Les valeurs de r biologiquement possibles sont donc $]0, 1[$.

Par hypothèse on a $s_n + p_n = c$
donc $p_n = c - s_n$.

Il suit $s_{n+1} = s_n + r(p_n - s_n)$

$= s_n + r(c - s_n - s_n)$

$= (1-2r)s_n + rc$.

Le point d'équilibre s^* de cette dynamique affine est donné par l'équation

$$s^* = (1-2r)s^* + rc$$

donc $s^* = \dfrac{rc}{2r} = \dfrac{c}{2}$.

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$x_n = s_n - s^*$$

vérifie

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= s_{n+1} - s^* \\ &= (1-2r)\, s_n + rc - s^* \\ &= (1-2r)\, s_n + rc - \frac{c}{2} \\ &= (1-2r)\left(s_n - \frac{c}{2}\right) \\ &= (1-2r)\,(s_n - s^*) \\ &= (1-2r)\, x_n . \end{aligned}$$

Elle suit donc une dynamique de Malthus à temps discret de raison $1-2r$.

On en déduit :

$x_n = (1-2r)^n x_0$, $\quad s_n = (1-2r)^n x_0 + \frac{c}{2}$ et

$$p_n = \frac{c}{2} - (1-2c)^n x_0 .$$

On étudie $f_2(x) = \dfrac{x+1}{3x+1}$ pour $x \geq 0$.

On a
$$f_2'(x) = \frac{3x+1-3(x+1)}{(3x+1)^2}$$
$$= \frac{-2}{(3x+1)^2}$$

Le tableau de variation de f_2 sur $\mathbb{R}_+$ est donc le suivant :

x	0		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	
$f_2(x)$	1	$\searrow$	0

Les points fixes de f_2 sont donnés par l'équation

$$x^* = f_2(x^*) = \frac{x^*+1}{3x^*+1}$$

$$(3x^*+1)\,x^* = x^*+1$$

$$3x^{*2} + x^* = x^*+1$$

$$3x^{*2} = 1$$

donc $x^* = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

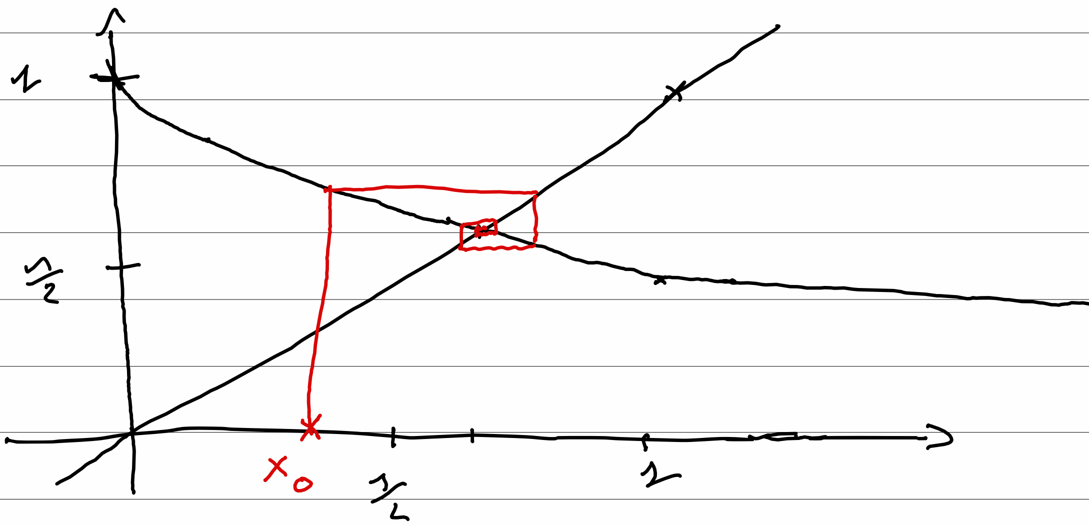
La dérivée au point fixe positif $x^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$

est $f_2'(x^*) = \frac{-2}{(3x^*+1)^2} = \frac{-2}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{-2}{4+2\sqrt{3}}$

$$= \frac{-1}{2+\sqrt{3}} \in]-1, 0[.$$

Le point fixe est donc attractif alterné.

Le graphique est le suivant :



Exercice 19 :

1. On étudie la fonction $f(x) = \dfrac{rx}{1+x/m}$.

On a $f'(x) = \dfrac{r\left(1+\frac{x}{m}\right) - \frac{1}{m}(rx)}{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2}$

$= \dfrac{r}{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2}$ ce qui est positif et tend vers 0 pour $r>0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	rm

Les points fixes de f sont les solutions de l'équation

$$x^* = f(x^*)$$

$$x^* = \frac{r x^*}{1 + x^*/m}$$

$$x^* \left(1 + \frac{x^*}{m}\right) = r x^*$$

$$x^* \left(1 - r + \frac{x^*}{m}\right) = 0$$

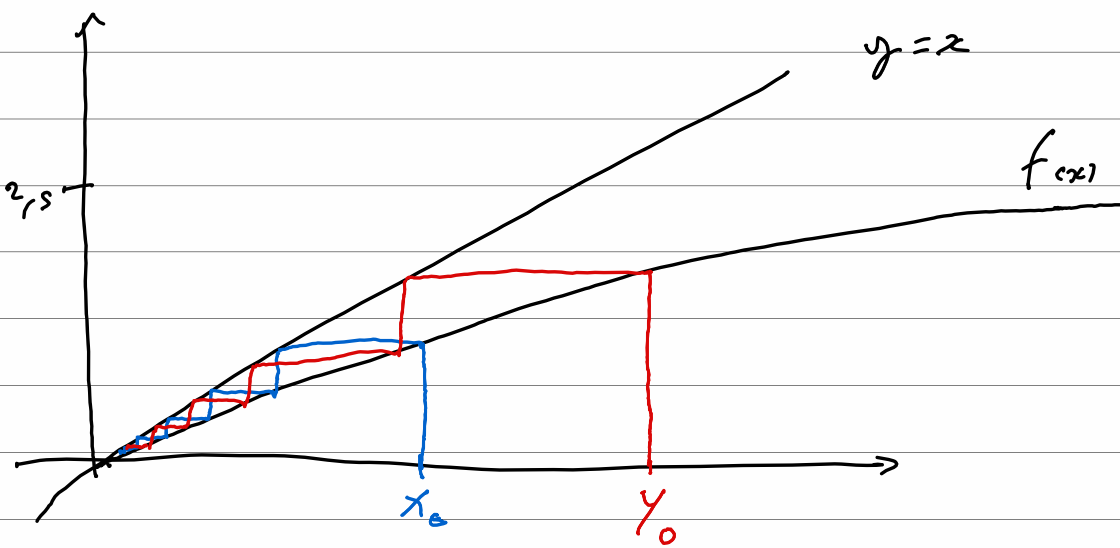
donc $x^* = 0$ ou $x^* = m(r-1)$

Donc si $r = 0,5$ et $m = 5$ on a

$x^* = 0$ ou $x^* = -2,5$

et $rm = 2,5$

Ce qui donne le graphique :

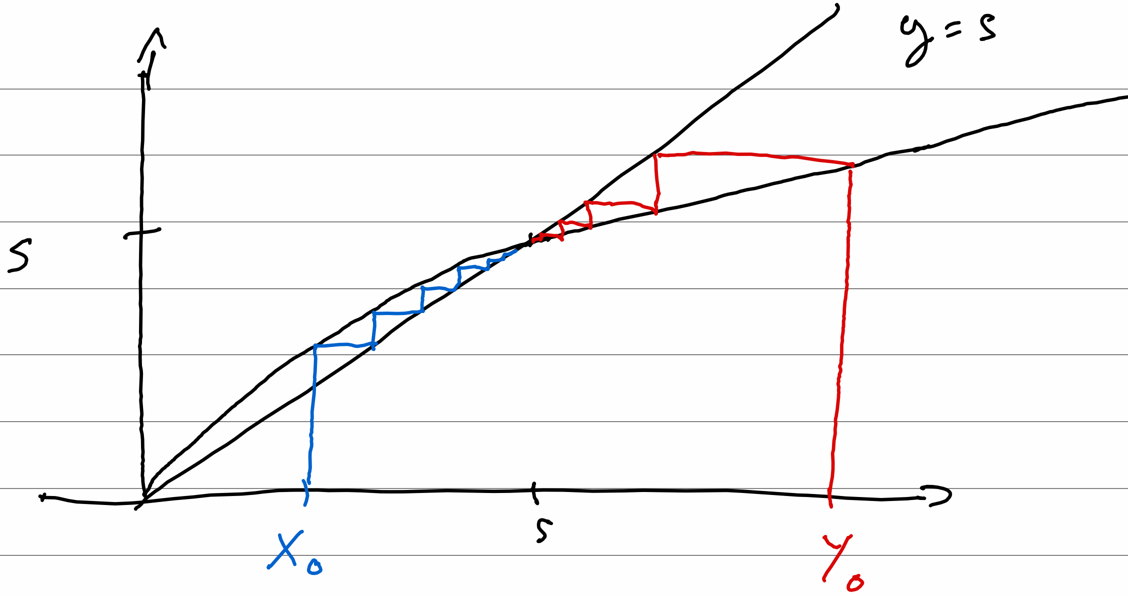


Dans ce cas le point fixe 0 est stable, attractif décroissant.

Si $r = 2$ et $m = 5$ on a

$x^* = 0$ ou $x^* = 5$ et $rm = 10$

ce qui donne le graphique :



Ici c'est le point fixe $x^* = S$ qui est stable, attractif croissant ou décroissant.

2. On considère la suite $y_n = \frac{1}{x_n}$.

On a $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1 + \frac{x_n}{M}}{r\, x_n}$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{x_n} + \frac{1}{rM}$$

$$= \frac{1}{r}\, y_n + \frac{1}{rM}.$$

La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmético-géométrique.

Pour calculer y_n pour tout n on considère la suite $z_n = y_n - \dfrac{\frac{1}{rm}}{1 - \frac{1}{r}}$.

On a $\qquad = y_n - \dfrac{1}{rm - m}$

$$z_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{m(r-1)}$$

$$= \frac{1}{r} y_n + \frac{1}{rm} - \frac{1}{m(r-1)}$$

$$= \frac{1}{r} y_n + \frac{r-1}{rm(r-1)} - \frac{r}{rm(r-1)}$$

$$= \frac{1}{r} y_n - \frac{1}{rm(r-1)}$$

$$= \frac{1}{r}\left(y_n - \frac{1}{m(r-1)} \right) = \frac{1}{r} z_n.$$

La suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique

de raison $\frac{1}{r}$ et $y_n = z_n + \frac{1}{m(r-1)}$

$$y_n = \left(y_0 - \frac{1}{m(r-1)}\right)\frac{1}{r^n} + \frac{1}{m(r-1)}.$$

On en déduit que si $r > 1$ alors $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\frac{1}{m(r-1)}$ donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $m(r-1)$, le point fixe stable.

Si $r \leq 1$, $(y_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini donc $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

3. Dans ce cas la population tend vers K qui est donc la capacité stable du milieu.

<u>Exercice 20 :</u>

On étudie la fonction $f(x) = \dfrac{ax^2}{b+x^2}$.

On a $f'(x) = \dfrac{2ax(b+x^2) - 2x\,ax^2}{(b+x^2)^2}$

$$= \frac{2abx}{(b+x^2)^2}$$

qui est positif pour $a=5$, $b=6$ et $x \geq 0$ et tend vers 0 à l'infini.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	a

Les points fixes de f sont les solutions de

$$x^* = f(x^*)$$

$$x^* = \frac{a x^{*2}}{b + x^{*2}}$$

$$(b + x^{*2})\, x^* = a x^{*2}$$

$$x^*(b + x^{*2}) - a x^{*2} = 0$$

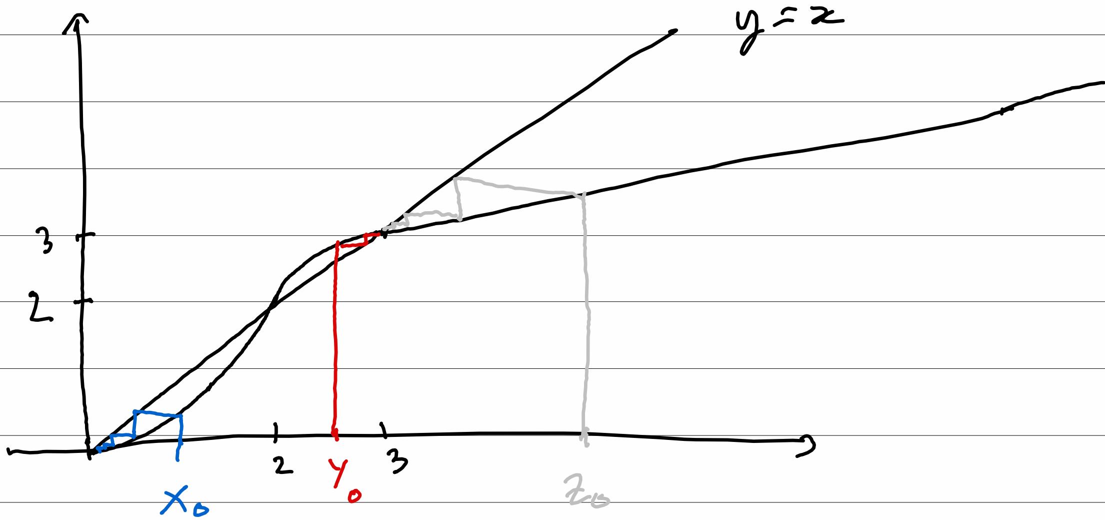
$$x^*(x^{*2} - a x^* + b) = 0 .$$

Donc on a $x^* = 0$ ou $x^{*2} - a x^* + b = 0$

avec $a = 5$ et $b = 6$

donc $x^* = 0$ ou $x^* = 2$ ou $x^* = 3$.

Le graphique est donc le suivant :



Comme $|f'(0)| = 0 < 1$ le point fixe 0 est stable, pour tout x_0 assez proche de 0 l'extinction est certaine.

De la même façon $|f'(3)| = \frac{60 \times 3}{(6+3^2)^2}$

$= \frac{180}{225} < 1$

donc le point fixe 3 est stable.

La survie est donc possible pour $x_0 \geqslant 2$ d'après cela et le graphique.