Propriété inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall x,y \in E \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$.

on a égalité ssi x et y sont colinéaires.

Démonstration

1ère méthode $\|x+ty\|^2 = \langle x+ty , x+ty\rangle =$

soit $t \in \mathbb{R}$ $\langle x, x+ty\rangle + t\langle y, x+ty\rangle$

$= \langle x,x\rangle + t\langle x;y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t\langle x,y\rangle$

On doit avoir ce polynome ent toujours positif ou nul donc $\Delta = (2\langle x,y\rangle)^2 - 4 \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$

c'est exactement Cauchy-Schwarz.

donc $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

et on a égalité ssi le polynome a une racine double : donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x+ty = 0$

2ème méthode on développe $\|x+ty\|^2$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$

donc $-2\langle x,y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

Idée de symétrie en changeant x en $-x$, le membre de gauche est changé en son opposé & le membre de droite est invariant.

On obtient que $2|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

le membre de gauche est invariant par

$(x,y) \longrightarrow (\lambda x, \frac{1}{\lambda} y)$

Donc $2|\langle x,y\rangle| \leq \lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|y\|^2$

la meilleure inégalité ↑ le + petit possible.

On optimise pour trouver la meilleure inégalité

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|y\|^2\right) = 2\lambda . \|x\|^2 - \frac{2}{\lambda^3}\|y\|^2$$

s'annule si $\lambda^2 = \frac{\|y\|}{\|x\|}$

on a donc $2|\langle x,y\rangle| \leqslant \frac{\|y\|}{\|x\|}.\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|y\|}.\|y\|^2$

$$= 2.\|x\| + \|y\|$$

Proposition l'application $x \in E \longrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme

Demonstration × elle est clairement definie positive par definition du produit scalaire

× l'homogeneite est evidente

$\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x\rangle} = |\lambda| . \sqrt{\langle x,x\rangle}$

× Montrons l'inegalite triangulaire.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$
$$\underset{CS}{\leqslant} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(\|x\|\,\|y\|)$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

donc $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

donc $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Normes ℓ^p sur $\mathbb{R}^d$

pour $p \in]1, +\infty[$ on pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Cette expression est clairement definie positive et homogene proposition **inégalité de Holder**

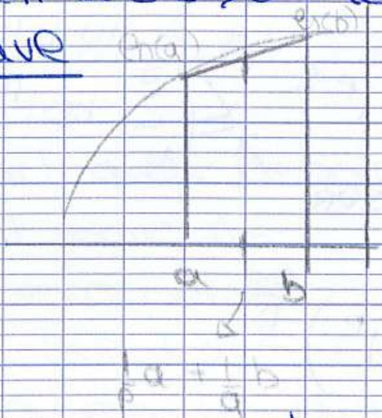
Soit $p \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\left(q = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \right)$

alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\left| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right| \leqslant \|x\|_p . \|x\|_q$$ généralisation CS

Demonstration Soient a & $b > 0$. le log est une fonction

revoir ?? **concave**



$$\ln\left(\frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b)$$

Comme le log est croissant

vrai $\hat{m}$ si $a \geq 0, b \geq 0$

$$\frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \geqslant a^{\frac{1}{p}} . b^{\frac{1}{q}}$$ $a = |x_i|^p$

- Supposons que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$

$$\left| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{d} |x_i| . |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{p} . |x_i|^p + \frac{1}{q} |y_i|^q$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d} |y_i|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_p$$

l'inégalité plus haut est homogène, donc pour x et y non nuls quelconques

$$\left| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right| = \|x\|_p . \|y\|_p \times \sum_{i=1}^{d} \frac{x_i}{\|x\|_p} \frac{y_i}{\|y\|_p} \quad (*)$$

or $\breve{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$ est telque $\|\breve{x}\|_p = 1$

idem pour $\|\breve{y}\|_p = 1$

donc $(*) \leq \|x\|_p . \|y\|_p . 1$

proposition inégalité de Minkowski

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Démonstration $\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i+y_i|^p$

$$= \sum_{i=1}^{d} |x_i+y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} \le \sum_{i=1}^{d} |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

on a
$$\sum_{i=1}^{d} |x_i|\, |x_i+y_i|^{p-1} \underset{\text{Holder}}{\le} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p/p-1}}$$

$$= \|x\|_p \cdot \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Ainsi $\|x+y\|_p^p \le \|x\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p-1}$

divisé par $\|x+y\|_p^{p-1}$

et $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

Ceci est exactement l'inégalité triangulaire.