définition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle "boule ouverte de centre x et de rayon r" l'ensemble $B(x,r) = \{y \in E,\ \|x-y\| < r\}$. On appelle "boule fermée de centre x et de rayon r" l'ensemble $B_f(x,r) = \{y \in E,\ \|x-y\| \leq r\}$. (aussi notée $\overline{B}(x,r)$).

exemple dans $\mathbb{R}^2$, voici les boules de centre O et de rayon 1

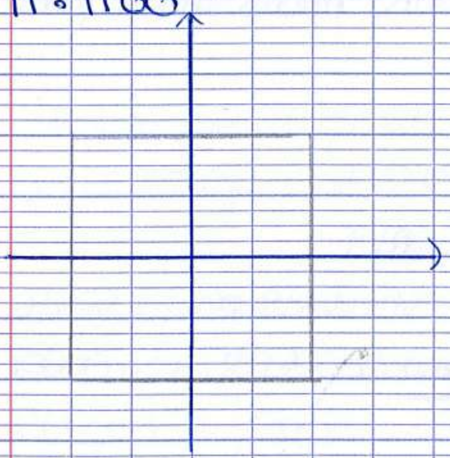
$\|\cdot\|_1$



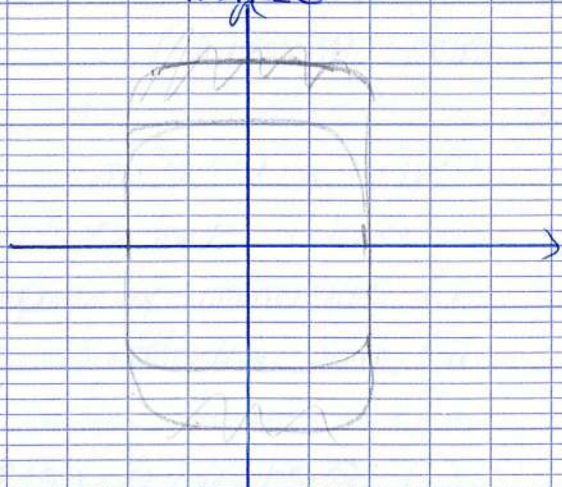
$\|\cdot\|_2$



$\|\cdot\|_\infty$



$\|\cdot\|_{10}$



NB pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ deux ~~boules~~ cercles peuvent s'intersecter sur un nombre infini de pts

Définition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. une partie A de E est dite "ouverte" si $\forall x \in A, \exists R > 0, B(x,R) \subset A$

exemple × Une boule ouverte est ouverte

en effet soit $x \in B(x_0, r)$ et on pose $\rho = \frac{1}{2}(r - \|x_0 - x\|)$

soit $y \in B(x, \rho)$ $\|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x\| + \|x - y\|$

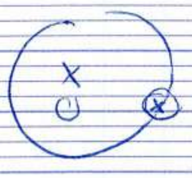
$\leq \|x_0 - x\| + \frac{1}{2}R - \frac{\|x - x_0\|}{2} = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\|x_0 - x\|$

$< \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R = R.$

Donc $B(x, \rho) \subset B(x_0, r)$

× la boule fermée $\bar{B}(0,1)$ n'est pas ouverte.

Soit x de norme 1, soit $r > 0$



on prend $y = x + \frac{r}{2}x$ on a $x \in B(x, r)$

mais $\|y\| = \|(1 + \frac{r}{2}) \cdot x\| = |1 + \frac{r}{2}| > 1$ donc $y \notin \bar{B}(0,1)$

⚠ la notion d'ouvert dépend de l'espace

$]0,1[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ mais n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$)

Théorème important Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn

(i) $\emptyset$ et E sont des ouverts

(ii) une union quelconque d'ouverts est ouverte

(iii) une intersection finie d'ouverts est ouverte.

démonstration (i). $\emptyset$ est un ouvert car la condition est vide, et E est un ouvert car contient toutes les boules.

(ii). Soit $(O_i)_{i \in \Lambda}$ une famille d'ouverts

Soit $O = \bigcup_{i \in \Lambda} O_i$. soit $x \in O$, il existe $i \in \Lambda$ tq

$x \in O_i$ O_i est ouvert donc $\exists r>0$, $B(x,r) \subset O_i$
donc $B(x,r) \subset \bigcup_{i\in\Lambda} O_i = O$.

(iii) Soit O_i $i=1,\dots,p$ un nombre fini d'ouverts et soit $O = \bigcap_{i=1,\dots,p} O_i$ soit $x \in O$, $x \in O_i$ $\forall i$

$\exists r_i > 0$ tq $B(x, r_i) \subset O_i$. On pose $r = \min\{r_i\}$ comme il n'y a qu'un nombre fini, r est strictement positif.
$B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset O_i$ $\forall i$ donc
$B(x,r) \subset O$

exemple $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}]i, i+1[$
est ouvert comme union d'ouverts. $]i,i+1[= B(i+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\{0\} = \bigcap_{n\geq 1}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ dans $\mathbb{R}$.
n'est pas ouvert ouverts

définition $A \subset E$ est dite "fermé" si son complémentaire est ouvert ($A^c = E\setminus A$)

proposition A est fermé dans E ssi pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ qui converge vers $\ell \in E$ on a $\ell \in A$

Demonstration si A est fermé, soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge dans $\ell \in E$ si $\ell \notin A$ alors comme A^c est ouvert $\exists r>0$ tq $B(\ell,r) \cap A = \emptyset$ mais comme $x_n \to \ell$, pour n assez grand, $x_n \in B(\ell,r)$. CONTRADICTION.
si A n'est pas fermé, il existe $\ell \notin A$ tq $\forall r>0$ $B(\ell,r) \cap A \neq \emptyset$. on pose $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \in B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A$ on a bien $\|x_n - \ell\| < \frac{1}{n} \to 0$ donc $x_n \to \ell$.

Espaces vectoriels

On va noter $\mathbb{K}$ un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout ce qu'on va raconter est valable pour des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Exemples d'EV

1) $\mathbb{K}^n \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$; $a_i \in \mathbb{K}$

2) Tout $\mathbb{K}$-ev de dim $< +\infty$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$
$e_1 \cdots e_n$ = base $\Rightarrow$ tout vecteur s'écrit comme $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = v$
$\Rightarrow$ on a le droit d'identifier v avec $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

3) $M_{n \times m}(\mathbb{K})$ = matrices de taille $n \times m$ à coeff dans $\mathbb{K}$
dim $M_{n\times m}(\mathbb{K}) = n \cdot m \Rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n \times m}$
Pour $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ on note $e_{ij} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1\,0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) i \\ j \end{array}$
$\Rightarrow \{e_{ij}\}_{i,j}$ = base de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$

4) Suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \{(a_0, a_1, \dots\dots),$
$a_i \in \mathbb{K}\}$ = Vecteurs de longueur ∞.
somme et produit se font composante par composante

5) $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subsetneq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
$(a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a_i = 0$ pour tout i sauf un nombre fini d'indices

à partir d'un certain n on a $a_i = 0 \ \forall i \geq n$