

ORSAY
N° d'ordre 6070

**UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THÈSE

présentée
pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY**

Spécialité : Mathématiques

PAR

Anne PARREAU

SUJET : **Dégénérescences de sous-groupes discrets
de groupes de Lie semisimples
et actions de groupes sur des immeubles affines.**

Soutenue le : 28 Janvier 2000 devant la Commission d'examen

MM. Yves BENOIST
Etienne GHYS
Pierre PANSU
Frédéric PAULIN
Guy ROUSSEAU
Alain VALETTE

Remerciements

Frédéric Paulin a été un directeur de thèse formidable. Il m'est difficile d'exprimer toute ma gratitude envers lui, notamment pour tout le temps et l'énergie qu'il a investis dans l'encadrement de mes recherches. Sa disponibilité de tous les instants, son enthousiasme communicatif pour les mathématiques, sa patience, sa confiance, ses relectures infatigables et ses conseils ont été des ressources très précieuses et stimulantes.

Je remercie vivement Yves Benoist et Alain Valette pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs. Leurs remarques pertinentes ont contribué à l'amélioration du manuscrit.

Je suis très honorée par la présence dans mon jury d'Etienne Ghys, de Pierre Pansu et de Guy Rousseau.

Je remercie Frédéric Haglund, qui a lu attentivement la partie concernant les immeubles, pour ses commentaires, et pour des discussions fructueuses. Je remercie également Laurent Clozel pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je remercie Hyman Bass, qui m'a communiqué des idées et explications cruciales sur les sous-groupes purement elliptiques du groupe linéaire; Bernhard Leeb, qui m'a expliqué le modèle algébrique du cône asymptotique; Yehuda Shalom, pour avoir attiré mon attention sur les actions de groupes de génération bornée; et Francis Choucrun, pour m'avoir signalé les travaux de P. Gérardin, F. Bruhat et J. Tits, sur le modèle des normes ultramétriques pour les immeubles de Bruhat-Tits.

Je souhaite également remercier les secrétaires de l'équipe de Topologie et Dynamique, Laurence Stephen et Martine Justin, pour leur accueil chaleureux, leur disponibilité et leur efficacité.

Merci à tous ceux qui m'ont soutenue, notamment les thésards, ex-thésards et autres habitants du bâtiment 430, qui m'ont souvent remonté le moral, et mes compagnons de syndicat, qui m'ont déchargée de toute tâche ces derniers mois.

Je remercie enfin les membres de ma famille pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et leur soutien moral et matériel sans faille. Sylvain et Cécile ont assuré la logistique rapprochée dans la phase finale, n'hésitant pas à veiller tard dans la nuit.

Résumé

On étudie ici les dégénérescences de représentations fidèles et discrètes d'un groupe de type fini Γ dans un groupe de Lie semisimple réel G .

On donne d'abord des propriétés fondamentales des immeubles de Tits affines, les relations entre leurs différentes définitions apparaissant dans la littérature, et de nouvelles caractérisations pratiques. On démontre une classification de leurs isométries : elles fixent un point ou translatent une géodésique dans le complété. On donne la construction par les normes ultramétriques de l'immeuble de Bruhat-Tits Δ du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sur un corps valué \mathbb{F} quelconque. On démontre qu'un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, dont tout élément fixe un point dans Δ , admet un point fixe global dans le complété de Δ .

On considère ensuite l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de Γ dans G , telles que les actions correspondantes de Γ sur l'espace symétrique $X = G/K$ n'admettent pas de point fixe global à l'infini. On définit le *vecteur de translation* d'un élément g de G comme l'unique vecteur de longueur minimale adhérent à l'ensemble des projections dans une chambre de Weyl fermée fixée \overline{C} de X des segments joignant un point de X à son image par g . On construit, par des méthodes purement géométriques, une compactification de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, induite par le spectre marqué des vecteurs de translation, généralisant celle de Thurston pour l'espace de Teichmüller. On montre que les points du bord sont les spectres marqués de vecteurs de translation soit de représentations fidèles et discrètes de Γ dans G ayant un point fixe global à l'infini dans X , soit d'actions de Γ sur un immeuble affine, que l'on explicite. Lorsque Γ est un groupe de surface et $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, ceci donne une compactification de la composante de Hitchin de l'espace des modules de G -fibrés plats sur la surface, dont on calcule explicitement le spectre marqué des vecteurs de translation de certains points du bord.

Mots clefs : groupe de Lie semisimple, groupe linéaire, sous-groupe discret, déformation, dégénérescence, espace de représentations, compactification, espace symétrique de type non compact, structures projective réelle, cône asymptotique, immeuble affine, norme ultramétrique, corps valué.

Abstract

We hereby study the degenerations of the discrete and faithful representations of a finitely generated group Γ into a semisimple real Lie group G .

We first give fundamental properties of the affine Tits buildings, the relationships between their various definitions occurring in the literature, and some new practical characterizations. We classify their isometries : they either fix a point or translate a geodesic in the metric completion. We give the construction via ultrametric norms of the Bruhat-Tits building Δ of the linear group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ for any valuated field \mathbb{F} . We show that a finitely generated subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, every element of which fixes a point in Δ , has a global fixed point in the metric completion of Δ .

We then consider the space $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ of conjugacy classes of discrete and faithful representations of Γ into G , such that the corresponding action of Γ on the symmetric space $X = G/K$ fixes no point at infinity. We define the *translation vector* of an element g in G as the unique vector of minimal length in the closure of the set of projections into a fixed closed Weyl chamber \overline{C} of X of the segments joining a point of X to its image by g . We construct, in a purely geometric way, a compactification of $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, induced by the marked translation vector spectrum, generalizing Thurston's compactification of the Teichmüller space. We show that the boundary points are the marked translation vector spectra of either faithful and discrete representations of Γ into G having a global fixed point at infinity of X or of an action of Γ on an affine building, that we determine. When Γ is a surface group and $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, this gives a compactification of the Hitchin component of the moduli space of flat G -bundles over the surface, and we compute explicitly the marked translation vector spectrum of some boundary points.

Keywords : semisimple Lie group, linear group, discrete subgroup, deformation, degeneration, representation space, compactification, symmetric space of noncompact type, real projective structures, asymptotic cone, affine building, ultrametric norm, valuated field.

Table des matières

Introduction.	1
I Préliminaires.	9
I.1 Espaces métriques CAT(0).	9
I.2 Espaces symétriques	12
I.3 Modèle des normes euclidiennes pour E_n .	17
II Immeubles affines	21
II.1 Définitions et caractérisations.	21
II.1.1 La structure modèle.	21
II.1.2 Définition des immeubles affines.	22
II.1.3 Premières définitions.	23
II.1.4 Deux conséquences de l'axiome (A5').	25
II.1.5 L'immeuble à l'infini et les propriétés (GG) et (CO).	26
II.1.6 L'immeuble des germes en un point et la propriété (A3').	29
II.1.7 Rétractions.	30
II.1.8 Vérification de l'axiome (A4).	31
II.2 Décomposition et propriétés géométriques.	33
II.2.1 Produits et décomposition.	33
II.2.2 Automorphismes et isométries.	36
II.2.3 Géométrie CAT(0).	36
II.2.4 Enveloppe convexe de Weyl de deux points.	37
II.2.5 Isométries préservant le type des segments.	37
II.2.6 Le système maximal d'appartements.	38
II.2.7 La définition de Kleiner-Leeb.	40
II.3 Classification des isométries.	43
II.3.1 Énoncés.	43
II.3.2 Démonstration du théorème II.3.1.	44
III Immeubles classiques	47
III.1 Construction de l'immeuble de $GL_n(\mathbb{F})$	47
III.1.1 Normes ultramétriques.	47
III.1.2 Définition de l'immeuble de $GL(V)$.	50
III.1.3 Vérification de l'axiome (A1).	53
III.1.4 Vérification de l'axiome (A2).	53

III.1.5	Vérification de l'axiome (A4).	54
III.1.6	Vérification de la propriété (A3').	55
III.2	Sous-groupes bornés de $GL_n(\mathbb{F})$.	57
III.3	Sous-groupes elliptiques de $GL_n(\mathbb{F})$.	60
IV	Cônes asymptotiques des espaces symétriques.	65
IV.1	Définition et propriétés.	65
IV.2	Modèle algébrique du cône asymptotique.	68
IV.2.1	Le corps \mathbb{K}_ω .	69
IV.2.2	L'espace vectoriel \mathbb{K}_ω^n .	70
IV.2.3	Cône asymptotique et immeuble de $SL_n(\mathbb{K}_\omega)$.	70
V	Compactification.	73
V.1	La méthode de compactification utilisée.	73
V.2	Vecteur de translation.	73
V.2.1	Vecteur de translation d'une isométrie d'un espace symétrique ou d'un immeuble.	73
V.2.2	Continuité asymptotique de v .	77
V.3	Espaces de représentations.	79
V.3.1	Actions sur un espace CAT(0) propre.	79
V.3.2	Déplacement	80
V.3.3	Actions non-paraboliques	81
V.3.4	Représentations fidèles et discrètes dans un groupe de Lie semi-simple	82
V.4	Compactification via le spectre marqué des vecteurs de translation.	84
V.4.1	Spectre marqué des vecteurs de translation.	84
V.4.2	Interprétation des points du bord.	85
V.4.3	Les points du bord sont non nuls.	86
V.5	Exemple : structures projectives convexes sur une surface.	86
V.5.1	Courbes fermées simples, nombres d'intersections.	87
V.5.2	Twist le long d'une courbe fermée simple.	88
V.5.3	Exemples de points du bord.	90
	Bibliographie.	99

Introduction.

Soit G un groupe de Lie semisimple réel, connexe, sans facteur compact, de centre fini. L'exemple fondamental est le groupe linéaire spécial $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Soit Γ un groupe infini, de type fini (muni de la topologie discrète). On suppose que Γ n'a pas de sous-groupe d'indice fini possédant un sous-groupe abélien distingué infini. Cette hypothèse est notamment vérifiée si Γ est un sous-groupe discret fortement irréductible de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

On peut réaliser G , modulo son centre, comme le groupe des isométries d'une variété riemannienne complète simplement connexe X à courbure sectionnelle négative ou nulle, qui s'identifie au quotient G/K de G par un de ses sous-groupes compacts maximaux K , appelée *l'espace symétrique de type non compact associé à G* . Le rang de G est égal à la dimension commune des sous-espaces totalement géodésiques euclidiens maximaux, qu'on appelle les plats maximaux de X . Si G est de rang 1, alors X est à courbure sectionnelle strictement négative. Les morphismes de Γ dans G peuvent être interprétés comme des actions isométriques de Γ sur X . C'est l'angle d'approche qui est systématiquement choisi dans ce travail.

Une représentation fidèle et discrète de Γ dans G est un morphisme du groupe Γ dans le groupe G , injectif, d'image discrète. On dit qu'une représentation de Γ dans G est *non-parabolique* si l'action de Γ sur X associée n'admet pas de point fixe global dans le bord à l'infini de X . Cette notion correspond pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ à celle de représentation irréductible.

On considère l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ des *déformations (fidèles et discrètes, non paraboliques)* de Γ dans G , c'est-à-dire des classes d'équivalence de représentations fidèles et discrètes, non paraboliques, de Γ dans G , où on identifie deux représentations qui se déduisent l'une de l'autre par conjugaison par un élément de G . Cet espace est muni de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte sur l'espace $\mathrm{R}(\Gamma, G)$ de toutes les représentations de Γ dans G (qui coïncide avec la topologie de la convergence simple). L'hypothèse faite sur Γ et la restriction aux représentations non paraboliques assurent que $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ est localement compact. On s'intéresse plus particulièrement aux dégénérescences possibles de déformations de Γ dans G "partant à l'infini" dans l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$.

Si Γ est le groupe fondamental d'une surface lisse \mathcal{S} connexe orientée fermée, de genre $g \geq 2$, et $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors X est le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 et l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ a deux composantes connexes, chacune s'identifiant naturellement à l'espace de Teichmüller \mathcal{T} des structures hyperboliques (marquées) sur la surface \mathcal{S} . Cet espace \mathcal{T} est homéomorphe à une cellule de dimension $6g - 6$.

Si $\Gamma = \pi_1(\mathcal{S})$ et $G = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, alors Goldman et Choï ont montré (voir [ChGo]) que l'espace \mathcal{P} des structures projectives réelles convexes (marquées) sur \mathcal{S} est une cellule de dimension $16g - 16$, égale à la composante de Hitchin de l'espace des modules de G -fibrés

plats sur la surface ([Hit]). En particulier c'est une composante connexe de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$.

Par contre, si Γ est un réseau irréductible d'un groupe de Lie H semisimple réel, connexe, sans facteurs compacts, de centre fini, de rang supérieur ou égal à 2, le théorème de super-rigidité de Margulis (voir [Mar]) entraîne que pour tout G , l'espace $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ est fini.

Les réseaux des groupes de Lie réels semisimples (connexes, sans facteurs compacts, de centre fini) H de rang 1 non localement isomorphes à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, comme $\mathrm{SO}_0(n, 1)$ pour $n \geq 3$, s'ils n'ont pas de déformations non triviales dans H par les résultats de rigidité de Mostow (voir [Mos]), ont dans certains cas de riches espaces de déformations dans d'autres groupes G , correspondant par exemple aux structures conformes ($G = \mathrm{SO}_0(n + 1, 1)$) et projectives réelles ($G = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$) marquées sur une variété M de groupe fondamental Γ (voir par exemple [JoMi]).

Thurston a construit une compactification de l'espace de Teichmüller, fondamentale pour l'étude du groupe modulaire de la surface (voir par exemple [FLP]). L'un de ses outils fondamentaux est le *spectre marqué des longueurs*.

Le *spectre marqué des longueurs* d'une action de Γ sur un espace métrique X est la fonction de Γ dans \mathbb{R}_+ qui à un élément γ associe sa *longueur de translation* $\ell(\gamma)$, qui est la borne inférieure de la distance entre un point de X et son image par γ . C'est un invariant de conjugaison.

Dans le cas où Γ est le groupe fondamental de \mathcal{S} et où l'action provient d'une structure hyperbolique sur \mathcal{S} , la longueur de translation de γ est égale à la longueur de l'unique géodésique fermée librement homotope à γ . On sait que le spectre marqué des longueurs détermine uniquement la structure hyperbolique sur \mathcal{S} .

Plus généralement, pour $G = \mathrm{SO}_0(n, 1)$, Morgan et Shalen (cf. [MoSh], [Mor], [Chi]) généralisent la compactification de Thurston, par des méthodes algébriques, en interprétant les points du bord comme les spectres marqués des longueurs de translation d'actions de Γ sur des *arbres réels*, à "petits" (i.e. virtuellement cycliques) stabilisateurs d'arêtes.

Un *arbre réel* est un espace métrique dont deux points quelconques peuvent être joints par un unique arc, isométrique à un intervalle de \mathbb{R} . Cette notion généralise les arbres simpliciaux (dits aussi *discrets*) usuels.

Les arbres réels introduits dans [MoSh] pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont en fait obtenus comme immeubles de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$, où \mathbb{F} est le corps des fonctions rationnelles invariantes par G sur la variété algébrique des représentations $R(\Gamma, G)$, muni d'une valuation dépendant du point du bord considéré.

Bestvina [Bes] et Paulin [Pau1] obtiendront ensuite cette compactification de manière plus directe, en utilisant des arguments de convergence d'espaces métriques. Les actions de Γ sur des arbres réels apparaissent alors comme des limites, pour la topologie de Gromov équivariante, d'actions de Γ sur l'espace X , dont la métrique est divisée par une suite de constantes tendant vers $+\infty$.

Le résultat principal de ce travail est de généraliser cette compactification pour G de rang supérieur ou égal à 2, et d'en étudier quelques propriétés. La possibilité d'une telle compactification a été envisagée par de nombreuses personnes (Gromov, Paulin [Pau2], Kleiner-Leeb, Farb...).

En rang supérieur ou égal à 2, il convient de remplacer les arbres réels par une catégorie

plus générale d'espaces métriques, les *immeubles affines*, ou encore *euclidiens*. Ce sont des objets géométriques introduits par Bruhat et Tits (voir par exemple [Tit]). L'exemple fondateur est l'immeuble de Bruhat-Tits associé à un groupe algébrique semi-simple sur un corps valué \mathbb{F} (cf. [BrTi1]). Il joue un rôle analogue pour ce groupe à celui joué pour un groupe de Lie semi-simple réel sans facteur compact par l'espace symétrique de type non compact associé. Les immeubles affines les mieux connus (voir [Bro], [Ron]) sont les immeubles "discrets" ou simpliciaux (admettant une structure de complexe simplicial), qui correspondent au cas où la valuation de \mathbb{F} est discrète.

Les immeubles affines et les espaces symétriques de type non compacts se ressemblent par de nombreux aspects. Ils appartiennent à la classe plus large des espaces métriques $\text{CAT}(0)$, propriété exprimant leur "courbure négative ou nulle" par comparaison des triangles avec les triangles euclidiens. Le rang d'un immeuble affine est la dimension commune de ses *appartements*, qui sont des sous-espaces totalement géodésiques euclidiens maximaux. Les immeubles affines de rang 1 sont les arbres réels (sans sommets terminaux).

Les actions de Γ sur des immeubles affines apparaissent naturellement dans l'étude des dégénérescences de déformations de Γ dans G , par le biais d'un outil fondamental, le *cône asymptotique* de l'espace X .

La notion de *cône asymptotique* (cf. [Gro]) permet de construire, en utilisant des ultra-filtres, un espace métrique qui est la limite (quitte à extraire) de la suite des espaces métriques obtenus en divisant la distance d'un espace métrique par une suite de réels positifs tendant vers l'infini.

Le cône asymptotique de l'espace X est un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ (où \mathbb{A} est un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et \overline{W} le groupe de Weyl associé) (Gromov [Gro], Kleiner-Leeb [KLLe]). Le procédé de passage au cône asymptotique permet donc de voir les dégénérescences de déformations de Γ dans G comme des actions de Γ sur des immeubles affines, sans point fixe global (voir [Pau3], [KaLe]).

Les immeubles affines obtenus par ces dégénérescences ne sont ni discrets ni localement compacts, ce qui représente une difficulté majeure dans l'étude des actions obtenues. De plus, beaucoup de propriétés, élémentaires dans le cas des arbres, sont très difficiles à généraliser pour les immeubles affines de rang supérieur. En particulier l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points n'est en général pas contenue dans une réunion finie d'appartements.

Pour compactifier $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, on introduit (en section V.2) un raffinement de la notion de spectre marqué des longueurs de translation, le *spectre marqué des vecteurs de translation*.

Soit \mathbb{A} un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et \overline{W} le groupe de Weyl associé. On se fixe une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathbb{C}}$ de \mathbb{A} . Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on identifie \mathbb{A} à l'hyperplan de \mathbb{R}^n formé par les vecteurs de somme des coordonnées nulle, et le groupe \overline{W} au groupe des isométries de \mathbb{A} induites par les permutations des coordonnées. On peut alors prendre pour $\overline{\mathbb{C}}$ le cône convexe fermé de \mathbb{A} formé par les vecteurs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$. A chaque segment dans X est associé un unique vecteur de même longueur de $\overline{\mathbb{C}}$, appelé son *type*. L'action de G préserve le type des segments. Le *vecteur de translation* $v(g)$ d'un élément g de G est l'unique vecteur de $\overline{\mathbb{C}}$ de longueur minimale dans l'adhérence dans $\overline{\mathbb{C}}$ de l'ensemble des types des segments joignant un point de X à son image. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, cet invariant de conjugaison est égal à la suite décroissante des logarithmes des modules des valeurs propres de g . Il dépend continûment de g . Sous une autre forme, il est

notamment utilisé dans [Ben] pour étudier le cône limite des sous-groupes discrets Zariski-denses de G . On peut définir de manière analogue le vecteur de translation d'une isométrie préservant le type des segments d'un immeuble affine.

Le spectre marqué des vecteurs de translation d'une action ρ de Γ sur X est l'application $v \circ \rho$ de Γ dans $\overline{\mathcal{C}}$. On dira que deux éléments de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ sont *projectivement égaux* s'ils sont multiples l'un de l'autre par un réel positif non nul.

On fixe une partie génératrice finie S de Γ . Pour toute action ρ de Γ sur X , on note $\lambda(\rho)$ la borne inférieure pour x dans X du maximum de la distance entre x et ses images par les éléments de S . On montre (en section V.4) le théorème suivant.

Théorème 1 *L'application $\frac{\nu}{\lambda}$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ qui à $[\rho]$ associe $\frac{1}{\lambda(\rho)}v \circ \rho$ est continue et d'image relativement compacte. Un point du bord $B \subset \overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ de $\mathcal{X}(\Gamma, G)$, pour la compactification induite par $\frac{\nu}{\lambda}$, est projectivement égal au spectre marqué des vecteurs de translation d'une action de Γ soit sur X et ayant un point fixe au bord, soit sur un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global.*

L'action sur un immeuble affine est obtenue par passage à un cône asymptotique comme dans [Pau3], où il est en outre montré qu'elle est à stabilisateurs de germes d'appartements virtuellement résolubles. L'essentiel de la difficulté consiste ici à montrer la continuité du vecteur de translation par passage à un cône asymptotique (Prop. V.2.4).

On donne (voir la section V.5), dans le cadre où $\Gamma = \pi_1(\mathcal{S})$ et $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, un exemple de point du bord, en calculant explicitement le spectre marqué des vecteurs de translation d'une action de Γ sur un immeuble affine de rang 2 obtenue par dégénérescence d'une suite de structures projectives réelles convexes (marquées) sur \mathcal{S} . On montre que le spectre des longueurs associé ne provient pas d'une action de Γ sur un arbre réel.

Les preuves des résultats ci-dessus utilisent certaines propriétés des immeubles asymptotiques, qui ne sont ni localement compacts, ni discrets, et qu'il a fallu établir. D'autre part, la compréhension des actions de groupes sur les immeubles affines devrait donner, via le théorème 1, des informations sur $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ et permettre de tirer des applications intéressantes. On a donc entamé une étude de fond des immeubles affines et de leurs isométries, dans le cadre le plus général possible, qui s'avère nettement plus difficile que dans le cas des arbres réels.

La notion d'immeuble affine (pas nécessairement discret) fait l'objet d'un exposé détaillé (sections II.1 et II.2). On établit proprement les propriétés fondamentales. On donne les relations entre les différentes définitions des immeubles affines apparaissant dans la littérature (en particulier, on montre que la définition de Kleiner-Leeb (voir [KlLe]) (élargie au cas non complet) est équivalente à celle de Tits), et des caractérisations pratiques.

On démontre (section II.3) un théorème de classification des isométries des immeubles affines. Rappelons (voir par exemple [BrHa]) qu'on classe de façon standard une isométrie d'un espace métrique CAT(0) dans l'un des trois types suivants : elliptique si elle a un point fixe, axiale si elle translate une géodésique, parabolique si la borne inférieure de la distance entre un point et son image n'est pas atteinte (voir l'exemple du plan hyperbolique \mathbb{H}^2).

Théorème 2 *Soit Δ un immeuble affine, dont l'immeuble sphérique à l'infini est épais. Soit g une isométrie de Δ , alors g fixe un point ou translate une géodésique du complété de Δ .*

Plus précisément on donne (voir Th. II.3.1) une majoration (uniforme en le type de l'immeuble) de la distance d'un point x à l'ensemble de déplacement minimal en fonction de la distance de x à son image par g (voir [Rou] pour des résultats apparentés). Si g préserve les chambres de Weyl (par exemple si g est un automorphisme), le résultat est valable sans l'hypothèse sur l'immeuble à l'infini.

En rang 1, pour les arbres discrets et réels, ce théorème est dû à Serre et Tits (voir aussi [MoSh]). Dans le cas discret (voir [Bri] pour un résultat plus général dans cette direction) ou localement compact, la démonstration en est très facile. Ce résultat (notamment utilisé dans la preuve du théorème 1) permet par exemple de montrer le corollaire intéressant suivant.

On dit qu'un groupe abstrait Γ est de *génération bornée* par rapport à une de ses parties finies F s'il existe un entier k tel que pour tout élément γ de Γ , il existe des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de F et des entiers n_1, \dots, n_k tels que $\gamma = \gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_k^{n_k}$. Par exemple (voir [CaKe]), pour $n \geq 3$, le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est de génération bornée par rapport à la partie finie F formée des matrices unipotentes élémentaires. Ces matrices sont de plus des éléments γ de Γ de *longueur stable nulle*, c'est-à-dire que pour une (toute) longueur des mots $\|\cdot\|$ sur Γ , on a $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\gamma^m\|/m = 0$ (voir par exemple [LMR]).

Corollaire 3 *Soit Γ un groupe de génération bornée par rapport à une de ses parties finies F formée d'éléments de longueur stable nulle de Γ . Si Γ agit par automorphismes sur un immeuble affine Δ , alors Γ admet un point fixe global dans le complété de Δ .*

Preuve. Le théorème 2 ci-dessus entraîne qu'un élément γ de longueur stable nulle de Γ admet nécessairement un point fixe dans le complété $\overline{\Delta}$ de Δ . En effet, il existe un point x dans $\overline{\Delta}$ tel que $d(x, \gamma^m x) = md(x, \gamma x)$, or $d(x, \gamma^m x) \leq \|\gamma^m\|_S \sup_{s \in S} d(x, sx)$ (où S est une partie génératrice finie quelconque de Γ et $\|\cdot\|_S$ la longueur des mots associée), dont on déduit, en passant à la limite quand m tend vers l'infini, que $d(x, \gamma x) = 0$.

Les éléments de F ont donc chacun un point fixe dans $\overline{\Delta}$. Il est alors facile de voir en utilisant la propriété de génération bornée que les orbites de Γ dans l'espace métrique CAT(0) complet $\overline{\Delta}$ sont bornées, donc que Γ admet un point fixe global. \square

Corollaire 4 *Soient \mathbb{F} un corps valué et \mathcal{O} son anneau de valuation. Soient n et m deux entiers non nuls, avec $n \geq 3$. Soit ρ une représentation de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{F})$. Alors $\rho(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}))$ est un sous-groupe borné de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{F})$, et dans le cas où l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{F})$ est complet, $\rho(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}))$ est conjugué dans $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$.* \square

Ce résultat est dû à Margulis dans le cas où le corps \mathbb{F} est localement compact. Il est par ailleurs bien connu que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur des arbres sans point fixe global, donc l'hypothèse $n \geq 3$ est nécessaire.

Le corollaire suivant montre un exemple d'application du théorème 1 (dans le cas où $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 3$, on retrouve, en bien plus faible, le résultat de super-rigidité bien connu).

Corollaire 5 *Soit Γ un groupe de génération bornée par rapport à une de ses parties finies F formée d'éléments de longueur stable nulle de Γ . On suppose que Γ n'a pas de sous-groupe d'indice fini possédant un sous-groupe abélien distingué non trivial. Soit G un groupe de Lie semisimple réel, connexe, sans facteur compact, de centre fini.*

L'espace des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G , modulo conjugaison, est compact dès qu'il est séparé. \square

Les actions de Γ sur des immeubles affines impliquées dans le théorème 1 proviennent en fait, d'après une communication orale de B. Leeb, de représentations de Γ dans le groupe linéaire $SL_n(\mathbb{K}_\omega)$, agissant sur l'immeuble de Bruhat-Tits associé, où \mathbb{K}_ω est un corps valué *ad hoc*, construit en utilisant un ultrafiltre ω , qui n'est ni localement compact, ni à valuation discrète. On montre en effet, en suivant les indications de B. Leeb, qu'un cône asymptotique de l'espace symétrique de type non compact associé à $SL_n(\mathbb{R})$ est l'immeuble de Bruhat-Tits associé à $SL_n(\mathbb{K}_\omega)$ (voir section IV.2). Cette démonstration utilise le modèle des normes ultramétriques pour l'immeuble de Bruhat-Tits Δ associé au groupe $GL_n(\mathbb{F})$, où F est un corps valué quelconque, qu'on expose préalablement en détail (section III.1).

La construction usuelle de l'immeuble de $GL_n(\mathbb{F})$ dans le cas où la valuation est discrète (voir [Ser] pour $n = 2$, et par exemple [Ste] pour $n > 2$) s'appuie fortement sur sa structure de complexe simplicial, dont les sommets s'identifient aux classes d'homothétie de réseaux de \mathbb{F}^n . Elle n'est donc pas valable pour une valuation non discrète.

L'approche par les normes ultramétriques sur l'espace vectoriel \mathbb{F}^n permet d'unifier les cas où la valuation est discrète, dense, ou surjective et de donner un modèle concret pour l'immeuble de Bruhat-Tits de $GL_n(\mathbb{F})$. Elle met également en valeur l'analogie avec l'espace symétrique de type non compact associé à $SL_n(\mathbb{R})$, qui peut être vu comme l'espace des normes euclidiennes de volume 1 sur \mathbb{R}^n . La construction de cet espace est due dans le cas localement compact à [GoIw] (voir aussi [Ger]), mais leurs outils ne s'adaptent pas au cas général. Bruhat et Tits ont vérifié dans [BrTi2], dans le cas général (et pour tous les groupes classiques), que cet espace est isomorphe à l'immeuble de Bruhat-Tits introduit dans [BrTi1]. Ici, on a tenté de vérifier les axiomes des immeubles affines de la manière la plus directe et élémentaire possible.

Le résultat suivant, généralisant partiellement un théorème bien connu pour les arbres réels (cas où $n = 2$) (dû à Serre [Ser] dans le cas des arbres discrets, et à Morgan-Shalen ([MoSh]) dans le cas des arbres réels) et démontré en section III.3, entraîne que, pour une action de Γ sur l'immeuble affine classique de $GL_n(\mathbb{F})$, le spectre marqué des vecteurs de translation est nul si et seulement si l'action admet un point fixe global dans le complété.

Théorème 6 *Soit n un entier non nul et \mathbb{F} un corps valué. Soit Δ l'immeuble de Bruhat-Tits associé à $G = GL_n(\mathbb{F})$. Soit Γ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F})$, tel que*

1. *Le groupe Γ est engendré par une partie S telle que $S.x \subset \Delta$ est bornée pour un (tout) point x de Δ (par exemple S finie ou compacte).*
2. *La longueur minimale de translation est bornée sur Γ .*

Alors Γ admet un point fixe global dans le complété $\overline{\Delta}$ de Δ .

La condition 2, en apparence plus faible, est satisfaite si tout élément de Γ fixe un point de $\overline{\Delta}$, et seulement dans ce cas par le théorème 2 ci-dessus.

Par le biais des relations entre la norme d'endomorphisme d'un élément g de $GL_n(\mathbb{F})$ et la distance dans Δ entre un point et son image par g , on peut traduire cet énoncé en termes, plus algébriques, de sous-groupes de $GL_n(\mathbb{F})$ bornés (modulo le centre de $GL_n(\mathbb{F})$).

Pour n quelconque, des cas particuliers de cet énoncé (sous forme algébrique) étaient déjà connus (voir [Bass] si Γ est absolument irréductible et [Ben] si l'adhérence de Zariski de Γ est réductive).

La démonstration utilise un mélange des techniques algébriques classiques, reposant sur le lemme de Burnside (voir par exemple [Bass]), et des propriétés CAT(0) qui relient sous-groupes bornés et stabilisateurs des normes ultramétriques sur \mathbb{F}^n .

En particulier, si Δ est complet (par exemple si la valuation est discrète), on a alors (en notant \mathcal{O} l'anneau de valuation de \mathbb{F}) : un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ dont chaque élément est conjugué à un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

Dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$, H. Glöckner et G. A. Willis ont montré (cf. [GW, Conjecture 1.1 et Theorem 3.5]) que ce résultat entraîne le corollaire suivant. Un groupe topologique totalement discontinu, localement compact, est *unisculaire* si tout élément normalise un sous-groupe compact ouvert, et *pro-discret* si tout voisinage de l'identité contient un sous-groupe compact ouvert distingué.

Corollaire 7 *Tout groupe de Lie p -adique unisculaire engendré par un compact est pro-discret.*

Une partie des résultats ci-dessus (les fondements sur les immeubles affines, le théorème 2 de semi-simplicité des isométries d'un immeuble affine, le théorème 6 sur les sous-groupes purement elliptiques des groupes linéaires sur un corps valué) a fait l'objet de prépublications [Par1], [Par2].

Chapitre I

Préliminaires.

I.1 Espaces métriques CAT(0).

On trouvera par exemple dans [BrHa] les démonstrations des quelques définitions et résultats relatifs à la notion d'espace métrique CAT(0) rappelés ci-dessous.

Soient X un espace métrique géodésique et x, y, z trois points de X . Un *triangle de comparaison* euclidien est un triplet $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de points du plan euclidien tel que $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$ et de même par permutations de x, y, z . L'*angle de comparaison* $\tilde{\sphericalangle}_x(y, z)$ en x entre y et z est par définition l'angle euclidien $\sphericalangle_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z})$ en \bar{x} entre \bar{y} et \bar{z} .

Définition I.1.1 *Un espace métrique géodésique X est dit CAT(0) si ses triangles sont plus fins que les triangles euclidiens correspondants dans le sens précis suivant. Soient x, y, z trois points de X , et $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ un triangle de comparaison. Alors, pour tout point p de toute géodésique entre x et y , on a $d(p, z) \leq d(\bar{p}, \bar{z})$ où \bar{p} est le point du segment $[\bar{x}, \bar{y}]$ tel que $d(\bar{x}, \bar{p}) = d(x, p)$.*

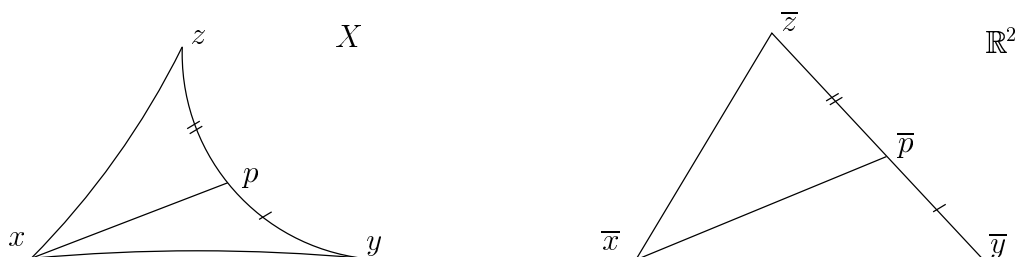


FIG. I.1 – *Comparaison des triangles dans X et \mathbb{R}^2 .*

Par exemple, les variétés riemanniennes complètes à courbure sectionnelle négative ou nulle sont des espace métriques CAT(0). Celles-ci possèdent la propriété particulière supplémentaire que deux géodésiques qui coïncident sur un segment non trivial sont égales. On verra au chapitre II une autre catégorie d'espace métriques CAT(0), les immeubles affines, pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée.

Soit X un espace métrique CAT(0). Pour tous x, y dans X , il existe un unique segment géodésique allant de x à y dans X , qu'on notera $[x, y]$. Une partie C de X est *convexe* si tout segment géodésique joignant deux points de C est inclus dans C . La distance d est une fonction convexe, c'est-à-dire que si σ et σ' sont deux géodésiques de X alors $d(\sigma(t), \sigma'(t))$ est une fonction convexe de t . Les boules pour la distance d sont des parties convexes de X .

Soit x, y, z trois points de X . Si y' et z' sont deux points respectifs des segments $[x, y]$ et $[x, z]$, alors l'angle de comparaison $\tilde{\sphericalangle}_x(y', z')$ est inférieur ou égal à l'angle de comparaison $\tilde{\sphericalangle}_x(y, z)$. Sa limite quand y' et z' tendent vers x est appelé *angle* en x entre y et z et notée $\sphericalangle_x(y, z)$. On a

$$\sphericalangle_x(y, z) \leq \tilde{\sphericalangle}_x(y, z),$$

et, dans le cas d'égalité, les trois points bordent un triangle plat, i.e. il existe une isométrie de l'intérieur dans \mathbb{R}^2 du triangle de comparaison, à valeurs dans X , envoyant chaque sommet sur le point correspondant. Pour tous x, y, z, p dans X , on a

$$\sphericalangle_x(y, z) \leq \sphericalangle_x(y, p) + \sphericalangle_x(p, z).$$

L'espace des classes d'équivalence de segments géodésiques issus de x formant un angle nul en x est appelé l'*espace des directions en x* de X et noté $\delta_x X$. Il est muni de la distance angulaire induite par l'angle en x .

Soit g une isométrie de X . On appelle *longueur (minimale) de translation* de g et on note $\ell(g)$ le réel positif ou nul

$$\ell(g) = \inf_{x \in X} d(x, gx).$$

La fonction de déplacement $d_g : x \in \Delta \mapsto d(x, gx)$ est convexe. On appelle *ensemble de déplacement minimal* de g et on note $\text{Min}(g)$ le convexe fermé (éventuellement vide) formé des points x de X tels que $d(x, gx) = \ell(g)$. On dit que g est *semi-simple* si $\text{Min}(g)$ est non vide, *parabolique* sinon. Dans le premier cas, g fixe un point (est *elliptique*) si $\ell(g) = 0$ ou translate une géodésique (est *axiale*) si $\ell(g) > 0$. Dans ce dernier cas, $\text{Min}(g)$ est la réunion des géodésiques translatées par g , et est isométrique à un produit $C \times \mathbb{R}$, où C est un convexe fermé de X et g agit sur $C \times \mathbb{R}$ comme $(\text{id}, s \mapsto s + \ell(g))$.

Le groupe des isométries de X est muni de la topologie compacte-ouverte. La longueur de translation est semicontinue, i.e. si $(g_k)_k$ est une suite convergente dans $\text{Isom}(X)$, de limite g , alors $\limsup_k \ell(g_k) \leq \ell(g)$.

L'espace des classes d'équivalence de rayons géodésiques *asymptotes* (i.e. à distance de Hausdorff finie) est appelé le *bord (à l'infini)* de X et noté $\partial_\infty X$. On le munit de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte. L'espace $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ est muni de la *topologie des cônes*, qui étend celle de X . Si X est localement compact, alors $\partial_\infty X$ et \overline{X} sont compacts.

On notera $r(\infty)$ le point du bord défini par un rayon géodésique r , qu'on appellera l'*extrémité* de r .

L'action du groupe des isométries de X s'étend continûment en une action continue sur le bord à l'infini de X . Si G est un groupe agissant par isométries sur X , on appellera le stabilisateur dans G d'un point du bord à l'infini de X un sous-groupe *parabolique* de

G. Si r et r' sont deux rayons géodésiques asymptotes, alors $d(r(t), r'(t))$ est une fonction décroissante de t .

On suppose désormais que X est complet.

Pour tout point ξ dans le bord de X et tout point x dans X , il existe alors un unique rayon géodésique r issu de x tel que $r(\infty) = \xi$. L'angle $\sphericalangle_x(\xi, \xi')$ en $x \in X$ entre deux points ξ et ξ' de $\partial_\infty X$ est par définition l'angle en x entre les deux rayons géodésiques issus de x d'extrémités respectives ξ et ξ' . Si x, y sont dans X et z est dans $X \cup \partial_\infty X$, alors la somme des angles du triangle x, y, z est inférieure ou égale à π (en notant $\sphericalangle_z(x, y) = 0$ si $z \in \partial_\infty X$). Dans le cas d'égalité, les trois points bordent une région isométrique à un triangle euclidien (qui devient une bande plate si $z \in \partial_\infty X$).

Soient x dans X et r, r' deux rayons géodésiques issus de X . L'angle de comparaison $\tilde{\sphericalangle}_x(r(t), r'(t))$ est une fonction croissante de t , et sa limite quand t tend vers l'infini ne dépend que des points $\xi = r(\infty)$ et $\xi' = r'(\infty)$ de $\partial_\infty X$. On l'appelle l'*angle de Tits* entre ξ et ξ' et on la note $\sphericalangle_T(\xi, \xi')$. On a

$$\sphericalangle_T(\xi, \xi') = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sphericalangle_{r(t)}(\xi, \xi')$$

pour tout rayon r représentant ξ (ou ξ'), et

$$\sphericalangle_T(\xi, \xi') = \sup_{x \in X} \sphericalangle_x(\xi, \xi').$$

Si cet angle est égal à π , on dit que les points ξ et ξ' sont *opposés*.

Proposition I.1.2 (Semicontinuité de l'angle de comparaison) *Soit x un point de X , et $(y_k), (z_k)$ deux suites dans X convergeant respectivement (pour la topologie des cônes) vers ξ et ξ' dans le bord de X . Alors*

$$\liminf \tilde{\sphericalangle}_x(y_k, z_k) \geq \sphericalangle_T(\xi, \xi')$$

(voir par exemple [BrHa], ou encore [KlLe, Lemma 2.3.1]). □

Si g est une isométrie de X qui fixe deux points du bord opposés ξ^+ et ξ^- , alors g préserve le convexe fermé $F = F_{\xi^-, \xi^+}$ formé par la réunion des géodésiques de ξ^- à ξ^+ , qui est isométrique au produit $C \times \mathbb{R}$, où C est un convexe fermé de X . En restriction à $C \times \mathbb{R}$, on a $g = (g', t)$ (où t désigne la translation $s \mapsto s + t$ de \mathbb{R}). On a alors $\ell(g) = \inf_{x \in F} d_g(x) = \sqrt{\ell(g')^2 + t^2}$.

Proposition I.1.3 (Points fixes à l'infini d'une isométrie axiale) *Soit g une isométrie de X translatant une géodésique r . Notons ξ^- et ξ^+ les extrémités respectives de r en $-\infty$ et $+\infty$. Si g fixe un point z du bord de X , alors $\sphericalangle_T(\xi^-, z) + \sphericalangle_T(z, \xi^+) = \pi$. En particulier, si z est opposé à ξ^- , alors $z = \xi^+$.*

Preuve. L'angle de Tits entre ξ^- et z est égal à la limite de l'angle $\sphericalangle_{r(t)}(\xi^-, z)$ quand t tend vers $-\infty$. Or $\sphericalangle_{r(t-n\ell(g))}(\xi^-, z) = \sphericalangle_{r(t)}(\xi^-, z)$ pour tout réel t et entier n (car g^n fixe ξ^- et z et envoie $r(t)$ sur $r(t - n\ell(g))$), donc $\sphericalangle_T(\xi^-, z) = \sphericalangle_{r(t)}(\xi^-, z)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même, on a $\sphericalangle_T(z, \xi^+) = \sphericalangle_{r(t)}(z, \xi^+)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t , on a $\sphericalangle_{r(t)}(\xi^-, z) + \sphericalangle_{r(t)}(z, \xi^+) \geq$

$\angle_{r(t)}(\xi^-, \xi^+) = \pi$ d'une part, et $\angle_{r(t)}(z, r(t + \ell(g))) + \angle_{r(t+\ell(g))}(r(t), z) \leq \pi$ d'autre part (car les trois points $r(t)$, $r(t + \ell(g))$ et z forment un triangle avec le sommet z à l'infini). Comme $\angle_{r(t)}(z, r(t + \ell(g))) = \angle_{r(t)}(z, \xi^+)$ et $\angle_{r(t+\ell(g))}(r(t), z) = \angle_{r(t+\ell(g))}(\xi^-, z) = \angle_{r(t)}(\xi^-, z)$, on en conclut que $\angle_T(\xi^-, z) + \angle_T(z, \xi^+) = \pi$. \square

Soit C un convexe fermé non vide de X . Pour tout point x dans X , il existe un unique point $p_C(x)$ de C à distance minimale de x , appelé *projection orthogonale* de x sur C . C'est également l'unique point de C tel que pour tout y de C différent de $p_C(x)$, on a $\angle_{p_C(x)}(x, y) \geq \frac{\pi}{2}$. La projection orthogonale p_C sur C diminue la distance. On utilisera dans la partie II.3 le fait bien connu suivant.

Proposition I.1.4 *Dans un espace CAT(0) complet, une intersection décroissante de convexes fermés bornés non vides est non vide.*

Preuve. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties convexes fermées bornées non vides de X . Soient x un point de X et y_n sa projection orthogonale sur B_n pour tout entier n . On va montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente car X est supposé complet, ce qui conclut, car sa limite est dans chaque B_n , donc dans leur intersection.

La distance de x à y_n est croissante, majorée, donc convergente de limite R , qu'on peut supposer non nulle car sinon $x \in B_n$ pour tout n et on a fini. Soient ε non nul, inférieur à R et N un entier tel que pour $n \geq N$, la distance $d(x, y_n)$ est comprise entre $R - \varepsilon$ et R . Soient $p \geq n \geq N$, alors $d(y_n, y_p) \leq \sqrt{R^2 - (R - \varepsilon)^2}$, car sinon il existe un point du segment $[y_n, y_p]$ plus proche de x que y_n (comme on le voit sur un triangle de comparaison), ce qui est impossible car le segment $[y_n, y_p]$ est inclus dans le convexe fermé B_n et y_n est le point de B_n à distance minimale de x . La suite (y_n) est donc une suite de Cauchy. \square

I.2 Espaces symétriques

On renvoie à [Hel] et [Ebe] pour la définition des espaces symétriques de type non-compact et les propriétés rappelées ci-dessous (voir aussi [Rag], [Mar], [BGS]).

On considère un groupe de Lie G semisimple réel, connexe, de centre fini, sans facteur compact. On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , qui est munie d'une forme bilinéaire canonique symétrique non dégénérée (la forme de Killing). On note \exp l'application exponentielle de \mathfrak{g} dans G .

Soit X l'espace symétrique de type non compact associé à G , et x_0 un point de X . Rappelons que X est une variété riemannienne (dont la métrique est bien définie modulo multiplication par une constante non nulle) complète simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle, donc en particulier un espace métrique CAT(0), munie d'une action transitive de G par isométries. Le centre de G agit trivialement.

Le stabilisateur K de x_0 dans G est un sous-groupe compact maximal de G . L'espace X s'identifie au quotient G/K , muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche par G . On note \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K .

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G relative au point x_0 . Les géodésiques de X d'origine x_0 sont de la forme $t \mapsto \exp(tv).x_0$, avec $v \in \mathfrak{p}$. Le sous-espace vectoriel \mathfrak{p} de \mathfrak{g} est ainsi isomorphe à l'espace tangent à X en x_0 , et la restriction de

la forme bilinéaire symétrique de \mathfrak{g} à \mathfrak{p} est définie positive et induit le produit scalaire de $T_{x_0}X$.

On notera E_n l'espace symétrique de type non compact associé à $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, et on choisira alors x_0 tel que son stabilisateur K soit le sous-groupe compact maximal $\mathrm{SO}(n)$ des matrices orthogonales de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Les algèbres de Lie respectives $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(n)$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont respectivement formées par les matrices de trace nulle et les matrices anti-symétriques. Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{p} \simeq T_{x_0}X$ est égal au sous-espace vectoriel sym_n des matrices symétriques de trace nulle, muni du produit scalaire canonique (bien défini modulo multiplication par une constante) $X, Y \mapsto n\mathrm{Trace}(XY)$. L'espace E_n s'identifie via l'application exponentielle à l'ensemble des matrices symétriques définies positives de déterminant 1, sur lequel G agit par $g.M = gM^t g$ pour $g \in G$ et M symétrique définie positive, de déterminant 1 (on a alors $x_0 = I$).

Un *plat* de X est un sous-espace totalement géodésique euclidien. Le groupe G agit transitivement sur les plats maximaux (pour l'inclusion) pointés, qui sont en particulier tous de même dimension, appelée le *rang* de X .

Un rayon géodésique issu de x_0 est dit *régulier* s'il est contenu dans un unique plat maximal, *singulier* sinon.

Soit \mathbb{A} un sous-espace de Cartan de \mathfrak{g} , relativement au point x_0 , c'est-à-dire une sous-algèbre abélienne maximale incluse dans \mathfrak{p} . Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ on prendra pour \mathbb{A} le sous-espace \mathfrak{d} des matrices diagonales de trace nulle, qu'on identifiera souvent à l'hyperplan de \mathbb{R}^n formé par les vecteurs de somme des coordonnées nulle.

La représentation adjointe permet de se ramener, modulo le centre de G , au cas où G est un sous-groupe fermé auto-adjoint de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. L'espace X s'identifie alors (quitte à multiplier éventuellement la métrique par une constante sur chaque facteur de de Rham de X) à l'orbite du point $x_0 = I$ par G , qui est un sous-espace totalement géodésique de E_n . On a alors $K = \mathrm{SO}(n) \cap G$. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est alors une sous-algèbre autoadjointe de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, l'algèbre de Lie \mathfrak{k} de K est égale à $\mathfrak{so}(n) \cap \mathfrak{g}$, et \mathfrak{p} est égal à $\mathrm{sym}_n \cap \mathfrak{g}$. On peut de plus supposer que $\mathbb{A} = \mathfrak{d} \cap \mathfrak{g}$.

Un *plat maximal marqué* de X est une application de \mathbb{A} dans X de la forme $v \mapsto g \exp(v).x_0$, avec g dans G fixé. C'est une isométrie de \mathbb{A} (pour le produit scalaire induit par celui de $\mathfrak{p} \simeq T_{x_0}X$) sur un plat maximal de X .

Un vecteur v non nul de \mathbb{A} est dit *régulier* (resp. *singulier*) si, pour un (tout) plat maximal marqué f , la géodésique $t \mapsto f(tv)$ l'est. Le vecteur nul est singulier par convention.

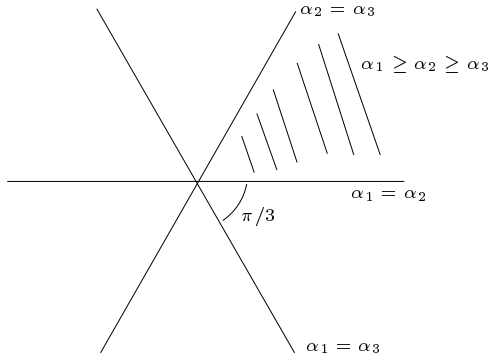
Les vecteurs singuliers de \mathbb{A} forment une réunion finie d'hyperplans, appelés *murs*. Les composantes connexes du complémentaire (l'ensemble des vecteurs réguliers) sont des cônes polyédraux convexes appelées *chambres de Weyl (ouvertes)* de \mathbb{A} . Les chambres de Weyl (ouvertes) de X sont les images des chambres de Weyl de \mathbb{A} par les plats maximaux marqués (de *sommet* l'image de 0). Les chambres de Weyl *fermées* sont les adhérences des chambres de Weyl ouvertes.

Le *groupe de Weyl* \overline{W} associé à \mathbb{A} est le groupe d'isométries vectorielles de \mathbb{A} induit par le stabilisateur dans G du plat pointé $(f(\mathbb{A}), f(0))$ pour un (tout) plat maximal marqué f . C'est le groupe engendré par les réflexions par rapport aux murs de \mathbb{A} . Il agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de \mathbb{A} . Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, les vecteurs

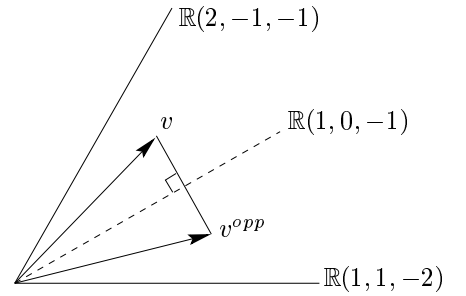
réguliers sont les vecteurs de coordonnées deux à deux distinctes, les murs sont les hyperplans donnés par les conditions $\alpha_i = \alpha_j$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts, et le groupe \overline{W} s'identifie au groupe des isométries de \mathbb{A} induites par les permutations des coordonnées de \mathbb{R}^n .

On fixe dorénavant une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathbb{A} , dite *fondamentale*. C'est un domaine fondamental strict pour l'action du groupe de Weyl \overline{W} sur \mathbb{A} . On note Θ la projection de \mathbb{A} dans $\overline{\mathcal{C}}$ correspondante, qui à un vecteur dans \mathbb{A} associe son *type* dans $\overline{\mathcal{C}}$. L'isométrie de $\overline{\mathcal{C}}$ dans elle-même qui à un vecteur v associe le type *opposé* $v^{opp} = \Theta(-v)$ est appelée l'*involution d'opposition* de $\overline{\mathcal{C}}$.

Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on prendra pour chambre de Weyl fermée fondamentale $\overline{\mathcal{C}}$ l'ensemble \mathbf{d}^+ des vecteurs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de \mathbb{A} tels que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$. On a alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{opp} = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1)$ pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans \mathbf{d}^+ .



Murs et chambres dans le plan $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.



L'involution d'opposition.

FIG. I.2 – Cas où $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Si p et q sont deux points de X , il existe un unique vecteur de $\overline{\mathcal{C}}$, appelé le *type* du segment $[p, q]$ et noté $\Theta(p, q)$ tel qu'il existe un plat maximal marqué f avec $f(0) = p$ et $f(\Theta(p, q)) = q$. Notons que, pour g dans G , le vecteur $\Theta(x_0, gx_0)$ est le logarithme de la projection de Cartan de g . L'action du groupe G préserve le type des segments, et est transitive sur les segments de type donné. L'application Θ de $X \times X$ dans $\overline{\mathcal{C}}$ est continue.

Notons $\partial\overline{\mathcal{C}}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\overline{\mathcal{C}}$, qu'on identifiera à l'ensemble des demi-droites de $\overline{\mathcal{C}}$ (c'est l'ensemble noté Δ_{mod} dans [KILe]), et $\partial : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \partial\overline{\mathcal{C}}$ la projection correspondante. C'est un simplexe sphérique, muni de la distance angulaire.

Pour deux points δ, δ' dans $\partial\overline{\mathcal{C}}$, on note $D(\delta, \delta')$ l'ensemble fini des angles possibles entre deux vecteurs unitaires v et v' de \mathbb{A} de types respectifs δ et δ' .

Le *type (de direction)* d'une géodésique (ou d'un rayon) r est égal à $\partial\Theta(r(0), r(1))$. Deux géodésiques parallèles ont même type. L'action du groupe G préserve le type des géodésiques. Le stabilisateur dans G d'un point de X agit transitivement sur les géodésiques de type donné issues de ce point.

Deux rayons géodésiques asymptotes ont même type dans $\partial\overline{\mathcal{C}}$. On peut donc définir le type (noté également $\partial\Theta$) dans $\partial\overline{\mathcal{C}}$ des points du bord à l'infini de X . L'action de G sur le bord à l'infini préserve le type des points, et est transitive sur les points de type donné. L'orbite $G\xi$ d'un point du bord ξ de X par G , qui est donc égale à l'ensemble des points

du bord de type donné $\partial\Theta\xi$, s'identifie à la variété algébrique G/P , où P est le sous-groupe parabolique associé à ξ .

Le bord à l'infini de X , muni de la distance donnée par l'angle de Tits, est isométrique à la réalisation géométrique d'un immeuble sphérique, dont les chambres sont les bords des chambres de Weyl de X , et les appartements les bords des plats maximaux de X .

Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, cet immeuble s'identifie à l'immeuble des drapeaux de \mathbb{R}^n . Un élément g de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ fixe un point à l'infini si et seulement s'il préserve un sous-espace vectoriel propre non trivial de \mathbb{R}^n .

Si ξ et ξ' sont deux points de $\partial_\infty X$, il existe par conséquent un plat maximal de X les contenant dans son bord à l'infini. Pour tout point p de ce plat, on a donc $\angle_T(\xi, \xi') = \angle_p(\xi, \xi')$, qui est nécessairement dans l'ensemble fini $D(\partial\Theta(\xi), \partial\Theta(\xi'))$. En particulier si $\angle_T(\xi, \xi') = \pi$, alors il existe une géodésique dans X allant de ξ à ξ' . Le groupe G agit donc transitivement sur les couples de points du bord opposés, de types donnés.

Fait I.2.1 Soit $\delta \in \partial\overline{\mathcal{C}}$ et δ^{opp} le type opposé. Pour tout M , il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout couple de points (ξ^-, ξ^+) de $\partial_\infty X$ avec $\partial\Theta(\xi^+) = \delta$ et $\partial\Theta(\xi^-) = \delta^{opp}$, pour tout p de X tel que $\angle_p(\xi^-, \xi^+) \geq \pi - \epsilon$ la distance de p à la réunion F_{ξ^-, ξ^+} des géodésiques de ξ^- à ξ^+ est inférieure ou égale à M .

Preuve. L'angle de Tits entre un point du bord de type δ et un point du bord de type δ_{opp} ne peut prendre qu'un ensemble fini de valeurs $D(\delta, \delta_{opp})$, comprenant π . Soit $\epsilon(\delta)$ tel que $\pi - \epsilon(\delta) = \max(D(\delta, \delta_{opp}) - \{\pi\})$. Alors pour tous ξ^+ de type δ et ξ^- de type opposé, s'il existe $x \in X$ tel que $\angle_x(\xi^-, \xi^+) > \pi - \epsilon(\delta)$, on a $\angle_T(\xi^-, \xi^+) = \pi$ et donc F_{ξ^-, ξ^+} est non vide.

Supposons que la propriété est fautive. Alors il existe $M > 0$, une suite de points p_i dans X , et deux suites de points ξ_i^+ de type δ et ξ_i^- de type δ_{opp} dans $\partial_\infty X$ tels que $\angle_{p_i}(\xi_i^-, \xi_i^+) \rightarrow \pi$ et $d(p_i, F_{\xi_i^-, \xi_i^+}) \geq M$. Pour i assez grand, $F_{\xi_i^-, \xi_i^+}$ est non vide. Soit q_i la projection orthogonale de p_i sur $F_{\xi_i^-, \xi_i^+}$. Quitte à appliquer des isométries, on peut supposer que q_i est une suite constante égale à q , ainsi que $\xi_i^- \equiv \xi^-$ et $\xi_i^+ \equiv \xi^+$. Si p_n reste à distance bornée de q , quitte à extraire $p_n \rightarrow p$ à distance $\geq M$ de F_{ξ^-, ξ^+} , avec $\angle_p(\xi^-, \xi^+) = \pi$, ce qui n'est pas possible. Sinon, comme on a $\angle_{p_n}(q, \xi^-) \leq \frac{\pi}{2}$ et $\angle_{p_n}(q, \xi^+) \leq \frac{\pi}{2}$ ces deux angles tendent vers $\frac{\pi}{2}$. Comme l'angle sous lequel sont vus q et ξ^+ croît de p_n à q , on choisit p'_i sur ce segment, restant à distance bornée supérieure à M de q et on aura $\angle_{p'_i}(q, \xi^+) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Quitte à extraire, $p'_i \rightarrow p'$ à distance supérieure à M de sa projection q sur F_{ξ^-, ξ^+} avec $\angle_{p'}(\xi^+, q) = \frac{\pi}{2}$, ce qui n'est pas possible. \square

Soit ξ un point dans le bord de X . Pour tout point p dans X , et pour tout réel positif D , on notera $O_\xi(p, D)$ l'ombre vue du point ξ de la boule de centre p et de rayon D , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités dans le bord de X des géodésiques issues de ξ et passant à distance inférieure ou égale à D de p .

Fait I.2.2 Soit ξ un point du bord de X et r une géodésique telle que $r(+\infty)$ est égal à ξ . Les ombres $O_-(t, D) = O_{r(-\infty)}(r(t), D)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $D > 0$, forment une base de voisinages de ξ dans son orbite $G\xi$. \square

Les éléments g de G de la forme $\exp v$, avec $v \in \mathfrak{g}$ conjugué dans \mathbb{A} , sont appelés des *transvections* (de type Θv). Pour v non nul, ce sont des isométries axiales translatant une

géodésique r de type $\partial\Theta v$, avec la propriété particulière suivante. L'ensemble de déplacement minimal $\text{Min}(g)$ de g est égal à la réunion de toutes les géodésiques parallèles à r (qui sont translatées par g). De plus, le centralisateur $Z(g)$ de g dans G agit transitivement sur $\text{Min}(g)$ (voir par exemple [Ebe, Prop. 4.1.4]).

Un élément g de G est semisimple (resp. elliptique) si et seulement si son image par la représentation adjointe (de G dans $\text{SL}_n(\mathfrak{g})$) est diagonalisable sur \mathbb{C} (resp. diagonalisable sur \mathbb{C} , à valeurs propres de module 1). On dit qu'un élément g de G est *unipotent* (resp. *hyperbolique*) si son image par la représentation adjointe a toutes ses valeurs propres égales à 1 (resp. est diagonalisable sur \mathbb{C} et à valeurs propres réelles positives). Les éléments hyperboliques de G sont exactement les transvections.

Soit g un élément de G . Il existe un unique triplet e, h, u dans G , appelé la *décomposition de Jordan* de g , tel que e, h et u sont respectivement elliptique, hyperbolique et unipotent, commutent deux à deux, et $g = hue$. On a alors

$$\ell(g) = \ell(h).$$

Proposition I.2.3 *Soit g dans G de longueur de translation $\ell(g)$ strictement positive. Il existe deux points opposés ξ^- et ξ^+ dans le bord à l'infini de X , fixés par g , tels que*

1. *Le sous-espace totalement géodésique $F_{\xi^-\xi^+}$ de X formé par la réunion des géodésiques allant de ξ^- à ξ^+ se décompose en un produit direct $C \times \mathbb{R}$, où C est un sous-espace totalement géodésique de X , et g agit sur $C \times \mathbb{R}$ comme $(\phi, \ell(g))$, où $\ell(g)$ désigne la translation $s \mapsto s + \ell(g)$ de \mathbb{R} , et $\phi \in \text{Isom}(C)$ est telle que $\ell(\phi) = 0$.*
2. *Pour tout point p dans X , on a $g^m p$ tend vers ξ^+ et $g^{-m} p$ tend vers ξ^- quand m tend vers l'infini.*
3. *Pour tout point p dans $F_{\xi^-\xi^+}$ et tout $D > 0$, pour tout voisinage V de ξ^+ dans $G\xi^+$, il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a*

$$g^n(\text{O}_-(p, D)) \subset V$$

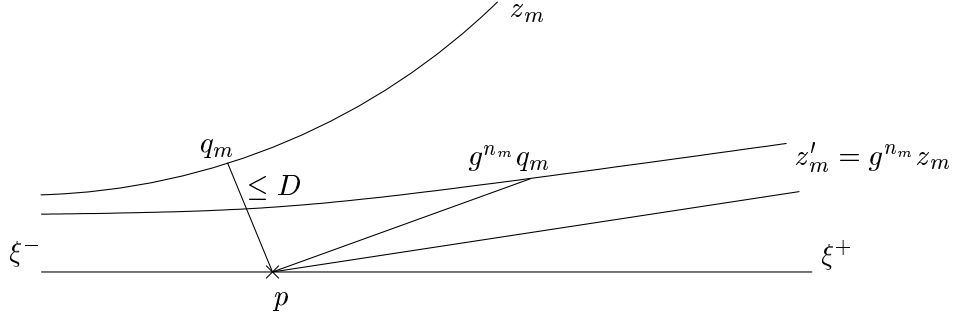
En particulier, ξ^+ est le seul point fixe de g opposé à ξ^- dans le bord de X .

Preuve. Soit h la composante hyperbolique dans la décomposition de Jordan de g , et ϕ le produit des composantes elliptique e et unipotente u . On a $\ell(\phi) = 0$, et h n'est pas l'identité. Soit $\xi^+ = r(+\infty)$ et $\xi^- = r(-\infty)$ pour une (toute) géodésique r translatée par h (avec $h \circ r : s \mapsto r(s + \ell(h))$). La réunion $F = F_{\xi^-\xi^+}$ des géodésiques allant de ξ^- à ξ^+ est égal à l'ensemble minimal de déplacement $\text{Min}(h)$ de h , qui est stabilisé par e et u . Il se décompose canoniquement en un produit $C \times \mathbb{R}$, où C est un sous-espace symétrique sans facteur compact de X , avec $h = (\text{id}, \ell(h))$ et $\phi = (\phi', t)$ en restriction à F (car ϕ commute avec h , donc préserve la décomposition). On a $\ell(\phi) = \sqrt{\ell(\phi')^2 + t^2} = 0$ donc $t = 0$ et $\phi' = \phi$ sur C . On a $g = (\phi, \ell(h))$ sur F .

La deuxième affirmation est vraie pour tout p si et seulement si elle est vérifiée pour un point de X . On choisit p dans $F \cap \text{Min}(e)$, qui est non vide (car comme e stabilise F , la projection sur F d'un point fixe de e est encore un point fixe de e). Soit r la géodésique translatée par h d'origine p .

Comme u est unipotente, la distance $d(h^m p, g^m p) = d(p, u^m p)$ est de l'ordre de $\log m$ (voir par exemple [LMR]). Or $h^m p = r(m\ell(h))$, donc la suite $g^m p$ tend vers ξ^+ , car $\frac{d(g^m p, r(m\ell(h)))}{m\ell(h)}$ tend vers 0.

Montrons maintenant la dernière affirmation. Soit $p \in F_{\xi^-\xi^+}$ et $D > 0$. Soit V un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G\xi^+$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(z_m)_m$ dans $O_-(p, D)$ et une suite croissante $(n_m)_m$ d'entiers avec $z'_m = g^{n_m} z_m \notin V$ pour tout k . Soit q_m dans $F_{\xi^- z_m}$ tel que $d(p, q_m) \leq D$.



D'après l'assertion 2, la suite $g^{n_m} p$ tend vers ξ^+ . Comme $d(g^{n_m} q_m, g^{n_m} p) \leq D$, la suite $g^{n_m} q_m$ tend également vers ξ^+ , et donc l'angle $\sphericalangle_p(\xi^+, g^{n_m} q_m)$ tend vers 0.

Comme la suite $g^{n_m} q_m$ tend vers ξ^+ , l'angle $\sphericalangle_p(\xi^-, g^{n_m} q_m)$ tend vers π .

Par les propriétés des angles dans un espace CAT(0), on en déduit que l'angle $\sphericalangle_{g^{n_m} q_m}(p, \xi^-)$ tend vers 0, puis que l'angle $\sphericalangle_{g^{n_m} q_m}(p, z'_m)$ tend vers π (car $\sphericalangle_{g^{n_m} q_m}(\xi^-, z'_m) = \pi$), puis que l'angle $\sphericalangle_p(g^{n_m} q_m, z'_m)$ tend vers 0.

Comme, par l'inégalité triangulaire, l'angle $\sphericalangle_p(\xi^+, z'_m)$ est inférieur à la somme des deux angles $\sphericalangle_p(\xi^+, g^{n_m} q_m)$ et $\sphericalangle_p(g^{n_m} q_m, z'_m)$, qui tendent vers 0 par ce qui précède, le point z'_m tend vers ξ^+ , ce qui contredit l'hypothèse. \square

I.3 Modèle des normes euclidiennes pour E_n .

Une norme ν sur \mathbb{R}^n est dite *euclidienne* si elle est de la forme $v \mapsto \sqrt{q(v)}$, où q est une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n . Rappelons qu'une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n est *orthogonale* pour ν si on a $\nu(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ pour tous x_1, \dots, x_n dans \mathbb{R} . On dit que ν est de *volume* 1 si pour toute base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n orthogonale pour ν , de déterminant 1, on a $\prod_{i=1}^n \nu(e_i) = 1$.

Soit E_n l'espace symétrique de type non compact associé à $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. On identifie E_n à l'espace des normes euclidiennes de volume 1 sur \mathbb{R}^n , par la bijection qui à une matrice A symétrique définie positive dans $M_n(\mathbb{R})$, de déterminant 1, associe la norme euclidienne $v \mapsto \sqrt{vAv}$ sur \mathbb{R}^n correspondant à la forme quadratique définie positive de matrice A dans la base canonique.

La distance d et l'action de G correspondantes sur l'espace des normes euclidiennes de volume 1 sont les suivantes. Si ν et ν' sont deux telles normes, alors $d(\nu, \nu') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\log \frac{\nu'}{\nu}(e_i)|^2}$,

où (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n orthogonale pour ν et ν' (qui existe car deux formes quadratiques définies positives sur \mathbb{R}^n admettent toujours une base orthogonale commune). Le groupe G agit par $g.\nu = \nu \circ g^{-1}$ pour $g \in G$ et ν une norme euclidienne de volume 1 sur \mathbb{R}^n .

Ce modèle de E_n est moins standard, mais pratique, et particulièrement bien adapté au passage au cône asymptotique (voir section IV.2).

Notons d_∞ la distance sur E_n donnée par $d_\infty(\nu, \nu') = \sup_{v \in \mathbb{R}^{n*}} \left| \log \frac{\nu'}{\nu}(v) \right|$ pour tous ν, ν' dans E_n .

On voit facilement que pour ν, ν' dans X et (e_1, \dots, e_n) une base de \mathbb{R}^n orthogonale commune, on a

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^{n*}} \frac{\nu'}{\nu}(v) = \sup_{i=1 \dots n} \frac{\nu'}{\nu}(e_i) \quad (\text{I.1})$$

et

$$d_\infty(\nu, \nu') = \sup_{i=1 \dots n} \left| \log \frac{\nu'}{\nu}(e_i) \right| \quad (\text{I.2})$$

Remarquons qu'en particulier, on a

$$d_\infty(\nu, \nu') \leq (n-1) \sup_{v \in \mathbb{R}^{n*}} \log \frac{\nu'}{\nu}(v) \quad (\text{I.3})$$

car, comme les normes sont de volume 1, on a $\sum_{i=1}^n \log \frac{\nu'}{\nu}(e_i) = 0$, et donc $\sup_{i=1 \dots n} \left| \log \frac{\nu'}{\nu}(e_i) \right| \leq (n-1) \sup_{i=1 \dots n} \log \frac{\nu'}{\nu}(e_i)$.

On déduit de la formule I.2 que

$$d_\infty \leq d \leq \sqrt{n} d_\infty \quad \text{sur } E_n \quad (\text{I.4})$$

Les deux distances d et d_∞ sont donc équivalentes.

Le point base x_0 est la norme euclidienne canonique ν_0 de \mathbb{R}^n . Soit N la norme canonique sur les endomorphismes de \mathbb{R}^n associée à ν_0 . Pour tout $g \in G$, on a $\sup_{v \in \mathbb{R}^{n*}} \frac{g.\nu_0}{\nu_0}(v) = N(g^{-1})$ et donc

$$d_\infty(\nu_0, g.\nu_0) = \max \{ \log N(g), \log N(g^{-1}) \} \leq (n-1) \log N(g) \quad (\text{I.5})$$

Le lemme suivant sera utilisé dans la démonstration du théorème IV.2.2.

Lemme I.3.1 *Soit ν une norme euclidienne de volume 1 sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n orthonormée pour ν . Alors*

$$\sup_{i=1 \dots n} \log \nu_0(e_i) \leq d(\nu_0, \nu) \leq \sqrt{n}(n-1) \left(\sup_{i=1 \dots n} \log \nu_0(e_i) + \log n \right)$$

Preuve. Pour $i = 1 \dots n$, on a $\log \nu_0(e_i) = \log \frac{\nu_0}{\nu}(e_i) \leq d_\infty(\nu_0, \nu) \leq d(\nu_0, \nu)$. Pour tous x_1, \dots, x_n dans \mathbb{R} on a, en notant $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\nu_0(v) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \nu_0(e_i) \leq n \sup_{i=1 \dots n} |x_i| \sup_{i=1 \dots n} \nu_0(e_i) \leq n \nu(v) \sup_{i=1 \dots n} \nu_0(e_i)$$

donc $\sup_{v \in \mathbb{R}^{n*}} \log \frac{\nu_0(v)}{\nu(v)} \leq \sup \log \nu_0(e_i) + \log n$. Or on a $d_\infty(\nu_0, \nu) \leq (n-1) \sup_{v \in \mathbb{R}^{n*}} \log \frac{\nu_0(v)}{\nu(v)}$ (par la formule I.3), ce qui conclut (car $d \leq \sqrt{n} d_\infty$ sur E_n par la formule I.4). \square

Rappelons que \mathbb{A} est identifié à l'hyperplan de \mathbb{R}^n formé par les vecteurs de somme des coordonnées nulle. Le plat maximal marqué $f_{\mathcal{E}}$ de E_n associé à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n est l'application de \mathbb{A} dans E_n qui à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ associe la (seule) norme euclidienne sur \mathbb{R}^n admettant \mathcal{E} pour base orthogonale et valant $e^{-\alpha_i}$ sur e_i (qui est bien de volume 1). Pour toute base \mathcal{E} de déterminant 1 de \mathbb{R}^n et tout g dans G , on a $g \circ f_{\mathcal{E}} = f_{g\mathcal{E}}$. Tous les plats maximaux marqués de E_n sont donc de cette forme, par transitivité de l'action de G sur les plats maximaux marqués.

Chapitre II

Immeubles affines

II.1 Définitions et caractérisations.

Dans cette section, nous allons tout d'abord définir les immeubles affines, puis établir un certain nombre de leurs propriétés fondamentales, qu'on peut utiliser pour les caractériser. Cette section est organisée dans le but de démontrer le théorème II.1.22, qui donne différentes caractérisations des immeubles affines, qui seront utilisées dans la suite. On utilisera sans démonstration les propriétés classiques des groupes de réflexions finis et systèmes de Coxeter (voir par exemple [Bou3]), ainsi que des immeubles sphériques (voir par exemple [Bro], [Ron]).

II.1.1 La structure modèle.

On renvoie par exemple à [Bro, Chapter 1] pour les définitions et résultats énoncés ci-dessous.

Soit \mathbb{A} un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Un *groupe de réflexions fini* est un sous-groupe fini \overline{W} d'isométries vectorielles de \mathbb{A} , engendré par des réflexions. On appellera parfois également la paire $(\mathbb{A}, \overline{W})$ un *groupe de réflexions fini*, quand il est nécessaire d'explicitier l'espace vectoriel euclidien \mathbb{A} sous-jacent, et on dira qu'il est *trivial* si le groupe \overline{W} est réduit à l'identité.

Soient $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$ des groupes de réflexions finis. Le produit direct $\overline{W}_1 \times \overline{W}_2$ agissant canoniquement sur la somme directe orthogonale $\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$ est un groupe de réflexions fini. On dit qu'un groupe de réflexions fini est *irréductible* s'il n'est pas trivial et ne se décompose pas en produit de groupes de réflexions finis comme ci-dessus. Un groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ admet une décomposition canonique en un produit $(\mathbb{A}, \overline{W}) = (\mathbb{A}_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}_m, \overline{W}_0 \times \dots \times \overline{W}_m)$ de groupes de réflexions finis où $(\mathbb{A}_i, \overline{W}_i)$ est trivial pour $i = 0$ et irréductible pour $i > 0$.

On se fixe désormais un espace vectoriel euclidien \mathbb{A} de dimension finie n et un groupe de réflexions fini \overline{W} agissant sur \mathbb{A} .

Un hyperplan de \mathbb{A} qui est l'ensemble des points fixes d'une réflexion de \overline{W} est appelé un *mur (vectoriel)* de \mathbb{A} . Les murs vectoriels de \mathbb{A} sont donc en nombre fini. Une composante connexe du complémentaire dans \mathbb{A} de la réunion des murs (respectivement son adhérence)

est appelée une *chambre de Weyl (vectorielle)* (respectivement *chambre de Weyl fermée*) de \mathbb{A} . C'est un cône polyédral convexe. Les *facettes (vectorielles)* (respectivement *facettes fermées*) de \mathbb{A} sont les facettes ouvertes (resp. fermées) de ces cônes polyédraux. Elles forment une partition de \mathbb{A} . Le groupe \overline{W} opère simplement transitivement sur les chambres de Weyl vectorielles de \mathbb{A} . On se fixe dorénavant une chambre de Weyl fermée \overline{C} de \mathbb{A} dite *fondamentale*. C'est un domaine fondamental strict pour l'action de \overline{W} sur \mathbb{A} .

On appelle *murs, chambres de Weyl, facettes, ... affines* de \mathbb{A} les translatés des murs, chambres de Weyl, facettes, ... vectoriels de \mathbb{A} (nos chambres de Weyl et facettes correspondent respectivement aux *quartiers* et *facettes de quartiers* de [Tit]).

Soit W un sous-groupe d'isométries affines de \mathbb{A} , de projection vectorielle \overline{W} , tel qu'il existe a dans \mathbb{A} tel que $W = TW_a$, où W_a fixe a et T est un sous-groupe de translations de \mathbb{A} (ou, de manière équivalente, engendré par des réflexions affines).

II.1.2 Définition des immeubles affines.

Définition II.1.1 Soient Δ un ensemble et \mathcal{A} une famille d'injections de \mathbb{A} dans Δ , qu'on appelle appartements marqués. On appelle appartement l'image d'un appartement marqué.

On dit que Δ muni du système d'appartements (marqués) \mathcal{A} est un immeuble affine modelé sur (\mathbb{A}, W) si les axiomes (A1)-(A5') suivants sont vérifiés.

- (A1) Le système d'appartements marqués est invariant par précomposition par W .
- (A2) Soient f et f' deux appartements marqués. L'ensemble $I = f'^{-1}(f(\mathbb{A}))$ est un convexe fermé de \mathbb{A} et en restriction à I , le changement d'appartement $f^{-1} \circ f'$ est la restriction d'un élément de W .
- (A3) Par deux points de Δ passe au moins un appartement.

Les axiomes (A2) et (A3) permettent de définir une fonction d de $\Delta \times \Delta$ dans \mathbb{R}_+ , telle que, pour tout appartement marqué f et tous points a et b de \mathbb{A} , on a que $d(f(a), f(b))$ est égal à la distance euclidienne de a à b dans \mathbb{A} . On appelle chambre de Weyl de Δ l'image par un appartement marqué d'une chambre de Weyl affine de \mathbb{A} .

- (A4) Deux chambres de Weyl contiennent des chambres de Weyl contenues dans un même appartement.
- (A5') Pour tout point x de Δ et tout appartement A passant par x , il existe une rétraction r de Δ sur A (c'est-à-dire une application de Δ dans \mathbb{A} égale à l'identité en restriction à \mathbb{A}), diminuant d , et telle que $r^{-1}(x) = \{x\}$.

Remarques. Cette définition est extraite de [Ron, Appendix 3], où on trouvera un historique de l'axiome (A5'). On notera que dans [Ron, Appendix 3] et [Tit], le seul groupe W autorisé est le groupe \widetilde{W} de toutes les isométries affines de \mathbb{A} de partie vectorielle dans \overline{W} . Pour toutes les propriétés étudiées ici, cela revient au même, comme on le remarquera ci-dessous. Notons simplement que la définition donnée ici permet de caractériser les immeubles affines discrets de la manière naturelle suivante.

La paire (Δ, \mathcal{A}) est la réalisation géométrique d'un immeuble combinatoire de type affine (voir par exemple [Tit], [Ron] pour la définition) si et seulement si c'est un immeuble affine modelé sur (\mathbb{A}, W) , au sens ci-dessus, avec W discret, et \overline{W} irréductible.

Remarquons que, si (Δ, \mathcal{A}) est un immeuble affine modelé sur (\mathbb{A}, W) , alors $(\Delta, \widetilde{\mathcal{A}})$ est encore un immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}, \widetilde{W})$, avec $\widetilde{\mathcal{A}} = \{f \circ \widetilde{w}; f \in \mathcal{A}, \widetilde{w} \in \widetilde{W}\}$. Toutes les notions (appartements, chambres de Weyl et facettes, distance, ...) et propriétés étudiées dans la suite ne dépendent que de $\widetilde{\mathcal{A}}$, aussi supposera-t-on désormais, pour simplifier les notations, que W est le sous-groupe de toutes les isométries affines de \mathbb{A} de partie vectorielle dans \overline{W} . On dira alors que (Δ, \mathcal{A}) est un immeuble affine de *type (vectoriel)* $(\mathbb{A}, \overline{W})$.

À partir de maintenant et dans tout le reste de la section II.1, on suppose donné un ensemble Δ muni d'une famille \mathcal{A} d'injections de \mathbb{A} dans Δ vérifiant les axiomes (A1), (A2) et (A3).

Remarque. Pour que la fonction d définie ci-dessus soit une distance sur Δ , il faut et il suffit que l'inégalité triangulaire soit vérifiée. On verra que c'est bien le cas si Δ est un immeuble affine (cf. Prop. II.1.3).

II.1.3 Premières définitions.

Type d'un segment.

Le *segment* $[x, y]$ d'un point x à un point y de Δ est par définition le segment euclidien de x à y dans un (tout) appartement les contenant. À chaque segment $[x, y]$ dans Δ on associe le *type* $\Theta[x, y]$ de ce segment, qui est l'unique vecteur de la chambre de Weyl fermée fondamentale \overline{C} de \mathbb{A} tel que dans un appartement marqué f contenant x et y , on ait $x = f(a)$ et $y = f(a + \Theta[x, y])$ avec $a \in \mathbb{A}$. Cette notion est bien définie car \overline{C} est un domaine fondamental strict pour l'action du groupe de Weyl vectoriel \overline{W} sur l'espace vectoriel \mathbb{A} (voir paragraphe II.1.1).

Facettes de Δ .

Un *complexe simplicial* est un ensemble D partiellement ordonné tel que

1. Deux éléments ayant un minorant commun ont une borne inférieure.
2. Le sous-ensemble des minorants, appelés *facettes*, d'un élément donné F est isomorphe à l'ensemble, partiellement ordonné par l'inclusion, des parties non vides d'un ensemble fini $\{1, \dots, r\}$. L'entier $r - 1$ est appelé la *dimension* de F .

On dit qu'un complexe simplicial D est *marqué* si on a un morphisme de D dans l'ensemble, partiellement ordonné par l'inclusion, des parties non vides d'un ensemble fini fixé, qui est injectif en restriction au sous-ensemble des minorants de chaque élément F de D .

Un *complexe de chambres* est un complexe simplicial dont les éléments maximaux, appelés *chambres*, sont de même dimension et dont deux chambres quelconques peuvent être jointes par une *galerie*, c'est-à-dire une suite de chambres telle que deux chambres consécutives sont *adjacentes*, i.e. ont une facette de codimension 1 commune.

L'ensemble Σ des facettes vectorielles de \mathbb{A} , muni de la relation "être une facette de", c'est-à-dire par la relation d'inclusion sur les facettes fermées (voir par exemple [Bro, Chapter 1]), est un complexe simplicial.

On appelle *bord* de \mathbb{A} et on note $\partial\mathbb{A}$ la sphère unité de \mathbb{A} , munie de la distance angulaire. On note ∂ l'application canonique de l'espace vectoriel \mathbb{A} privé du vecteur nul dans $\partial\mathbb{A}$.

Le groupe de réflexions fini \overline{W} induit une partition de la sphère $\partial\mathbb{A}$ par l'ensemble Σ^∞ des bords $\partial\mathbf{F}$ des facettes vectorielles \mathbf{F} non réduites à $\{0\}$ de \mathbb{A} , qui, muni de la relation d'ordre induite par l'inclusion sur les adhérences, est un complexe simplicial (isomorphe à Σ privé de $\{0\}$ dans le cas où \overline{W} est essentiel, à Σ sinon).

Notons $\Sigma_{\leq \mathbf{C}}$ (resp. $\Sigma_{\leq \mathbf{C}}^\infty$) le sous-ensemble de Σ (resp. de Σ^∞) formé par les facettes de \mathbf{C} (resp. par les bords des facettes non réduites à $\{0\}$ de \mathbf{C}).

On appelle *facette (ouverte)* (resp. *facette fermée*) de Δ l'image F par un appartement marqué f d'une facette affine ouverte (resp. fermée) $a + \mathbf{F}$ de \mathbb{A} , où $a \in \mathbb{A}$ et \mathbf{F} est une facette vectorielle de \mathbb{A} . Cette facette est dite de *sommet* x si $f(a) = x$. La facette fermée \overline{F} associée est alors l'image par l'appartement marqué de la facette affine fermée $a + \overline{\mathbf{F}}$ associée (cela ne dépend pas du choix de l'appartement). Quitte à précomposer f par un élément de W , on peut supposer que \mathbf{F} est dans l'ensemble $\Sigma_{< \mathbf{C}}$ des facettes de la chambre de Weyl vectorielle fondamentale \mathbf{C} . Alors \mathbf{F} , qu'on appellera le *type* de F et qu'on notera $\Theta(F)$, et la restriction à $\overline{\mathbf{F}}$ de $f(a + \cdot)$, ne dépendent que de F .

On dit qu'une facette F' de Δ *est dominée par* ou *est une facette d'une facette* F de Δ si F et F' ont même sommet et F' est incluse dans la facette fermée \overline{F} associée à F .

L'ensemble des facettes de Δ de sommet un point x donné est un complexe simplicial marqué (par le type).

Germes de facettes en un point.

Soient x un point de Δ et F, F' deux facettes de Δ de sommet x . On dit que F et F' ont même *germe en* x si leur intersection est un voisinage de x dans F et dans F' . C'est une relation d'équivalence sur les facettes de sommet x . La classe des facettes ayant même germe en x qu'une facette F donnée est appelée le *germe* de F en x et noté $\Sigma_x F$. On dit que le germe en x de F *domine* celui de F' si \overline{F} contient un voisinage de x dans F' . L'axiome (A2) permet d'établir la proposition suivante.

Proposition II.1.2 *Soient F et F' deux facettes de sommet x de Δ telles que \overline{F} contient un voisinage de x dans F' . Alors il existe une facette de F ayant même germe en x que F' .*

Si F et F' ont même germe en x , alors elles ont même type \mathbf{F} . Soient f, f' deux appartements marqués et a, a' dans \mathbb{A} tels que $F = f(a + \mathbf{F})$, $F' = f'(a' + \mathbf{F})$ et $f(a) = f'(a') = x$. Les restrictions à $\overline{\mathbf{F}}$ de $f(a + \cdot)$ et de $f'(a' + \cdot)$ sont alors égales sur un voisinage de 0. \square

On peut donc définir le *type* d'un germe en x de facette (non réduit à la seule facette $\{x\}$) comme le bord $\partial\mathbf{F} \in \Sigma_{\leq \mathbf{C}}^\infty$ du type \mathbf{F} d'un de ses éléments. On note $\Sigma_x \Delta$ l'ensemble des germes en x des facettes de sommet x de Δ , non réduites à $\{x\}$, partiellement ordonné par la relation de domination. C'est un complexe simplicial marqué (par le type).

Soit A un appartement de Δ passant par x . Le *germe en* x de A est le sous-complexe de $\Sigma_x \Delta$ formé par les germes en x des facettes de sommet x , non réduites à $\{x\}$, de A .

Pour que le complexe simplicial $\Sigma_x \Delta$ soit un immeuble sphérique modelé sur Σ^∞ , avec les germes d'appartements pour appartements, il faut et il suffit que l'axiome (B1) de [Bro, IV,1 p. 76] soit vérifié (l'axiome (B2) de [Bro] découlant directement de l'axiome (A2)), c'est-à-dire qu'on ait la propriété suivante.

(GG) Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont dans un même appartement.

On verra que c'est bien le cas si Δ est un immeuble affine (cf. Corollaire II.1.11).

II.1.4 Deux conséquences de l'axiome (A5').

Rappelons que Δ désigne un ensemble muni d'une famille \mathcal{A} d'injections de \mathbb{A} dans Δ vérifiant les axiomes (A1), (A2) et (A3) de la section II.1.2.

Proposition II.1.3 *Si l'axiome (A5') est vérifié, alors la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire et est donc bien une distance.*

Preuve. Soient x, y et z trois points de Δ . D'après l'axiome (A3), il existe un appartement A contenant x et y . D'après l'axiome (A5'), il existe une rétraction r de Δ sur A , diminuant d . On a donc $d(x, r(z)) \leq d(x, z)$ et $d(r(z), y) \leq d(z, y)$. Or, comme la restriction de d à A est une distance, on a $d(x, y) \leq d(x, r(z)) + d(r(z), y)$. On a donc bien que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. \square

On appelle *racine* (resp. *vectorielle*, *affine*) un demi-espace (resp. vectoriel, affine) fermé de \mathbb{A} bordé par un mur. On appelle *demi-appartement* l'image par un appartement marqué d'une racine vectorielle \mathbb{A} . Dans [Ron], on trouve l'axiome suivant comme alternative à l'axiome (A5') :

(A5) Trois appartements tels que leurs intersections deux à deux sont des demi-appartements ont un point commun.

Proposition II.1.4 *Si l'axiome (A5') est vérifié, alors l'axiome (A5) est également vérifié.*

Preuve. On peut se ramener à étudier la situation suivante (les autres cas étant évidents), illustrée par la figure II.1. Soit M un mur vectoriel de \mathbb{A} , délimitant deux demi-espaces D^+ et D^- . Considérons trois appartements marqués f_1, f_2 et f_3 dans \mathcal{A} tels que $f_2(D^+) = f_3(D^-)$, $f_1(a + D^-) = f_2(a + D^-)$, et $f_3(b + D^+) = f_1(c + D^+)$ avec $a \in D^-$, $b \in D^+$ et $c \in a + D^+$.

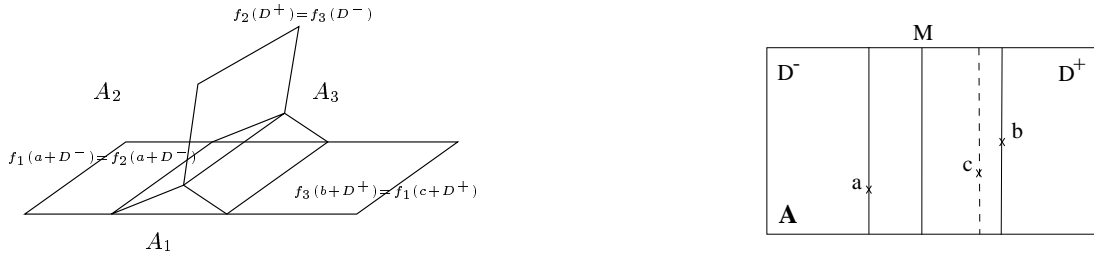


FIG. II.1 – Preuve de l'axiome (A5).

Soit $x \in f_1(\mathbb{A})$. D'après l'axiome (A5'), il existe une rétraction r de Δ sur $f_1(\mathbb{A})$, diminuant la distance d , et telle que $r^{-1}(x) = \{x\}$.

Soit g l'application de \mathbb{A} dans Δ égale à f_2 sur D^- et égale à f_3 sur D^+ (bien définie car f_2 et f_3 coïncident sur M). D'après ce qui a été fait ci-dessus, l'axiome (A5') entraîne l'inégalité triangulaire pour d , donc g diminue la distance.

On considère la compactification canonique de l'espace euclidien de dimension finie \mathbb{A} par la sphère des directions $\partial\mathbb{A}$, en une boule fermée.

L'application $f_1^{-1} \circ r \circ g$, de \mathbb{A} dans lui-même, fixe le demi-espace $a + D^-$ point par point (car r est l'identité sur l'image de f_1 , et $g = f_2$ coïncide avec f_1 sur $a + D^-$) et c'est la translation de vecteur $c - b$ en restriction au demi-espace $b + D^+$ (car $f_1^{-1} \circ f_3$ est alors la restriction d'un élément de W qui envoie $b + D^+$ sur $c + D^+$). De plus, elle diminue la distance euclidienne. On peut la prolonger continûment en une application de la boule fermée $\mathbb{A} \cup \partial\mathbb{A}$ dans elle-même, égale à l'identité sur $\partial\mathbb{A}$. Elle est donc surjective. On a donc $x \in r(f_2(\mathbb{A}) \cup f_3(\mathbb{A}))$, donc $x \in f_2(\mathbb{A}) \cup f_3(\mathbb{A})$. On en déduit que $f_1(\mathbb{A}) \subset f_2(\mathbb{A}) \cup f_3(\mathbb{A})$. \square

II.1.5 L'immeuble à l'infini et les propriétés (GG) et (CO).

Dans cette section, on suppose que (Δ, \mathcal{A}) vérifie, en plus des axiomes (A1), (A2) et (A3), les axiomes (A4) et (A5), et que la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire (c'est notamment le cas pour les immeubles affines d'après ce qui précède). On montrera par la suite en II.1.7 que ces hypothèses, a priori plus faibles, entraînent l'axiome (A5'), donc que Δ est un immeuble affine.

L'immeuble sphérique à l'infini.

On dit que deux facettes de Δ sont *asymptotes* si elles sont à distance de Hausdorff finie pour d . C'est une relation d'équivalence car d vérifie l'inégalité triangulaire. Une classe de facettes asymptotes non réduites à un point est appelée une *facette à l'infini* de Δ . La facette à l'infini définie par une facette F (non réduite à un point) est appelée *bord* de F et notée $F(\infty)$.

Soient b et b' deux facettes à l'infini de Δ . On dit que b *domine* b' ou que b' est une facette de b et on note $b' \leq b$ si pour tout $F \in b$ et $F' \in b'$ on a $\sup_{x \in F'} d(x, F) < \infty$. L'axiome (A4) permet d'établir la proposition suivante.

Proposition II.1.5 *Soient F et F' deux facettes de Δ telles que $\sup_{x \in F'} d(x, F)$ est fini. Alors il existe une facette de F asymptote à F' .*

Si F et F' sont asymptotes, non réduites à un point, alors il existe une unique facette \mathbf{F} de la chambre de Weyl fondamentale \mathbf{C} et deux appartements marqués f et f' tels que $F = f(a + \mathbf{F})$, $F' = f'(a' + \mathbf{F})$ avec a, a' dans \mathbb{A} . Les restrictions à $\overline{\mathbf{F}}$ de $f(a + \cdot)$ et de $f'(a' + \cdot)$ sont alors à distance bornée. Le bord $\partial\mathbf{F} \in \Sigma_{\geq \mathbf{C}}^\infty$ de \mathbf{F} est alors appelé le type de $F(\infty)$ et notée $\Theta(F(\infty))$. \square

On appelle *sous-chambre de Weyl* d'une chambre de Weyl C de Δ une chambre de Weyl de Δ contenue dans C .

Corollaire II.1.6 *Deux chambres de Weyl de Δ sont asymptotes si et seulement si elles ont une sous-chambre de Weyl commune.* \square

L'ensemble Δ^∞ des facettes à l'infini de Δ , muni de la relation de domination, est un complexe simplicial marqué (par le type).

À chaque appartement A de Δ on associe son bord $A(\infty)$, i.e. le sous-complexe, isomorphe à Σ^∞ , de Δ^∞ formé des bords des facettes (non réduites à un point) incluses dans A .

Propriété II.1.7 *Le complexe simplicial Δ^∞ est un immeuble sphérique modelé sur Σ^∞ , appelé immeuble à l'infini de Δ . Ses appartements sont les bords des appartements de Δ .*

Preuve. L'axiome (B1) de [Bro] découle immédiatement de (A4), il suffit de vérifier (B2''). Si une chambre à l'infini c est dans le bord à l'infini de deux appartements A et A' , alors il existe deux chambres de Weyl C dans A et C' dans A' de même bord c . Les chambres de Weyl C et C' ont donc une sous-chambre de Weyl commune C'' . Il existe deux appartements marqués f et f' d'images respectives A et A' tels que le changement d'appartement $f' \circ f^{-1}$ est égal à l'identité sur leur intersection, qui contient C'' . L'application induite du bord à l'infini de A dans le bord à l'infini de A' est un isomorphisme fixant leur intersection. \square

Soient A_1 et A_2 deux appartements de Δ . S'ils ont même bord à l'infini, ils sont égaux. Si leurs bords s'intersectent suivant un demi-appartement de Δ^∞ , alors $A_1 \cap A_2$ est un demi-appartement de Δ (prendre deux chambres de Weyl C_1 et C_2 communes à A_1 et A_2 dont les bords sont dans $A_1(\infty) \cap A_2(\infty)$, opposées dans le premier cas, ayant deux faces de codimension 1 opposées dans le second. L'intersection des deux appartements contient l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$, qui est l'appartement tout entier dans le premier cas, et un demi-appartement dans le second).

La propriété (GG)

Proposition II.1.8 *Soient $c' \in \Delta^\infty$ une chambre à l'infini et C une chambre de Weyl de sommet $x \in \Delta$. Alors il existe un appartement contenant un germe en x de C et dont le bord contient c' .*

Preuve. Soit A un appartement contenant C . Par induction sur la longueur d'une galerie allant de $C(\infty)$ à c' , il suffit de démontrer la proposition pour c' adjacente à $A(\infty)$ (et n'y étant pas incluse). Le mur m de $A(\infty)$ contenant une face de codimension 1 de c' partage $A(\infty)$ en deux demi-appartements h_1 et h_2 . Comme Δ^∞ est un immeuble sphérique, il existe un demi-appartement h de Δ^∞ de bord m et contenant c' , et $a_i = h_i \cup h$ est un appartement à l'infini pour $i = 1, 2$.

Soit A_i l'appartement de Δ de bord a_i . Les trois appartements A , A_1 et A_2 s'intersectent deux à deux suivant des demi-appartements. D'après l'axiome (A5), ils ont donc un point commun. L'appartement A est donc la réunion des deux demi-appartements $A \cap A_1$ et $A \cap A_2$. L'un des deux appartements A_1, A_2 contient un germe en x de C , donc convient. \square

Corollaire II.1.9 *Soit x un point de Δ . Pour toute facette F de Δ , il existe une unique facette F' de sommet x asymptote à F .* \square

Corollaire II.1.10 *Soient F une facette de Δ de sommet x et b un germe en x de facette dominant le germe $\Sigma_x F$ de F en x . Alors il existe une facette F' de sommet x ayant F pour facette et b pour germe en x .* \square

Corollaire II.1.11 *On a la propriété*

(GG) *Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont contenus dans un même appartement.* \square

La propriété (CO) pour les chambres de Weyl opposées en un point.

Remarquons que deux facettes de même sommet x sont opposées en x (i.e. de germes en x opposés dans un appartement les contenant) si et seulement si elles contiennent respectivement dans leur intérieur deux points y et z tels que $x \in [y, z]$. La notion de facettes opposées en leur sommet ne dépend donc que des trois premiers axiomes.

Proposition II.1.12 *On a la propriété*

(CO) *Il existe un unique appartement contenant deux chambres de Weyl données de sommet $x \in \Delta$, opposées en x .*

Preuve. L'unicité est une conséquence directe de l'axiome (A2), montrons l'existence.

Soient C et D deux chambres de Weyl de même sommet x , opposées en x . D'après l'axiome (A4), il existe un appartement A contenant deux sous-chambres de Weyl respectives C' et D' de C et D . Soit $[y, z]$ un segment non trivial contenant x avec $y \in C$ et $z \in D$.

Soit $r : \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ tel que la restriction à \mathbb{R}_+ (resp. à \mathbb{R}_-) de r est le rayon géodésique de C (resp. de D) issu de x passant par y (resp. par z), qui rencontre nécessairement la sous-chambre de Weyl C' (resp. D') en y' (resp. z').

Montrons que le point x est sur le segment $[z', y']$, donc dans A (par l'axiome (A2)), ce qui conclut.

Soit I l'ensemble des réels t négatifs ou nuls tels que la chambre de Weyl fermée de Δ de sommet $r(t)$ asymptote à C , notée $C(t)$, contient $r([t, +\infty[)$. C'est un intervalle contenant 0. Soit $t \in I$. D'après la proposition II.1.8, il existe un appartement A' contenant un germe en $r(t)$ de la sous-chambre de Weyl $D(t)$ de D de sommet $r(t)$, donc contenant $r([t - \varepsilon, t])$ avec ε strictement positif, et contenant également $C(t)$, donc $r([t, +\infty[)$ car $t \in I$. Comme r minimise localement la distance, la restriction à $[t - \varepsilon, +\infty[$ de r est un rayon géodésique dans l'appartement A' , passant par $r(t)$ et y . Donc son image est contenue dans $C(t - \varepsilon)$ et $t - \varepsilon \in I$.

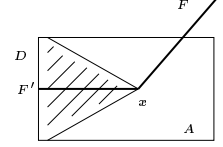
Donc I est un intervalle ouvert de la forme $]s, 0]$ de \mathbb{R}_- avec $s < 0$. Si s est fini, alors, en appliquant la proposition II.1.8 à la chambre à l'infini $C(\infty)$ et au germe de chambre en $r(s)$ opposé à celui de $D(s)$, il existe ε strictement positif, qu'on peut supposer inférieur à $-s$, tel qu'il existe un appartement contenant $r(s)$ et $r(s + \varepsilon)$ (donc $r([s, s + \varepsilon])$) et $C(s + \varepsilon)$, donc $r([s + \varepsilon, +\infty[)$ car $s + \varepsilon \in I$. On a donc $s \in I$, ce qui est impossible. \square

On aura besoin du corollaire suivant en section V.5.3.

Corollaire II.1.13 (Géodésiques par morceaux) *Soit Δ un immeuble affine, de système d'appartement maximal. Soit $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ une géodésique par morceaux, à segments localement dans des chambres opposées, c'est-à-dire telle que pour tout t il existe ε tel que les segments $\sigma[t, t + \varepsilon]$ et $\sigma[t - \varepsilon, t]$ sont dans deux chambres de Weyl de sommet $\sigma(t)$ de germes opposés en $\sigma(t)$. Alors, pour tout t les images par σ des intervalles $] -\infty, t]$ et $[t, +\infty[$ sont respectivement contenues dans deux chambres de Weyl de sommet $\sigma(t)$ opposées en $\sigma(t)$. En particulier, l'image de σ est contenue dans un appartement.* \square

Terminons par un lemme (qui sera notamment utilisé en section II.2.6) qui généralise la propriété (CO).

Lemme II.1.14 Soient A un appartement de Δ , et F une facette de Δ de sommet un point x de A . Soit F' une facette de A de sommet x opposée à F en x , et D la réunion des chambres de Weyl fermées de A de sommet x contenant F' . Il existe un unique appartement contenant D et F .



Preuve. L'unicité est une conséquence directe de l'axiome (A2), montrons l'existence.

Soient $f' \in \mathcal{A}$ d'image A et \mathbf{F} une facette de la chambre de Weyl fondamentale \mathbf{C} de \mathbb{A} telles que $f'(0) = x$ et $f'(\mathbf{F}) = F'$. Soient $C' = f'(\mathbf{C})$ et $B' = f'(w\mathbf{C})$ où w est le plus long élément du sous-groupe de Coxeter de \overline{W} engendré par les réflexions fixant \mathbf{F} .

La facette F' peut se prolonger en une chambre de Weyl de sommet x opposée en x à C' par le corollaire II.1.10, donc il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(0) = x$, $f(\mathbf{C}) = C'$ et $f(-\mathbf{F}) = F$. Soit $B = f(w(-\mathbf{C}))$, alors l'enveloppe convexe fermée de F' et B contient C' . Il existe un appartement contenant des germes de B et de B' , donc un germe de F' (par (GG)), donc, par convexité, cet appartement contient un germe de C' . Les chambres de Weyl B et B' sont donc opposées en x , donc contenues dans un même appartement A' (par (CO)), qui contient l'enveloppe convexe de F' et B (par l'axiome (A2)), donc C' .

Par conséquent $A'(\infty)$ contient la réunion des galeries minimales de $C'(\infty)$ à $B'(\infty)$, qui est $D(\infty)$ (car ce sont des chambres opposées dans le complexe de Coxeter $\text{link}(F'(\infty))$ dont l'ensemble des chambres est l'ensemble $D(\infty)$ des chambres de $A(\infty)$ dominant $F'(\infty)$). On en conclut que A contient D . \square

II.1.6 L'immeuble des germes en un point et la propriété (A3').

Dans cette section, on suppose que (Δ, \mathcal{A}) vérifie, en plus des axiomes (A1), (A2) et (A3), les propriétés suivantes (qui sont notamment vérifiées sous les hypothèses de la section II.1.5, donc par les immeubles affines, d'après la section II.1.4).

- (GG) Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont dans un même appartement.
- (CO) Deux chambres de Weyl de sommet $x \in \Delta$, opposées en x , sont dans un même appartement.

Notons que l'appartement de (CO) est nécessairement unique (par l'axiome (A2)). On montrera par la suite en sections II.1.7 et II.1.8 que les axiomes (A5') et (A4) sont alors vérifiés, donc que Δ est un immeuble.

La propriété (GG) entraîne la proposition suivante.

Proposition II.1.15 Le complexe simplicial $\Sigma_x \Delta$ est un immeuble sphérique modelé sur Σ^∞ , appelé l'immeuble des directions en x de Δ . Ses appartements sont les germes des appartements de Δ passant par x . \square

Remarque. Dans le cas où $(\mathbb{A}, \overline{W})$ essentiel, la réalisation géométrique de l'immeuble sphérique combinatoire $\Sigma_x \Delta$ est exactement l'espace $\delta_x \Delta$ des directions en x de Δ comme espace métrique CAT(0) (voir section I.1).

On a un morphisme canonique (de complexes de chambres marqués) de l'immeuble à l'infini dans l'immeuble des directions en x

$$\Sigma_x : \Delta^\infty \longrightarrow \Sigma_x \Delta$$

défini par $\Sigma_x(C(\infty)) = \Sigma_x C$ pour toute chambre de Weyl C de sommet x de Δ .

Proposition II.1.16 *Soient C et C' deux chambres de Weyl de Δ de même sommet x . Il existe un appartement contenant C et un germe de C' en x .*

Preuve. Soit A un appartement contenant des germes en x de C et C' . Soit C'' la chambre de Weyl de A de sommet x , de germe en x opposé à celui de C . Soit A' l'appartement contenant les deux chambres de Weyl C et C'' (qui sont opposées en x). Les germes en x de A et de A' sont deux appartements de l'immeuble sphérique $\Sigma_x \Delta$ qui contiennent les deux chambres opposées $\Sigma_x C$ et $\Sigma_x C''$. Ils sont donc confondus, et par conséquent A' contient un germe en x de C' . \square

Proposition II.1.17 *On a la propriété*

(A3') *Soient C et C' deux chambres de Weyl de Δ de sommets respectifs x et y . Alors il existe un appartement contenant un germe en x de C et un germe en y de C' .*

Preuve. Soit \overline{D} une chambre de Weyl fermée de Δ de sommet x contenant y . D'après la proposition II.1.16, il existe un appartement A contenant \overline{D} et un germe en x de C . Il existe une chambre de Weyl fermée \overline{D}' de A de sommet y contenant un germe en x de C . En réappliquant la même proposition, on a alors un appartement A' contenant \overline{D}' et un germe en y de C' , qui convient. \square

Remarque. Les germes de facettes jouent un rôle analogue pour Δ à celui des simplexes pour les immeubles combinatoires. De ce point de vue, la propriété (A3') est la transcription de l'axiome (B1) de [Ron].

II.1.7 Rétractions.

Dans cette section, on suppose seulement que Δ vérifie les axiomes (A1) et (A2), que \mathcal{A} est *couvrante* (i.e. que Δ est la réunion de ses appartements), et que Δ possède la propriété (A3'), qui est alors un renforcement de l'axiome (A3). Ceci est en particulier le cas sous les hypothèses de la section II.1.6, donc quand Δ est un immeuble affine. On établit, suivant [BrTi1], l'existence de rétractions canoniques et en particulier que l'axiome (A5') est alors vérifié.

Proposition II.1.18 *Soient A un appartement, x un point de A et C une chambre de A de sommet x . Il existe une unique rétraction r de Δ sur A , appelée rétraction canonique de Δ sur A de centre C , telle que r conserve la distance en restriction à tout appartement contenant un germe en x de C . Alors r envoie une facette de sommet x isométriquement sur une facette de sommet x , et le morphisme de l'immeuble $\Sigma_x \Delta$ des directions en x induit par r est la rétraction ρ de $\Sigma_x \Delta$ sur $\Sigma_x A$ centrée en $\Sigma_x C$. De plus r diminue la distance, et conserve la distance à x (en particulier l'axiome (A5') est vérifié).*

Preuve. Pour tout appartement A' contenant un germe de C , il existe (par l'axiome (A2)) une unique isométrie $\phi_{A'}$ de A' sur A fixant leur intersection $A \cap A'$.

Soit $y \in \Delta$. D'après la propriété (A3') et puisque \mathcal{A} est couvrante, il existe un appartement A' contenant y et un germe en x de C . Alors on pose $r(y) = \phi_{A'}(y)$, qui ne dépend pas du choix de A' (contenant y et un germe en x de C).

L'application r conserve bien la distance à x , et envoie un germe de chaque chambre de Weyl de sommet x isométriquement sur un germe de chambre de Weyl de \mathcal{A} , donc envoie la chambre de Weyl toute entière isométriquement sur la chambre de Weyl de \mathcal{A} correspondante. L'application induite sur l'immeuble des directions en x est clairement la rétraction canonique.

Il reste à voir que r diminue la distance. On utilise pour cela le lemme suivant de [BrTi1], dont la démonstration, incluse par souci de complétude, n'utilise que la propriété (A3').

Lemme II.1.19 [BrTi1, Lemme 7.4.21] *Soient C une chambre de Weyl de sommet $x \in \Delta$ et y, z deux points de Δ . Le segment $[y, z]$ est inclus dans une réunion finie d'appartements contenant un germe en x de C .*

Preuve. Pour $p \in [y, z[$ (resp. dans $]y, z]$), on considère une chambre de Weyl C_p^+ (resp. C_p^-) de sommet p contenant le segment $[p, z]$ (resp. $[p, y]$) dans son adhérence. D'après la propriété (A3'), il existe un appartement A_p^+ (resp. A_p^-) contenant un germe en x de C et un germe en p de C_p^+ (resp. de C_p^-), donc un point p^+ (resp. p^-) du segment $]p, z]$ (resp. $]p, y]$). Soit $[y, y^+[$, $]p_1^-, p_1^+[$, \dots , $]p_k^-, p_k^+[$, $]z^-, z]$ un recouvrement fini du segment $[y, z]$ extrait du recouvrement de ce segment par les segments ouverts $[y, y^+[$, $]z^-, z]$, et $]p^-, p^+[$ pour $p \in]y, z[$. Alors le segment $[y, z]$ est inclus dans la réunion (finie) des appartements A_y^+ , $A_{p_1}^-$, $A_{p_1}^+$, \dots , $A_{p_k}^-$, $A_{p_k}^+$, A_z^- , qui contiennent chacun un germe en x de C . \square

Soient y et z deux points de Δ . D'après le lemme, la rétraction r est une isométrie en restriction à chaque sous-segment d'une subdivision finie du segment $[y, z]$. Son image est donc un chemin dans A de $r(y)$ à $r(z)$, de même longueur $d(y, z)$. La distance $d(r(y), r(z))$ est la distance dans A entre $r(y)$ et $r(z)$, donc inférieure à la longueur des chemins les joignant, donc à $d(y, z)$. \square

II.1.8 Vérification de l'axiome (A4).

On reprend les hypothèses de la section II.1.6. On va montrer que l'axiome (A4) est alors vérifié. Commençons par établir la propriété suivante (déjà obtenue pour les immeubles affines en Prop. II.1.8).

Proposition II.1.20 *Par tout germe de chambre de Weyl passe au moins un appartement contenant une sous-chambre de Weyl d'une chambre de Weyl donnée.*

Preuve. Soient C une chambre de Weyl de Δ de sommet x et c' un germe de chambre de Weyl de sommet y . Soit A un appartement contenant C . Soient z un point de C et C_+ la sous-chambre de Weyl de C de sommet z . Considérons la rétraction canonique r de Δ sur A , centrée sur C_+ (voir Prop. II.1.18). Comme r diminue la distance, l'image $r(y)$ de y par r est dans la boule B de centre x et de rayon $d(x, y)$ dans A . On peut choisir z de telle manière que la boule B soit incluse dans la chambre de Weyl ouverte C_- de A , de sommet z , opposée à C_+ .

Soient A' un appartement contenant c' et un germe de C_+ en z (qui existe par la propriété (A3')), et C'_- la chambre de Weyl de A' de sommet z opposée à $\Sigma_z C_+$. Alors r envoie C'_- sur C_- . Comme $r(y) \in C_-$, on a que la chambre de Weyl ouverte C'_- contient y , donc le germe c' (car elle contient un voisinage de y dans A). Les chambres de Weyl C'_- et C_+ sont opposées en z , donc contenues dans un même appartement (par la propriété (CO)). \square

Notons que cette propriété permet de définir un autre type de rétractions canoniques.

Par définition, le *germe à l'infini* d'une chambre de Weyl C de Δ est la classe des chambres de Weyl ayant même germe à l'infini que C , c'est-à-dire une sous-chambre de Weyl commune avec C .

La proposition suivante se démontre de manière exactement analogue à ce qui est fait en section II.1.7.

Proposition II.1.21 *Soient A un appartement et C une chambre de Weyl de A . Il existe une unique rétraction r de Δ sur A , appelée rétraction canonique de Δ sur A centrée sur le germe à l'infini de C , telle que r conserve la distance en restriction à tout appartement contenant une sous-chambre de Weyl de C . De plus r diminue la distance.* \square

Les rétractions canoniques définies dans les propositions II.1.18 et II.1.21 sont différentes, comme le montre par exemple le cas des arbres (voir figure II.2).



FIG. II.2 – Cas des arbres.

Vérifions maintenant l'axiome (A4). Soient C et C' deux chambres de Weyl de Δ . Montrons que, quitte à passer à deux sous-chambres de Weyl, elles sont dans un même appartement.

Pour $z \in C'$, notons C_z, C'_z les chambres de Weyl de sommet z contenant des sous-chambres de Weyl respectives de C et de C' (dont l'existence est assurée par la proposition II.1.20, et l'unicité par l'axiome (A2)). Notons $\delta(z)$ la longueur d'une galerie minimale allant du germe en z de C_z à celui de C'_z dans l'immeuble sphérique $\Sigma_z \Delta$ des directions en z .

Quitte à remplacer C par une chambre de Weyl de même germe à l'infini et C' par une sous-chambre de Weyl, on peut supposer qu'elles ont même sommet x et que $\delta(x)$ est maximal (car δ ne prend qu'un nombre fini de valeurs).

Soient (par la proposition II.1.16) A un appartement contenant C' et un germe en x de C , et C'' la chambre de Weyl de sommet x de A opposée à $\Sigma_x C$. Par (CO), soit A' l'appartement contenant les deux chambres de Weyl C et C'' (qui sont opposées en x). L'intersection de A' et de $\overline{C'}$ est un convexe fermé de $\overline{C'}$.

Soit z un point de cette intersection. Alors les chambres de Weyl C_z et C''_z de sommet z contenant des sous-chambres de Weyl respectives de C et C'' sont dans A' par l'axiome (A2). Par hypothèse, il existe une galerie dans l'immeuble sphérique $\Sigma_z \Delta$ des directions en z allant

du germe en z de C_z à celui de C'_z , de longueur inférieure ou égale à $\delta(x)$. Par ailleurs, comme C' et C'' sont dans un même appartement A , on a $\delta_z(C'_z, C''_z) = \delta_x(C', C'') = d - \delta_x(C, C') = d - \delta(x)$ où d est le diamètre combinatoire du complexe de Coxeter modèle Σ^∞ . Donc $\Sigma_z C'_z$ est sur une galerie de longueur minimale de $\Sigma_z \Delta$ joignant les chambres opposées $\Sigma_z C_z$ et $\Sigma_z C''_z$, donc dans l'unique appartement de $\Sigma_z \Delta$ les contenant, qui est $\Sigma_z A'$. Donc $A' \cap \overline{C'}$ contient un germe de C'_z .

On en déduit que $A' \cap \overline{C'}$ est un convexe fermé de $\overline{C'}$ contenant x , qui est ouvert dans $\overline{C'}$, donc que la chambre de Weyl C' est incluse dans A' , ce qui conclut. \square

La proposition suivante résume les différentes caractérisations des immeubles affines qu'on a obtenu (la caractérisation par la propriété (A3') sera utilisée dans la partie III.1).

Théorème II.1.22 *Soit Δ un ensemble muni d'une famille \mathcal{A} d'injections de \mathbb{A} dans Δ vérifiant les axiomes (A1), (A2) et (A3) de la section II.1.2. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- Δ est un immeuble affine, i.e. les axiomes (A4) et (A5') sont vérifiés.
- les axiomes (A4) et (A5) sont vérifiés et d vérifie l'inégalité triangulaire.
- L'axiome (A4) est vérifié et Δ vérifie la propriété suivante.
 - (A3') Deux germes de chambres de Weyl sont contenus dans un même appartement.
- Δ possède les propriétés suivantes.
 - (GG) Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont contenus dans un même appartement.
 - (CO) Deux chambres de Weyl de sommet $x \in \Delta$, opposées en x , sont contenues dans un même appartement.

\square

Remarque. Si \mathcal{A} est couvrante, la propriété (A3') entraîne l'axiome (A3).

II.2 Décomposition et propriétés géométriques.

II.2.1 Produits et décomposition.

On dit qu'un immeuble affine (Δ, \mathcal{A}) de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est *trivial* si le groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est trivial, c'est-à-dire si le groupe \overline{W} est réduit à l'identité. Dans ce cas \mathbb{A} n'a qu'une seule chambre de Weyl vectorielle, qui est l'espace entier, et l'axiome (A4) entraîne immédiatement que $\Delta = \mathbb{A}$ et que $\mathcal{A} = W$.

Soit $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Delta_2, \mathcal{A}_2)$ deux immeubles affines de types respectifs $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$. Le produit $\Delta_1 \times \Delta_2$ est naturellement muni d'une structure d'immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2, \overline{W}_1 \times \overline{W}_2)$ de système d'appartements $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{(f_1, f_2); f_i \in \mathcal{A}_i\}$. La distance canonique de Δ est alors le produit euclidien des distances canoniques des deux facteurs.

On dit qu'un immeuble est *irréductible* s'il n'est pas trivial et ne se décompose pas en produit de deux immeubles comme ci-dessus.

Proposition II.2.1 *Soient $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$ deux groupes de réflexions finis et (Δ, \mathcal{A}) un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W}) = (\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2, \overline{W}_1 \times \overline{W}_2)$. Il existe une unique décomposition*

de (Δ, \mathcal{A}) en produit de deux immeubles affines $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Delta_2, \mathcal{A}_2)$ de type respectifs $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$.

Preuve. Soit $i \in \{1, 2\}$. On dit que deux points x et y de Δ ont même i -ème coordonnée si, dans un (donc tout, car \overline{W} préserve le sous-espace vectoriel \mathbb{A}_i) appartement marqué contenant x et y , le vecteur de x à y est orthogonal à \mathbb{A}_i . On note alors $x \sim_i y$. Montrons que \sim_i est une relation d'équivalence. Soient x, y et z trois points de Δ tels que $x \sim_i y$ et $y \sim_i z$. Si ces trois points sont dans un même appartement, il est clair que $x \sim_i z$. Dans le cas général, par induction sur la longueur d'une subdivision finie du segment $[y, z]$ dont chaque sous-segment est dans un appartement contenant x (cf. lemme II.1.19), on obtient que $x \sim_i z$.

Notons x_i la classe d'équivalence de x pour \sim_i . Soit Δ_i l'ensemble quotient Δ/\sim_i et $p_i : x \mapsto x_i$ la projection canonique de Δ sur Δ_i . Soit ψ l'application canonique $x \mapsto (x_1, x_2)$ de Δ sur $\Delta_1 \times \Delta_2$. Si x et y ont mêmes coordonnées, c'est-à-dire si $x \sim_1 y$ et $x \sim_2 y$, alors le vecteur de x à y dans un appartement les contenant est orthogonal à \mathbb{A}_1 et à \mathbb{A}_2 , donc nul, donc $x = y$. L'application ψ est donc injective. Soient x et y deux points de Δ et f un appartement passant par x et y . Soient $a = a_1 + a_2$ et $b = b_1 + b_2$ dans \mathbb{A} tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Alors $\psi(f(a + b)) = (x_1, y_2)$. L'application ψ est donc surjective. On identifie dorénavant les ensembles Δ et $\Delta_1 \times \Delta_2$ par la bijection ψ .

Si f est un appartement marqué de Δ , on note f_i l'application injective de \mathbb{A}_i dans Δ_i telle que $f_i = p_i \circ f|_{\mathbb{A}_i}$. On a alors $\psi \circ f = (f_1, f_2)$.

Montrons que l'ensemble Δ_i muni du système d'appartements marqués (clairement couvrant) $\mathcal{A}_i = \{f_i, f \in \mathcal{A}\}$ est bien un immeuble affine de type $(\mathbb{A}_i, \overline{W}_i)$. D'après le théorème II.1.22, il suffit de vérifier les axiomes (A1), (A2), (A4) et la propriété (A3').

Soit W_i le sous-groupe des isométries affines de \mathbb{A}_i de partie vectorielle dans \overline{W}_i . Le sous-groupe W des isométries affines de $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$ de partie vectorielle dans $\overline{W} = \overline{W}_1 \times \overline{W}_2$ s'identifie au produit $W_1 \times W_2$.

L'axiome (A1) est vérifié car \mathcal{A} est invariant par précomposition par le sous-groupe $W_i \times \{\text{Id}\}$ de W , et on a $(f \circ w)_i = f_i \circ w_i$ pour tout f dans \mathcal{A} et $w = (w_1, w_2)$ dans W .

On fixe une chambre de Weyl vectorielle \mathbf{C} de \mathbb{A} et les chambres de Weyl vectorielles respectives $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ de \mathbb{A}_1 et \mathbb{A}_2 telles que $\mathbf{C} = \{a_1 + a_2, a_i \in \mathbf{C}_i \text{ pour } i = 1, 2\}$.

Montrons que $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$ vérifie l'axiome (A2). On montre tout d'abord une partie seulement des propriétés demandées, c'est-à-dire que pour tous f et f' dans \mathcal{A} , le sous-ensemble $I_1 = f_1^{-1}(f_1(\mathbb{A}_1) \cap f'_1(\mathbb{A}_1))$ est une partie convexe de \mathbb{A}_1 et l'application $f'^{-1}_1 \circ f_1|_{I_1}$ est une isométrie de I_1 dans \mathbb{A}_1 . Soient $a, b \in I_1$. Soient a' et b' les deux points de \mathbb{A}_1 tels que $f(a) \sim_1 f'(a')$ et $f(b) \sim_1 f'(b')$. Soit f'' un appartement marqué dont l'image contient les deux points $x = f(a) = f''(a)$ et $y' = f'(b') = f''(c)$ avec $c \in \mathbb{A}$. Alors le point $f''(c_1 + a_2)$ a mêmes coordonnées (y'_1, x_2) que le point $y = f(b)$, donc ils sont confondus, et de même $f''(a_1 + c_2) = f'(a') = x'$. Il est alors clair que les segments $[x, y]$ et $[x', y']$ ont même longueur et même projection sur Δ_1 , ce qui conclut.

Après ce préliminaire, nous pouvons montrer la propriété importante suivante.

Lemme II.2.2 *Si f et f' sont deux appartements marqués quelconques de Δ , alors il existe un appartement f'' tel que $\psi \circ f'' = (f_1, f'_1)$.*

On aura donc bien $\psi\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Preuve. Les deux chambres de Weyl $f(\mathbf{C})$ et $f'(\mathbf{C})$ de Δ ont, par l'axiome (A4), deux sous-chambres $f(a + \mathbf{C})$ et $f'(a + \mathbf{C})$ (avec $a \in \mathbf{C}$) dans l'image d'un même appartement marqué f''_+ . En utilisant l'axiome (A2), on peut choisir f''_+ tel que $(f''_+)_1 = f_1$ en restriction à $a_1 + \mathbf{C}_1$ et $(f''_+)_2 = f'_2$ en restriction à $a_2 + \mathbf{C}_2$. On applique le même procédé à la chambre de Weyl $-\mathbf{C}$ opposée à \mathbf{C} et on obtient un autre appartement marqué f''_- tel que $(f''_-)_1 = f_1$ en restriction à $-a_1 - \mathbf{C}_1$ et $(f''_-)_2 = (f')_2$ en restriction à $-a_2 - \mathbf{C}_2$. En appliquant une dernière fois l'axiome (A4) aux deux chambres de Weyl $f''_+(a + \mathbf{C})$ et $f''_-(-a - \mathbf{C})$, on obtient un appartement marqué f'' contenant deux de leurs sous-chambres de Weyl $f''_+(a' + \mathbf{C})$ et $f''_-(-a' - \mathbf{C})$ (avec $a' \in a + \mathbf{C}$) et on peut supposer que $f'' = f''_+$ sur $a' + \mathbf{C}$. L'ensemble $I_1 = f_1^{-1}(f_1(\mathbb{A}_1) \cap f''_1(\mathbb{A}_1))$, dont on a vu précédemment que c'est une partie convexe de \mathbb{A}_1 , contient les deux chambres de Weyl affines de direction opposées $-a'_1 - \mathbf{C}_1$ et $a'_1 + \mathbf{C}_1$ de \mathbb{A}_1 , donc c'est \mathbb{A}_1 tout entier. On a de plus que l'application f''_1 coïncide avec l'application f_1 sur la chambre de Weyl affine $a'_1 + \mathbf{C}_1$ de \mathbb{A}_1 donc l'application $f''_1^{-1} \circ f_1$, dont on a vu précédemment que c'est une isométrie, la fixe point par point, donc c'est l'identité. On en conclut que $f''_1 = f_1$ et, par le même raisonnement, que $f''_2 = f'_2$, comme demandé. \square

On peut maintenant terminer la vérification de l'axiome (A2). Soient $f_1, f'_1 \in \mathcal{A}_1$, d'après ce qu'on vient de faire, on peut choisir des représentants f et f' dans \mathcal{A} tels que $f'_2 = f_2$. Pour $a, a' \in \mathbb{A}_1$, on a alors $f_1(a) = f'_1(a')$ si et seulement si $f(a) = f'(a')$. Il est alors facile de déduire les propriétés requises des propriétés correspondantes pour f et f' .

La propriété (A3') et l'axiome (A4) sont aisément vérifiés. Soient $C_i = f_i(\mathbf{C}_i)$ et $C'_i = f'_i(\mathbf{C}_i)$, avec $f, f' \in \mathcal{A}$, deux chambres de Weyl de Δ_i . Alors par la propriété (A3') pour Δ , il existe $\varepsilon > 0$ et un appartement A'' contenant $f(\mathbf{C} \cap B(0, \varepsilon))$ et $f'(\mathbf{C} \cap B(0, \varepsilon))$. L'appartement $p_i(A'')$ de Δ_i contient donc deux germes respectifs $f_i(\mathbf{C}_i \cap B(0, \varepsilon))$ et $f'_i(\mathbf{C}_i \cap B(0, \varepsilon))$ de C_i et C'_i , ce qui conclut la vérification de la propriété (A3') pour Δ_i . Par ailleurs, par l'axiome (A4) pour Δ , il existe $a \in \mathbf{C}$ et un appartement A'' contenant les sous-chambres de Weyl $f(a + \mathbf{C})$ et $f'(a + \mathbf{C})$. L'appartement $p_i(A'')$ de Δ_i contient donc les deux sous-chambres de Weyl respectives $p_i(f(a + \mathbf{C})) = f_i(a_i + \mathbf{C}_i)$ et $f'_i(a_i + \mathbf{C}_i)$ de C_i et C'_i , ce qui conclut la vérification de l'axiome (A4) pour Δ_i .

On a donc montré l'existence de la décomposition souhaitée. L'unicité découle de la remarque suivante. Supposons que (Δ, \mathcal{A}) soit le produit de deux immeubles affines $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Delta_2, \mathcal{A}_2)$. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux points de $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. Alors, pour $i = 1, 2$, pour la relation d'équivalence \sim_i définie au début de la preuve, on a $x \sim_i y$ si et seulement si $x_i = y_i$. En effet, en prenant par exemple $i = 1$, si on prend un appartement marqué $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ contenant x et y dans son image, et un point $a = a_1 + a_2$ de $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$, tels que $x = f(a)$, alors $x \sim_1 y$ si et seulement si y appartient à $f(a + \mathbb{A}_2) = \{f_1(a_1)\} \times f_2(a_2 + \mathbb{A}_2) = f(\mathbb{A}) \cap \{x_1\} \times \Delta_2$. Il est alors clair que la décomposition de Δ en produit de deux immeubles affines construite dans cette preuve est égale à la décomposition initiale. \square

Corollaire II.2.3 *Un immeuble affine Δ de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est irréductible si et seulement si le groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ l'est.* \square

Corollaire II.2.4 *Pour tout immeuble affine Δ , il existe une unique (à automorphisme près et modulo permutation des indices $\{1, \dots, m\}$) décomposition $\Delta = \Delta_0 \times \prod_{i=1}^m \Delta_i$ de Δ en produit d'immeubles affines Δ_i , où Δ_0 est trivial et Δ_i irréductible pour $i > 1$. \square*

II.2.2 Automorphismes et isométries.

Définition II.2.5 *Un automorphisme d'un immeuble affine Δ est une bijection $g : \Delta \rightarrow \Delta$ tel que le système \mathcal{A} des appartements marqués est invariant par composition par g , i.e. pour tout appartement marqué $f \in \mathcal{A}$, les applications $g \circ f$ et $g^{-1} \circ f$ sont dans \mathcal{A} .*

Les différentes propriétés énoncées dans les propositions suivantes sont immédiates.

Proposition II.2.6 *Soit g un automorphisme d'immeuble de Δ . Alors g est une isométrie de Δ et g conserve le type des segments. L'isométrie de Δ^∞ induite par g est un automorphisme d'immeuble sphérique. Si g fixe un point $x \in \Delta$, l'isométrie de $\Sigma_x \Delta$ induite par g est un automorphisme d'immeuble sphérique. \square*

Proposition II.2.7 *Soit g une isométrie de Δ conservant le type des segments. Si Δ est un immeuble trivial, alors $\Delta = \mathbb{A}$ et g est une translation de \mathbb{A} . Si Δ se décompose en produit $\prod_{i=0}^k \Delta_i$ d'immeubles affines, alors g est de la forme (g_0, \dots, g_k) où g_i est une isométrie de Δ_i conservant le type des segments pour tout i . Si g est un automorphisme d'immeuble de Δ , alors g_i est un automorphisme d'immeuble de Δ_i pour tout i . \square*

Nous aurons besoin en section II.3 de la propriété suivante.

Proposition II.2.8 *Soit g une isométrie de Δ préservant les chambres de Weyl. Si $\Delta = \Delta_0 \times \Delta'$ est la décomposition canonique de Δ en produit d'un immeuble affine trivial Δ_0 et d'un immeuble affine sans facteur trivial Δ' , alors g est de la forme (g_0, g') où g_0 est une isométrie de Δ_0 , et g' est une isométrie de Δ' préservant les chambres de Weyl.*

Preuve. Une chambre de Weyl de Δ de sommet $x = (x_0, x')$ est de la forme $C = \Delta_0 \times C'$ où C' est une chambre de Weyl de Δ' de sommet x' . Le facteur trivial $\Delta_0 \times \{x'\}$ est égal à l'intersection des faces de codimension 1 de C , et $\{x_0\} \times C'$ est son orthogonal en x , donc cette décomposition est préservé par g . On en déduit le résultat souhaité. \square

II.2.3 Géométrie CAT(0).

Proposition II.2.9 *(F. Bruhat-J. Tits) Un immeuble affine Δ est un espace métrique CAT(0) (voir par exemple [Pau2, Prop. 3.3]).*

Preuve. Soient x, y, z trois points de Δ . Soit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ un triangle de comparaison. Soient p un point d'une géodésique entre x et y , et \bar{p} le point du segment $[\bar{x}, \bar{y}]$ tel que $d(\bar{x}, \bar{p}) = d(x, p)$. Soit A un appartement contenant x et y . Soit p' le point du segment $[x, y]$ tel que $d(x, p') = d(x, p)$ et $d(y, p') = d(y, p)$. Soit r une rétraction de Δ sur A , diminuant la distance, conservant la distance à p' (cf. Prop. II.1.18).

Montrons dans un premier temps que $p = p'$. On a $d(x, p) + d(p, y) = d(x, y)$ donc $d(x, r(p)) + d(r(p), y)$ est inférieur ou égal à $d(x, y)$, donc $r(p) = p'$. Par conséquent on a $p = p'$ car r conserve la distance à p' .

Les trois points $x, y, r(z)$ forment un triangle euclidien dans A avec $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$, $d(x, r(z)) \leq d(\bar{x}, \bar{z})$ et $d(y, r(z)) \leq d(\bar{y}, \bar{z})$. On en déduit que $d(p, r(z)) \leq d(\bar{p}, \bar{z})$. Comme $d(p, z)$ est égal à $d(p, r(z))$, on a bien l'inégalité $d(p, z) \leq d(\bar{p}, \bar{z})$. \square

L'énoncé suivant est un corollaire de la proposition II.1.5 et des propriétés des espaces métriques CAT(0) (voir section I.1).

Corollaire II.2.10 *Soient \bar{C} de sommet q et \bar{C}' de sommet q' deux chambres de Weyl fermées asymptotes, alors pour tous $x \in \bar{C}$ et $x' \in \bar{C}'$ tels que les segments $[q, x]$ et $[q', x']$ sont de même type, la distance $d(x, x')$ est inférieure ou égale à la distance $d(q, q')$ entre les sommets des deux chambres de Weyl.* \square

II.2.4 Enveloppe convexe de Weyl de deux points.

Définition II.2.11 *On appelle polyèdre de Weyl de \mathbb{A} une intersection de racines affines de \mathbb{A} . L'enveloppe convexe de Weyl d'une partie B de \mathbb{A} , notée $\diamond(B)$ est le polyèdre de Weyl formé par l'intersection des racines affines de \mathbb{A} contenant B .*

Remarque. Dans [BrTi1], les intersections de racines affines sont appelées des parties *closes*, et $\diamond(B)$ est appelé *enclos* de B et noté $\text{cl}(B)$.

Proposition II.2.12 *Soient x et y deux points de Δ et A un appartement les contenant. L'enveloppe convexe de Weyl $\diamond(x, y)$ de $\{x, y\}$ dans A ne dépend pas du choix de l'appartement A contenant x et y . On l'appelle l'enveloppe convexe de Weyl de $\{x, y\}$. Elle est contenue dans tout appartement contenant x et y .*

Preuve. Soient f un appartement marqué et $a, b \in \mathbb{A}$ tels que $f(a) = x, f(b) = y$ et $b - a \in \bar{\mathbf{C}}$. Soit \mathbf{F} la facette vectorielle ouverte de \mathbb{A} contenant $b - a$. Alors on a $\diamond(a, b) = (a + \bar{\mathbf{F}}) \cap (b - \bar{\mathbf{F}})$. Soit f' un autre appartement marqué tel que $f'(a) = x$ et $f'(b) = y$. Alors les facettes $f(b - \mathbf{F})$ et $f'(b + \mathbf{F})$ sont de germes opposés en y car elles contiennent respectivement les extrémités $x = f'(a)$ et $z = f'(2b - a)$ d'un segment contenant y . Elles sont donc contenues dans un même appartement f'' par le lemme II.1.14, avec $f''(a) = x$ et $f''(b) = y$. L'appartement marqué f'' coïncide avec f' en a et sur $b + \bar{\mathbf{F}}$, donc sur $a + \bar{\mathbf{F}}$ et avec f sur $b - \bar{\mathbf{F}}$. Donc f et f' coïncident sur $\diamond(a, b) = (a + \bar{\mathbf{F}}) \cap (b - \bar{\mathbf{F}})$. \square

II.2.5 Isométries préservant le type des segments.

Lemme II.2.13 *Soit g une application d'une partie B de \mathbb{A} dans Δ isométrique, préservant le type des segments. Alors pour tous points a, b dans B , l'application g coïncide sur (l'intersection avec B de) l'enveloppe convexe de Weyl de $\{a, b\}$ avec tout appartement marqué f tel que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.*

Preuve. Supposons pour simplifier que le vecteur $b - a$ est dans la chambre de Weyl fermée fondamentale $\bar{\mathbf{C}}$ et soit \mathbf{F} la facette vectorielle ouverte de $\bar{\mathbf{C}}$ le contenant. Soit c un point de B dans $\diamond(a, b)$, c'est-à-dire tel que les vecteurs $c - a$ et $b - c$ sont dans $\bar{\mathbf{F}}$. Notons x, y et z les images de a, b et c par g . D'après le lemme II.1.19, le segment $[y, z]$ admet une subdivision

finie $y_0 = y, y_1, \dots, y_m = z$ dont chaque sous-segment est inclus dans un appartement contenant x . On suppose m minimal.

Soit f un appartement marqué tel que $x = f(a), y = f(b)$ et $y_1 = f(b_1)$ avec $b_1 \in \mathbb{A}$. On a $\Theta[y, y_1] = \lambda\Theta[y, z]$ avec $\lambda \in]0, 1]$, donc le segment $[b, b_1]$ est de type $\lambda\Theta[b, c]$. De plus $\triangleleft_b(a, b_1) = \triangleleft_y(x, z) \leq \tilde{\triangleleft}_y(x, z) = \triangleleft_b(a, c)$.

Or pour tous vecteurs u, v de \mathbf{F} , il n'est pas difficile de voir que v est l'unique vecteur de $\overline{W}v$ tel que $\triangleleft(u, v)$ est minimal.

On a donc nécessairement que $b_1 - b = \lambda(c - b)$ et donc que b_1 est le point correspondant à y_1 sur le triangle de comparaison a, b, c pour le triangle x, y, z de Δ .

Si $m > 1$, en appliquant ce même raisonnement à un appartement marqué f' tel que $x = f'(a), y_1 = f'(b)$ et $y_2 = f'(b_2)$ avec $b_2 \in \mathbb{A}$, on obtient que $b_2 - b_1 = \lambda_2(c - b_1)$ avec $\lambda_2 \in]0, 1]$, donc que $b_2 \in \diamond(a, b_1)$. Donc, comme f et f' coïncident sur $\diamond(a, b_1)$, on a $f(b_2) = y_2$, ce qui contredit la minimalité de m . On a donc $m = 1, y_1 = z, \lambda = 1$ et $b_1 = c$, d'où $f(c) = z$, ce qui conclut. \square

Corollaire II.2.14 *Une application g de \mathbb{A} dans Δ est une isométrie préservant le type des segments si et seulement si g est une limite inductive d'appartements marqués, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec un appartement marqué sur toute partie bornée de \mathbb{A} .*

Preuve. Soit B une partie bornée de \mathbb{A} . Il existe a et b dans \mathbb{A} tels que leur enveloppe convexe de Weyl $\diamond(a, b)$ contient B . Si g est une isométrie préservant le type des segments, elle coïncide avec un appartement marqué sur $\diamond(a, b)$ par la proposition ci-dessus, donc sur B . \square

Corollaire II.2.15 *L'image d'une chambre de Weyl de Δ par une isométrie de Δ préservant le type des segments coïncide avec une chambre de Weyl de Δ dans toute partie bornée.* \square

II.2.6 Le système maximal d'appartements.

Proposition II.2.16 *Soit (Δ, \mathcal{A}) un immeuble affine modelé sur (\mathbb{A}, W) . Il existe un unique système d'appartements $\overline{\mathcal{A}}$ contenant \mathcal{A} et maximal pour l'inclusion. Il est formé de toutes les applications g de \mathbb{A} dans Δ qui sont des isométries préservant le type des segments, ou, de manière équivalente, des limites inductives d'éléments de \mathcal{A} .*

Preuve. Il est clair que tout système d'appartements contenant \mathcal{A} est formé d'isométries de \mathbb{A} dans Δ préservant le type des segments, donc inclus dans $\overline{\mathcal{A}}$. Montrons que $(\Delta, \overline{\mathcal{A}})$ est bien un immeuble affine. Les axiomes (A1), (A2) et (A3), et les propriétés (A3') et (GG) sont aisément vérifiés, car les éléments de $\overline{\mathcal{A}}$ sont des limites inductives d'éléments de \mathcal{A} , donc par définition coïncident avec un élément de \mathcal{A} dans tout borné de Δ . Montrons la propriété (CO), ce qui conclut d'après le théorème II.1.22.

Soient C et C' deux chambres de Weyl de $(\Delta, \overline{\mathcal{A}})$, de même sommet x , opposées en x . Soient f et f' dans $\overline{\mathcal{A}}$ tels que $C = f(a + \mathbf{C}), C' = f'(a - \mathbf{C})$ et $f(a) = f'(a) = x$ avec $a \in \mathbb{A}$. Soient b dans \mathbf{C} et n un entier. Soit g_n dans \mathcal{A} tel que $g_n(a + nb) = f(a + nb) = y_n$ et $g_n(a - nb) = f'(a - nb) = y'_n$. Comme C et C' sont opposées en x , le point x est le milieu du segment joignant y_n à y'_n , donc, par l'axiome (A2), $g_n(a) = x$. Comme f et f' sont des isométries préservant le type des segments, par le lemme II.2.13, on a que g_n coïncide avec

f sur $\diamond(a, a + nb)$ et avec f' sur $\diamond(a - nb, a)$. De plus, pour tout $p \geq n$, on a que g_n coïncide avec g_p sur $B_n = \diamond(a - nb, a + nb)$. Toute partie bornée de \mathbb{A} est incluse dans B_n pour n assez grand, donc la suite (g_n) admet une limite inductive $g \in \overline{\mathcal{A}}$ qui coïncide avec f sur $a + \mathbf{C}$ et avec f' sur $a - \mathbf{C}$, ce qui conclut. \square

Proposition II.2.17 *Le système d'appartement est maximal si et seulement si tout rayon géodésique et toute géodésique est contenu dans un appartement.*

Preuve. Soit \mathcal{A}' un système d'appartements contenant \mathcal{A} et $f \in \mathcal{A}'$. Soit $v \in \mathbf{C}$. Si la géodésique $t \mapsto f(tv)$ est contenue dans l'image d'un appartement marqué g de \mathcal{A} , qu'on peut choisir égal à f sur $\mathbb{R}v$ par les axiomes (A1) et (A2) pour \mathcal{A}' , alors f et g coïncident sur $\diamond(-tv, tv)$ pour tout t (par la proposition II.2.12), donc sur \mathbb{A} , et $f \in \mathcal{A}$, ce qui prouve une des deux implications.

Supposons que le système d'appartements est maximal. Comme deux chambres de Weyl opposées en un point sont contenues dans un même appartement, il suffit de le montrer pour un rayon géodésique $r : [0, +\infty[\rightarrow \Delta$. Notons $x = r(0)$, et pour tout n entier $y_n = r(n)$. Soient a dans \mathbb{A} et $b = \Theta[x, y_1]$ dans une facette ouverte \mathbf{F} de la chambre de Weyl fondamentale \mathbf{C} . Alors, pour tout n , il existe un appartement marqué f_n tel que $f_n(a + nb) = y_n$ et $f_n(a) = x$. Par le lemme II.1.14, on peut même choisir f_n coïncidant avec f_1 sur $a - \mathbf{D}$, où \mathbf{D} est la réunion des chambres de Weyl vectorielles fermées de \mathbb{A} contenant la facette $-\mathbf{F}$.

Pour tout $p \geq n$, on a alors que f_p coïncide avec f_n sur l'enveloppe convexe B_n de $a + nb$ et $a - \mathbf{D}$ dans \mathbb{A} . Toute partie bornée de \mathbb{A} est incluse dans B_n pour n assez grand, donc la suite (f_n) admet une limite inductive f , qui est un appartement marqué car le système d'appartements est clos par limite inductive. L'image de f contient x et y_n pour tout n , donc le rayon r . \square

Rappelons que le bord $\partial\mathbb{A}$ de \mathbb{A} désigne la sphère unité de \mathbb{A} , munie de la distance angulaire (qui s'identifie au bord de \mathbb{A} comme espace métrique CAT(0)), et ∂ l'application canonique de l'espace vectoriel \mathbb{A} privé du vecteur nul dans $\partial\mathbb{A}$. Rappelons également que le complexe simplicial Δ^∞ est marqué par le type $\Theta : \Delta^\infty \rightarrow \Sigma_{\leq \mathbf{C}}^\infty$, où $\Sigma_{\leq \mathbf{C}}^\infty$ est l'ensemble des bords $\partial\mathbf{F}$ des facettes \mathbf{F} non réduites à $\{0\}$ de la chambre de Weyl vectorielle fondamentale \mathbf{C} .

La réalisation géométrique modelée sur $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ de l'immeuble sphérique combinatoire abstrait Δ^∞ est l'ensemble $X = \{(f, x); f \in \Delta^\infty, x \in \Theta(f)\}$, muni de l'unique distance faisant des injections canoniques $\partial\mathbb{A} \rightarrow X$ induites par les appartements de Δ^∞ des isométries.

On notera que cette réalisation géométrique est la même que la réalisation géométrique standard du complexe simplicial Δ^∞ (voir par exemple [Ron]) si et seulement si $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est essentiel (n'a pas de facteur trivial). Dans le cas contraire, on prendra garde que les chambres de cette réalisation géométrique ne sont pas des simplexes sphériques, mais leur joint sphérique avec la sphère bordant le facteur trivial de \mathbb{A} , la réalisation géométrique elle-même étant alors le joint sphérique de cette sphère triviale et de la réalisation géométrique standard.

L'axiome (A4) et la proposition ci-dessus entraînent le corollaire suivant.

Corollaire II.2.18 *Soit (Δ, \mathcal{A}) un immeuble affine modelé sur (\mathbb{A}, W) . Notons $\partial_\infty\Delta$ le bord de Δ comme espace métrique CAT(0) (voir paragraphe II.2.3). La réalisation géométrique*

modelée sur $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ de l'immeuble sphérique Δ^∞ à l'infini de Δ est isométrique au sous-espace (convexe) de $\partial_\infty\Delta$, formé par les extrémités des rayons contenus dans un appartement, muni de la distance induite par la distance de Tits (voir par exemple [BrHa] pour sa définition) sur $\partial_\infty\Delta$.

Dans le cas où le système d'appartements est maximal, le bord de Δ comme espace métrique CAT(0) est donc la réalisation géométrique modelée sur $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ de l'immeuble sphérique Δ^∞ . \square

II.2.7 La définition de Kleiner-Leeb.

B. Kleiner et B. Leeb ont développé dans [KILe] une définition géométrique des immeubles affines complets. On donne ci-dessous leur définition, légèrement modifiée pour englober le cas non complet.

Définition II.2.19 Soit Δ un espace métrique CAT(0) vérifiant la propriété suivante : de tout point est issu un rayon géodésique asymptote à un rayon donné. Soit \mathcal{A} une collection invariante par précomposition par W d'isométries de \mathbb{A} dans Δ appelées cartes, dont les images sont appelées appartements. On dit que (Δ, \mathcal{A}) est un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb modelé sur (\mathbb{A}, W) si les propriétés suivantes sont vérifiées.

(EB3) Tout segment, rayon géodésique et géodésique est contenu dans un appartement.

(EB4) Les changements de cartes sont induits par des éléments de W .

En particulier (Δ, \mathcal{A}) vérifie donc les axiomes (A1), (A2) et (A3) de la section II.1.2, et le type Θ des segment est bien défini (cf. paragraphe II.1.3). On requiert pour tous x, y, z dans Δ que

(EB2) **Rigidité des angles.** L'angle $\sphericalangle_x(y, z)$ est dans l'ensemble fini $D(\Theta[x, y], \Theta[x, z])$ des valeurs prises par l'angle entre un vecteur de \mathbb{A} de même type que le segment $[x, y]$ et un vecteur de \mathbb{A} de même type que le segment $[x, z]$.

Proposition II.2.20 La paire (Δ, \mathcal{A}) est un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb si et seulement si c'est un immeuble affine au sens de Tits avec \mathcal{A} maximal.

Preuve. Soit (Δ, \mathcal{A}) un immeuble affine, avec \mathcal{A} maximal. Alors par définition de la métrique canonique d sur Δ (voir II.1.2), les appartements marqués sont des isométries et Δ est alors un espace métrique CAT(0) (cf. Prop. II.2.9). Montrons que de tout point y est issu un rayon géodésique asymptote à un rayon r donné. Par la proposition II.2.17, le rayon r est inclus dans un appartement donc de la forme $t \mapsto f(a + tv)$ avec $f \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{A}$ et v dans une facette \mathbf{F} de \mathbf{C} . Par le corollaire II.1.9, il existe une facette de sommet y asymptote à la facette $f(a + \mathbf{F})$, donc (voir Prop. II.1.5) $f' \in \mathcal{A}$ et $a' \in \mathbb{A}$ tels que la distance entre $f(a + \cdot)$ et $f'(a' + \cdot)$ est bornée sur \mathbf{F} . Le rayon $t \mapsto f'(a' + tv)$ est donc asymptote à r , donc convient.

Comme deux segments issus de x ont des sous-segments issus de x contenus dans un même appartement (par la propriété (GG)), l'axiome (EB2) est clair, et l'axiome (EB3) est vérifié d'après l'axiome (A3) et la proposition II.2.17.

Donc Δ est bien un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb.

Si Δ est un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb, on a les axiomes (A1), (A2) (car les appartements sont des convexes fermés de Δ) et (A3). Si (Δ, \mathcal{A}) est un immeuble affine au sens de Tits, alors \mathcal{A} est nécessairement maximal d'après la proposition II.2.17.

D'après le théorème II.1.22, il suffit de voir que les propriétés (CO) et (GG) sont vérifiées. Cela découle des lemmes suivants de [KlLe], dont les démonstrations n'utilisent que les propriétés énoncées dans la définition ci-dessus.

Lemme II.2.21 *Deux segments issus d'un point x ont des sous-segments non triviaux issus de x bordant un triangle plat (dans le cas où ces deux segments sont opposés, ce triangle est dégénéré).* \square

L'espace $\delta_x\Delta$ des directions en x de Δ comme espace métrique CAT(0) (voir section I.1), muni de la distance angulaire \angle_x , est donc égal à l'espace des germes de segments issus de x . On a une application canonique $\delta_x : \Delta - \{x\} \longrightarrow \delta_x\Delta$ qui à y associe le germe du segment \overline{xy} .

Lemme II.2.22 [KlLe, Lemmas 3.4.1, 3.4.2] *Si C est une chambre de Weyl ouverte de Δ de sommet x , alors son image par δ_x est un ouvert de $\delta_x\Delta$.*

Deux chambres de Weyl C et C' de même sommet x ont leurs images par δ_x disjointes ou égales. \square

Notons que, comme une chambre de Weyl est l'enveloppe convexe de ses facettes de dimension 1, qui sont des rayons géodésiques, en nombre fini, deux chambres de Weyl de sommet x qui ont même image par δ_x ont même germe en x (i.e. coïncident sur un voisinage de x).

Montrons maintenant que la propriété (CO) est vérifiée. Soient C et C' deux chambres de Weyl de sommet x , opposées en x . Soit ρ une géodésique telle que $\rho(0) = x$, $\rho(\mathbb{R}_+) \subset C$ et $\rho(\mathbb{R}^-) \subset C'$. D'après (EB3), il existe un appartement A contenant ρ . D'après le lemme suivant, A contient nécessairement C et C' , ce qui conclut.

Lemme II.2.23 *Deux chambres de Weyl ouvertes C et C' de même sommet x , contenant un même rayon géodésique r issu de x , coïncident.*

Preuve. L'intersection $\overline{C'} \cap \overline{C}$ est convexe et fermée dans \overline{C} et contient r . Pour tout y dans cette intersection, notons C_y et C'_y les sous-chambres de Weyl respectives de C et C' de sommet y et r_y le rayon de C parallèle à r issu de y , qui est inclus dans $\overline{C} \cap \overline{C'}$ par convexité. D'après le lemme II.2.22 ci-dessus, les chambres de Weyl ouvertes C_y et C'_y , qui contiennent r_y , ont même germe, donc coïncident sur un voisinage de y . Par conséquent $\overline{C'} \cap \overline{C}$ contient un voisinage de y par convexité, donc c'est un ouvert. On en conclut que $\overline{C} = \overline{C'}$. \square

Montrons enfin que la propriété (GG) est vérifiée (on reprend les arguments de la démonstration de [KlLe, Prop. 3.5.1]). Soient C et C' deux chambres de Weyl ouvertes de sommet x , et y et z deux points respectifs de C et C' . D'après le lemme II.2.21, on peut supposer que le triangle x, y, z est plat. On peut supposer que $\angle_x(y, z) < \pi$ (quitte à changer z). L'image par δ_x du segment $[y, z]$ est alors un segment géodésique σ de $\delta_x\Delta$ pour la distance angulaire \angle_x .

Comme le germe de chambre $\delta_x C'$ est un ouvert (par le lemme II.2.22), il contient σ au voisinage de $\delta_x z$. On peut donc prolonger σ dans un germe d'appartement contenant $\delta_x C'$ en une géodésique, jusqu'à un point $\delta_x y'$ tel que $\angle_x(y, y') = \pi$. Soit A un appartement contenant le segment $[y, y']$. D'après le lemme II.2.22 ci-dessus, l'appartement A contient un germe de C . Comme $\delta_x C$ est un ouvert de $\delta_x \Delta$, il contient $\delta_x z'$ pour $z' \in]y, z]$ suffisamment proche de y . Donc $\delta_x A$ contient la géodésique $\delta_x([z', y'])$ qui contient $\delta_x z$ par unicité de la géodésique entre deux points de $\delta_x \Delta$ à distance angulaire strictement inférieure à π .

Donc A contient $\delta_x C'$ par le lemme II.2.22, ce qui conclut. \square

On suppose désormais que le système d'appartements de Δ est maximal. La proposition suivante et le principe de sa démonstration sont extraits de [KlLe].

Proposition II.2.24 [KlLe, Prop. 4.6.1, Corollary 4.6.2] *Tout sous-espace E totalement géodésique, euclidien, de Δ est inclus dans un appartement. Les appartements sont donc les sous-espaces totalement géodésiques euclidiens de dimension maximale. Une isométrie de Δ envoie donc un appartement sur un appartement.*

Preuve. Soient x un point de E et c une géodésique de E d'origine x telle que, si $u \in \overline{\mathbf{C}}$ est le type du segment $[c(0), c(1)]$, la dimension de la facette vectorielle ouverte \mathbf{F} de \mathbb{A} contenant u est maximale. Soit ε l'angle minimal dans \mathbb{A} entre le vecteur u et la réunion des facettes vectorielles fermées de \mathbb{A} de dimension inférieure ou égale à celle de \mathbf{F} , différentes de \mathbf{F} . On a $\varepsilon > 0$.

Soit A un appartement contenant c . L'intersection de A et de E est un convexe fermé dans A et dans E . Soit r un rayon de E issu de x tel que l'angle en x entre r et c est strictement inférieur à ε . Montrons que r est inclus dans A .

Supposons qu'au contraire, l'ensemble des réels positifs t tels que $r(t)$ est dans A , qui est un intervalle fermé de \mathbb{R}_+ contenant 0, est de la forme $[0, s]$ avec s fini (éventuellement nul). Soit c' la géodésique de E parallèle à c , issue de $r(s)$. Comme c' est incluse dans l'enveloppe convexe fermée de $r(s)$ et c dans l'espace euclidien E , elle est également incluse dans A . On en déduit que le type dans $\overline{\mathbf{C}}$ du segment $[c'(0), c'(1)]$ est u . Comme E est euclidien, l'angle en $r(s)$ entre r et c' est égal à l'angle en x entre r et c , donc strictement inférieur à ε . Les rayons r et c' sont initialement contenus dans un appartement. Il existe donc un appartement marqué f , un vecteur v unitaire de \mathbb{A} et un réel strictement positif η , tels que $f(0) = r(s)$, $f(\eta v) = c'(\eta)$ et $f(\eta v) = r(s + \eta)$. Soit \mathbf{F}' la facette vectorielle de \mathbb{A} contenant v . Comme v est de même type dans $\overline{\mathbf{C}}$ que le segment $[r(0), r(1)]$, la dimension de \mathbf{F}' est inférieure ou égale à celle de \mathbf{F} d'après l'hypothèse faite sur c . Or l'angle dans \mathbb{A} entre u et v est strictement inférieur à ε . On en déduit que $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, par définition de ε , donc que ηv appartient à \mathbf{F} . Or l'enveloppe convexe de Weyl de la droite $\mathbb{R}u$ de \mathbb{A} est égale au sous-espace vectoriel engendré par \mathbf{F} . Par conséquent l'image de ηv par f , qui est $r(s + \eta)$, appartient à tout appartement contenant c' (par la proposition II.2.12), donc dans A , ce qui est impossible.

Nous avons donc obtenu que A contient la géodésique c et le cône ouvert de E de sommet x , centré sur le rayon $c(\mathbb{R}_+)$ et d'angle $\varepsilon > 0$, donc A contient E par convexité. \square

Rappelons qu'un immeuble combinatoire est dit *épais* si chacune de ses facettes de codimension 1 borde au moins 3 chambres distinctes.

Une géodésique de Δ est dite *régulière* (resp. *singulière*) si son type de direction est dans l'intérieur (resp. dans le bord) de la chambre de Weyl vectorielle fermée fondamentale $\overline{\mathbf{C}}$ de

A. Une géodésique régulière est contenue dans un unique appartement de Δ (cela résulte de la proposition II.2.12). Si Δ^∞ est épais, la réciproque est vraie, comme le montre la proposition suivante.

Proposition II.2.25 *L'immeuble sphérique à l'infini Δ^∞ est épais si et seulement si les géodésiques régulières sont exactement celles qui sont contenues dans un unique appartement de Δ .*

Preuve. Si toute géodésique singulière est contenue dans au moins deux appartements distincts de Δ , alors tout mur de Δ^∞ est contenu dans au moins deux appartements distincts de Δ^∞ , donc borde au moins 3 demi-appartements distincts, ce qui entraîne que Δ^∞ est épais.

Réciproquement, supposons l'immeuble sphérique à l'infini Δ^∞ épais. Toute géodésique singulière r est contenue dans un mur M de Δ contenu dans un appartement A . Le bord à l'infini $M(\infty)$ de M est un mur de l'immeuble sphérique épais Δ^∞ , donc il existe un demi-appartement à l'infini h bordé par $M(\infty)$ non inclus dans l'appartement à l'infini $A(\infty)$. Soient a_1 et a_2 les deux demi-appartements de $A(\infty)$ bordés par $M(\infty)$. Pour $i = 1, 2$, soit A_i l'appartement de Δ de bord à l'infini l'appartement $a_i \cup h$ de Δ^∞ . L'axiome (A5) entraîne que l'un des deux appartements A_1, A_2 (distincts de A) contient le mur M , donc la géodésique r . \square

Proposition II.2.26 *Supposons l'immeuble sphérique à l'infini Δ^∞ épais. Alors toute isométrie de Δ préserve les chambres de Weyl.*

Preuve. Soit g une isométrie de Δ . D'après la proposition II.2.24, l'image d'un appartement par g est un appartement. Par conséquent, comme Δ^∞ est épais, la proposition II.2.25 entraîne que g préserve les géodésiques singulières.

Soit A un appartement de Δ . Les chambres de Weyl de A de sommet un point x donné sont les composantes connexes du complémentaire dans A de la réunion des géodésiques singulières de A passant par x . On en déduit que l'image par g d'une chambre de Weyl de A est une chambre de Weyl de l'appartement $g(A)$. \square

II.3 Classification des isométries.

II.3.1 Énoncés.

Soit $(\mathbb{A}, \overline{W})$ un groupe de réflexions fini. Soit ψ une isométrie d'une chambre de Weyl vectorielle fermée \overline{C} de \mathbb{A} dans une autre chambre de Weyl vectorielle de \mathbb{A} . Soit $J \subset \overline{C}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de \overline{C} orthogonaux à tout vecteur de \overline{C} fixé par ψ . On remarquera que si ψ ne fixe pas de vecteur non nul, alors $J = \partial\overline{C}$ tout entier. Notons que si \overline{W} est irréductible, alors J est non vide si et seulement si ψ ne fixe pas de vecteur non nul, car \overline{C} est alors un cône sur un simplexe sphérique de diamètre strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ (cela découle par exemple de [Bou3, Chap. V, §3, Lemme 6 et Prop. 7]), donc ne contient pas deux vecteurs non nuls orthogonaux, et J est alors égal à $\partial\overline{C}$ tout entier.

Supposons que J est non vide (cette hypothèse est notamment vérifiée, par la remarque précédente, pour $\psi = -\text{Id}$, qui ne fixe pas de vecteur non nul). L'angle entre un vecteur u de J et son image par ψ est une fonction continue sur J compact, non nulle, donc son minimum $\alpha_0(\psi)$ est non nul. On note $\alpha_0(\overline{W})$ le minimum de $\alpha_0(\psi)$ pour ψ comme ci-dessus (avec J non vide). Si \overline{W} est essentiel, les chambres de Weyl vectorielles de \mathbb{A} , qui sont en nombre fini, sont des cônes simpliciaux, donc il n'y a qu'un nombre fini d'isométries ψ d'une chambre de Weyl vectorielle de \mathbb{A} dans une autre chambre de Weyl vectorielle de \mathbb{A} , et par conséquent $\alpha_0(\overline{W})$ est non nul.

Par exemple, si \mathbb{A} est de dimension 1, et $\overline{W} = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$, alors on a clairement $\alpha_0(\overline{W}) = \pi$. Si \mathbb{A} est de dimension 2, et \overline{W} est engendré par deux réflexions par rapport à deux droites formant un angle de $\frac{\pi}{p}$, avec p entier au moins égal à 2, alors il est facile de voir que $\alpha_0(\overline{W}) = \frac{\pi}{p}$.

Dans cette section, on démontre le résultat suivant.

Théorème II.3.1 *Soit $(\mathbb{A}, \overline{W})$ un groupe de réflexions fini essentiel, et $\alpha_0 = \alpha_0(\overline{W})$. Soit Δ un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$. Soit g une isométrie de Δ préservant les chambres de Weyl. Alors g induit une isométrie semi-simple du complété $\overline{\Delta}$ de l'espace métrique Δ , plus précisément, pour tout point p de Δ , il existe, à distance inférieure ou égale à $\frac{d(p, gp) + \ell(g)}{2 \sin(\alpha_0/2)} \leq \frac{1}{\sin(\alpha_0/2)} d(p, gp)$ de p , soit un point de $\overline{\Delta}$ fixé par g , soit une géodésique de $\overline{\Delta}$ translatée par g .*

Corollaire II.3.2 *Soit Δ est un immeuble affine complet. Alors toute isométrie de Δ préservant les chambres de Weyl est semi-simple, i.e. fixe un point ou translate une géodésique.*

Remarque II.3.3 *Tout automorphisme d'un immeuble affine préserve les chambres de Weyl, ainsi que (quitte à prendre le système d'appartements maximal, ce qui ne change rien aux résultats étudiés ici) toute isométrie préservant le type des segments.*

Si l'immeuble sphérique à l'infini de Δ est épais, alors (pour le système d'appartements maximal) toute isométrie de Δ préserve les chambres de Weyl (cf. Prop II.2.26).

Preuve de II.3.2. Le groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ se décompose en produit d'un groupe de réflexions fini trivial $(\mathbb{A}_0, \overline{W}_0 = \{\text{Id}\})$ et d'un groupe de réflexions fini essentiel $(\mathbb{A}', \overline{W}')$. L'immeuble affine complet Δ se décompose parallèlement (voir le corollaire II.2.4) en produit d'un immeuble affine Δ_0 trivial et d'un immeuble affine complet Δ' de type $(\mathbb{A}', \overline{W}')$. Une isométrie g de Δ préservant les chambres de Weyl est alors de forme (g_0, g') où g_0 est une isométrie de Δ_0 , et g' est une isométrie de Δ' préservant les chambres de Weyl (voir Prop. II.2.8). On a $\text{Min}_\Delta(g) = \text{Min}_{\Delta_0}(g_0) \times \text{Min}_{\Delta'}(g')$. D'après le théorème II.3.1 appliqué à Δ' et g' , l'ensemble minimal $\text{Min}_{\Delta'}(g')$ de g' est non vide. D'autre part, une isométrie d'un espace euclidien est semisimple, donc $\text{Min}_{\Delta_0}(g_0)$ est non vide. On en conclut que $\text{Min}_\Delta(g)$ est non vide. \square

II.3.2 Démonstration du théorème II.3.1.

Soit g une isométrie Δ conservant les chambres de Weyl. Soit $p \in \Delta$. Supposons que p n'appartient pas à $\text{Min}(g)$. Soit a un réel tel que $\ell(g) < a < d(p, gp)$. Alors le convexe fermé non vide $B = \{x \in \Delta / d(x, gx) \leq a\}$ ne contient pas p .

Soit A un appartement passant par p , rencontrant B . L'intersection de B et de A est un convexe fermé non vide de A . Soit q la projection orthogonale de p sur $B \cap A$ (dans l'espace euclidien A). Soit \overline{C} une chambre de Weyl fermée de A de sommet q , contenant p (voir la figure II.3).

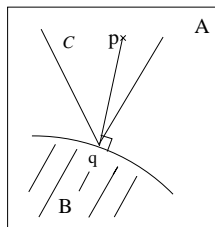
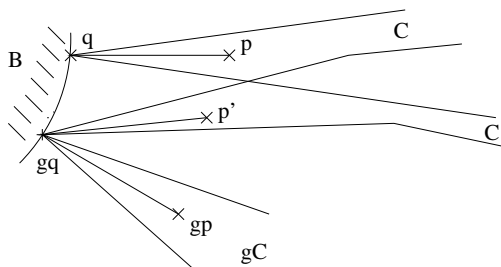


FIG. II.3 –

Notons $\overline{C'}$ l'unique chambre de Weyl fermée de sommet gq asymptote à \overline{C} et ϕ l'unique isométrie envoyant \overline{C} sur $\overline{C'}$ en préservant le type des segments. Soit p' le point de $\overline{C'}$ tel que $p' = \phi(p)$. Comme \overline{C} et $\overline{C'}$ sont asymptotes, on a alors $d(p, p') \leq d(q, gq) \leq a$ d'après le corollaire II.2.10. D'où $d(p', gp) \leq d(p, gp) + a$ par inégalité triangulaire. Soit $\alpha = \sphericalangle_{gq}(p', gp)$. Alors $2d(q, p) \sin \frac{\alpha}{2} \leq d(p', gp)$ par les propriétés CAT(0).

Si $\alpha \geq \alpha_0$, ce que nous allons montrer ci-dessous, on a $\sin \frac{\alpha}{2} \geq \sin \frac{\alpha_0}{2}$, car α et α_0 sont dans $[0, \pi]$ et la fonction sinus est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc pour tout $a > \ell(g)$ on a alors

$$d(p, B) \leq \frac{d(p, gp) + a}{2 \sin(\alpha_0/2)}$$



Montrons que $\alpha \geq \alpha_0$. Il existe, par la propriété (GG) (voir prop. II.1.11), un appartement A' passant par gq contenant des germes en gq des chambres de Weyl $g\overline{C}$ et $\overline{C'}$ (voir la figure II.4). On identifie A' à \mathbb{A} par un appartement marqué f avec $f(0) = gq$. Soient u le vecteur unitaire de \mathbb{A} tel que $f(\varepsilon u)$ est sur le segment joignant gq à p' , pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et ψ l'isométrie induite par $g \circ \phi^{-1}$ de la chambre de Weyl vectorielle \overline{C} de \mathbb{A} correspondant au germe de $\overline{C'}$, dans la chambre de Weyl vectorielle de \mathbb{A} correspondant au germe de $g\overline{C}$. Soit v un vecteur de \mathbb{A} fixé par ψ , montrons que v est orthogonal à u .

En effet, si v est non nul (sinon il est clairement orthogonal à u), quitte à multiplier v par $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $x' = f(v)$ est dans $\overline{C'}$ et si x est le point de \overline{C} tel que $\phi(x) = x'$, on a $gx = x'$. Or, comme les chambres de Weyl \overline{C} et $\overline{C'}$ sont asymptotes et les segments $[q, x]$ et $[gq, x']$ de même type, on a $d(x, x') \leq d(q, gq) \leq a$ par le corollaire II.2.10, donc $d(x, gx) \leq a$ et $x \in B$. On a donc $\sphericalangle_q(x, p) \geq \frac{\pi}{2}$ par les propriétés de la projection orthogonale dans

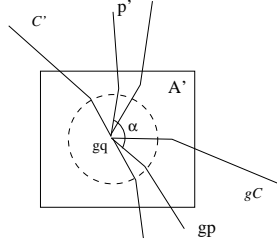


FIG. II.4 -

l'appartement A . Rappelons que, pour un groupe de réflexions fini essentiel, une chambre de Weyl est un cône sur un simplexe sphérique de diamètre inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (voir [Bou3, Chap. V, §3, Lemme 6 et Prop. 7]). Donc $\angle_q(x, p) = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\angle_{gq}(x', p') = \frac{\pi}{2}$, donc v est orthogonal à u . On en déduit que u appartient à l'ensemble J des vecteurs unitaires de \overline{C} orthogonaux à tout vecteur de \overline{C} fixé par ψ .

L'angle $\alpha = \angle_{gq}(p', gp)$ est égal à l'angle dans \mathbb{A} entre le vecteur u et son image par ψ , donc il est supérieur ou égal à α_0 par définition de α_0 .

Le complété $\overline{\Delta}$ de Δ est CAT(0) pour la métrique induite, et g s'étend naturellement en une isométrie de $\overline{\Delta}$ et on a $\inf_{x \in \overline{\Delta}} d(x, gx) = \ell(g)$. Si on note $\overline{B}_g(a) = \{x \in \overline{\Delta} / d(x, gx) \leq a\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la famille $\{\overline{B}_g(a); a > \ell(g)\}$ est une famille décroissante de convexes fermés non vides de $\overline{\Delta}$, d'intersection l'ensemble $\text{Min}_{\overline{\Delta}}(g) = \{x \in \overline{\Delta} / d(x, gx) = \ell(g)\}$.

Dans un espace CAT(0) complet, une intersection décroissante de convexes fermés bornés non vides est non vide (voir la proposition I.1.4).

Or on vient de montrer que pour tout $a > \ell(g)$, la distance de p à $\overline{B}_g(a)$ est inférieure à $\frac{d(p, gp) + a}{2 \sin(\alpha_0/2)}$ (car $\overline{B}_g(a)$ contient B). Qui plus est, comme pour $a' \leq a$, on a $\overline{B}_g(a') \subset \overline{B}_g(a)$, la distance de p à $\overline{B}_g(a)$ est inférieure à celle de p à $\overline{B}_g(a')$, donc, en prenant la borne inférieure sur a' ,

$$d(p, \overline{B}_g(a)) \leq \frac{d(p, gp) + \ell(g)}{2 \sin(\alpha_0/2)}.$$

Alors pour tout $a > \ell(g)$, l'intersection de $\overline{B}_g(a)$ avec la boule fermée de centre p et de rayon $\frac{d(p, gp) + \ell(g)}{2 \sin(\alpha_0/2)}$, qui est un convexe fermé borné de $\overline{\Delta}$, est non vide. Donc l'intersection de cette famille décroissante de convexes fermés bornés est non vide et

$$d(p, \text{Min}_{\overline{\Delta}}(g)) \leq \frac{d(p, gp) + \ell(g)}{2 \sin(\alpha_0/2)}. \quad \square$$

Chapitre III

Immeubles classiques

Dans tout ce chapitre, \mathbb{F} désigne un corps valué, i.e. un corps commutatif muni d'une valuation $v : \mathbb{F}^* \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On dira que v est discrète (resp. dense) si son image, qui est un sous-groupe additif de \mathbb{R} , est discrète (resp. dense). Soit $|\cdot| = \exp(-v(\cdot))$ la valeur absolue sur \mathbb{F} associée. Elle est ultramétrique, c'est-à-dire vérifie l'inégalité triangulaire ultramétrique $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$ pour tous x et y de F .

Le corps \mathbb{F} est muni de la topologie induite par la valeur absolue. On note \mathcal{O} l'anneau de valuation de \mathbb{F} , défini par $\mathcal{O} = \{a \in \mathbb{F}, |a| \leq 1\}$. Soit n un entier non nul. On note V un espace vectoriel sur \mathbb{F} de dimension finie n , muni de la topologie induite par celle de \mathbb{F} . On note $\mathbb{P}V$ l'espace projectif de V . On note Σ_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

III.1 Construction de l'immeuble de $GL_n(\mathbb{F})$

Cette section est consacrée à la construction de l'immeuble de Bruhat-Tits Δ de $GL_n(\mathbb{F})$ par les normes ultramétriques sur V , et à la vérification des axiomes des immeubles affines pour Δ .

La construction de cet espace est due dans le cas localement compact à [GoIw] (voir aussi [Ger]). Bruhat et Tits ont vérifié dans [BrTi2], dans le cas général (et pour tous les groupes classiques), que cet espace est isomorphe à l'immeuble de Bruhat-Tits introduit dans [BrTi1]. (L'existence de [Ger] et [BrTi2] nous a été signalée par F. Choucroun après qu'une première version de [Par1] ait été écrite.)

III.1.1 Normes ultramétriques.

Dans cette section, après avoir donné les définitions de base autour des normes ultramétriques, nous montrerons quelques résultats techniques sur ces normes qui serviront à vérifier les axiomes pour l'immeuble de $GL_n(\mathbb{F})$.

Définition III.1.1 *On dit qu'une application $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme ultramétrique sur V si elle vérifie*

- $\eta(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.
- $\eta(av) = |a|\eta(v)$ pour tous $a \in \mathbb{F}$ et $v \in V$.

– $\eta(u + v) \leq \max(\eta(u), \eta(v))$ pour tous $u, v \in V$.

On note \mathcal{U} l'ensemble des normes ultramétriques sur V . On définit un ordre partiel sur les normes ultramétriques par

$$\eta \leq \eta' \text{ si et seulement si } \eta(v) \leq \eta'(v) \text{ pour tous } v \in V.$$

Le groupe $G = \text{GL}(V)$ agit naturellement sur l'ensemble \mathcal{U} des normes ultramétriques par précomposition, avec $g.\eta = \eta \circ g^{-1}$ pour tout g dans G et pour toute norme ultramétrique η .

Soit $\mathcal{F} = (V_1, \dots, V_m)$ une *décomposition* de V , c'est-à-dire une suite de sous-espaces vectoriels non nuls de V telle que $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$. On dit qu'une norme ultramétrique η est *adaptée* à la décomposition \mathcal{F} de V si $\eta(v_1 + \dots + v_m) = \sup_{i=1 \dots m} \eta(v_i)$ pour tous $v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m$. Dans ce cas η est bien sûr également adaptée à toute permutation de la décomposition \mathcal{F} , et pour toute norme ultramétrique η' , on a alors $\eta' \leq \eta$ si et seulement si $\eta' \leq \eta$ en restriction à chaque V_i pour tout entier i compris entre 1 et m . Si η_i est une norme ultramétrique sur V_i pour $i = 1, \dots, m$, alors il existe une unique norme ultramétrique η sur V adaptée à la décomposition \mathcal{F} coïncidant avec η_i sur V_i pour tout entier i compris entre 1 et m .

Si $m = n$, alors \mathcal{F} est un simplexe de $\mathbb{P}V$ (n points en position générale) et on dit que \mathcal{F} est une *croix* de V . Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V . Si $\mathcal{F} = (\mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_n)$, on dit que \mathcal{E} est une base de \mathcal{F} et que \mathcal{F} est la croix *associée* à \mathcal{E} . On dit que la base \mathcal{E} est *adaptée* à une norme ultramétrique η si la croix associée à \mathcal{E} l'est, c'est-à-dire quand pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ on a

$$\eta\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sup_{i=1 \dots n} |a_i| \eta(e_i).$$

Pour toute norme ultramétrique η' , on a alors $\eta' \leq \eta$ si et seulement si

$$\eta'(e_i) \leq \eta(e_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On dit qu'une norme ultramétrique η est *adaptable* s'il existe une base de V adaptée à η . Dans le cas où le corps \mathbb{F} est localement compact, toutes les normes ultramétriques sont adaptables (voir [GoIw]).

Remarque. Le vocabulaire utilisé est légèrement différent de celui de [BrTi2]. Les normes de [BrTi2] correspondent aux logarithmes de nos normes ultramétriques, et nos termes “adaptée”, “adaptable” correspondent aux termes “scindée”, “scindable” de [BrTi2].

Lemme III.1.2 *Soit η une norme ultramétrique adaptée à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de V . Soit $g \in G$ de matrice $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans la base \mathcal{E} . Alors on a*

$$|g_{ij}| \leq \frac{\eta(ge_j)}{\eta(e_i)} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{III.1}$$

et

$$|\det g| \prod_{i=1}^n \eta(e_i) \leq \prod_{j=1}^n \eta(ge_j) \tag{III.2}$$

Preuve. Comme η admet e_1, \dots, e_n pour base adaptée, on a

$$\eta(ge_j) = \eta\left(\sum_{i=1}^n g_{ij}e_i\right) = \sup_{i=1, \dots, n} |g_{ij}| \eta(e_i) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

d'où (III.1). Alors pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_n$, on a

$$\prod_{j=1}^n |g_{\sigma(j)j}| \leq \frac{\prod_{j=1}^n \eta(ge_j)}{\prod_{i=1}^n \eta(e_i)}$$

d'où (III.2), car $\det g = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n g_{\sigma(j)j}$ et donc

$$|\det g| \leq \sup_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{j=1}^n |g_{\sigma(j)j}| \leq \frac{\prod_{j=1}^n \eta(ge_j)}{\prod_{i=1}^n \eta(e_i)}. \quad (\text{III.3}) \quad \square$$

Corollaire III.1.3 (Changement de base adaptée.) Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux bases de V et $g \in G$ tel que $g\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Alors il existe une permutation σ dans Σ_n telle que pour toute norme ultramétrique η adaptée à la fois à \mathcal{E} et à \mathcal{E}' on a

$$\prod_{i=1}^n \eta(e'_i) = |\det g| \prod_{i=1}^n \eta(e_i) \quad (\text{III.4})$$

et

$$\eta(e'_j) = |g_{\sigma(j)j}| \eta(e_{\sigma(j)}) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{III.5})$$

Preuve. Soit η une norme ultramétrique adaptée à \mathcal{E} et à \mathcal{E}' . On applique le lemme III.1.2 à \mathcal{E} et g puis à \mathcal{E}' et g^{-1} , et on obtient (III.4). Par conséquent, les inégalités de (III.3) sont des égalités, en particulier on a $|\det g| = \sup_{\sigma \in \Sigma_n} |\prod_j g_{\sigma(j)j}|$, et il existe donc une permutation σ telle que

$$\prod_{j=1}^n |g_{\sigma(j)j}| = |\det g| = \prod_{j=1}^n \frac{\eta(e'_j)}{\eta(e_{\sigma(j)})} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Or d'après (III.1), on a $|g_{\sigma(j)j}| \leq \frac{\eta(e'_j)}{\eta(e_{\sigma(j)})}$ pour tout j , d'où l'égalité pour chaque j , c'est-à-dire (III.5). □

Corollaire III.1.4 (Stabilisateur d'une norme ultramétrique) Soit η une norme ultramétrique adaptée à une base \mathcal{E} de V . Un élément g de G fixe η si et seulement si

$$\max \{|g_{ij}|, |g^{ij}|\} \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

ou, de manière équivalente

$$|\det g| = 1 \text{ et } |g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

où (g_{ij}) et (g^{ij}) sont les matrices respectivement de g et de g^{-1} dans la base \mathcal{E} .

Preuve. Comme \mathcal{E} est adaptée à η , on a $\eta \leq g.\eta$ si et seulement si $g^{-1}.\eta \leq \eta$ si et seulement si $\eta(ge_j) \leq \eta(e_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n . Or $\eta(ge_j) = \sup_{i=1\dots n} |g_{ij}| \eta(e_i)$ pour tout entier j compris entre 1 et n , donc $\eta \leq g.\eta$ si et seulement si

$$|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

De plus, si g conserve η , alors $|\det g| = 1$ d'après (III.4) appliqué à $\mathcal{E}' = g\mathcal{E}$. Enfin, supposons que $|\det g| = 1$ et que pour tous i, j on a $|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n . Alors, comme g^{ij} est égal, au signe près, au déterminant de la matrice extraite de la matrice $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ obtenue en supprimant la ligne j et la colonne i , on a $|g^{ij}| \leq \frac{\prod_{k \neq i} \eta(e_k)}{\prod_{k \neq j} \eta(e_k)} = \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$. \square

III.1.2 Définition de l'immeuble de $GL(V)$.

On dira que deux normes ultramétriques η et η' sont *homothétiques* s'il existe un réel strictement positif r tel que $\eta' = r\eta$. On appelle *classe (d'homothétie)* de η et on note $[\eta]$ l'ensemble des normes ultramétriques homothétiques à η .

Normalisation : On fixe un déterminant \det sur V^n (i.e. une forme n -linéaire alternée non nulle sur V). Remarquons que pour toute base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de V , la base $(\frac{1}{\det \mathcal{E}} e_1, \dots, e_n)$ est de déterminant 1. Soit η une norme ultramétrique adaptable. Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée à η , de déterminant 1. D'après l'égalité (III.4) du corollaire III.1.3, la quantité

$$\text{vol}(\eta) = \prod_{i=1}^n \eta(e_i)$$

qu'on appellera le *volume* de η , est indépendante du choix de la base (e_1, \dots, e_n) de déterminant 1 adaptée à η (car la matrice de passage d'une telle base à une autre est de déterminant 1). On a $\text{vol}(r\eta) = r^n \text{vol}(\eta)$ pour tout réel strictement positif r . Donc pour toute norme ultramétrique adaptable η , il existe une unique norme ultramétrique homothétique à η de volume 1. On a également $\text{vol}(g.\eta) = |\det g|^{-1} \text{vol}(\eta)$ pour tout $g \in G$.

Points et action de G .

On considère l'ensemble Δ des classes d'homothétie des normes ultramétriques adaptables sur V , qu'on peut représenter par l'ensemble des normes ultramétriques adaptables de volume 1.

On appelle norme ultramétrique *associée* à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de V , et on note $\eta_{\mathcal{E}}$, l'unique norme ultramétrique sur V adaptée à la base \mathcal{E} et valant 1 sur \mathcal{E} (i.e. on a $\eta_{\mathcal{E}}(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sup_{i=1\dots n} |a_i|$ pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$). Remarquons que ces normes ultramétriques sont exactement les normes ultramétriques adaptables à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de la valeur absolue sur le corps de base \mathbb{F} . Les classes d'homothéties de ces normes ultramétriques sont appelées *sommets* de Δ . Si la valuation n'est pas surjective, il existe des points dans Δ qui ne sont pas des sommets.

L'action naturelle du groupe $G = \text{GL}(V)$ sur l'ensemble des normes ultramétriques induit une action de G sur l'ensemble Δ . Le centre $Z(G) = \{a\text{Id}, a \in \mathbb{F}^*\}$ de G agit trivialement sur Δ , donc l'action se factorise à travers la projection canonique $p : G \longrightarrow \mathbb{P}G = \text{PGL}(V) = G/Z(G)$.

On a $g.\eta_{\mathcal{E}} = \eta_{g\mathcal{E}}$ pour tout g dans G . Le groupe G agit donc transitivement sur l'ensemble \mathcal{S} des sommets de Δ (car transitivement sur les bases de V).

Un élément g de G de déterminant de valeur absolue 1 fixe un point $[\eta]$ de Δ si et seulement s'il fixe la norme ultramétrique η (car g conserve le volume des normes ultramétriques) ou, de manière équivalente, si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a $|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$, où $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de g dans la base \mathcal{E} (cf. Corollaire III.1.4). En particulier, l'élément g fixe le sommet $[\eta_{\mathcal{E}}]$ associée à la base \mathcal{E} si et seulement si sa matrice dans la base \mathcal{E} est dans $\text{GL}_n(\mathcal{O})$. Si un élément g de G , de déterminant quelconque, fixe le sommet $[\eta_{\mathcal{E}}]$, alors il existe a dans \mathbb{F}^* tel que $\eta_{\mathcal{E}} \circ g^{-1} = |a|\eta_{\mathcal{E}}$ (car $\eta_{\mathcal{E}}$ est à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de la valeur absolue sur \mathbb{F}). On a alors que ag conserve $\eta_{\mathcal{E}}$, donc ag appartient à $\text{GL}_n(\mathcal{O})$. On a donc que $\text{Stab}_{\mathbb{P}G}[\eta_{\mathcal{E}}] = \text{PGL}_n(\mathcal{O})$

Appartements.

Soit η une norme ultramétrique adaptée à une croix $\mathcal{F} = (V_1, \dots, V_n)$. On considère l'application $\phi_{\eta, \mathcal{F}}$ de \mathbb{R}^n dans l'ensemble des normes ultramétriques qui à un n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ associe l'unique norme ultramétrique η' adaptée à la croix \mathcal{F} telle que $\eta' = e^{-\alpha_i}\eta$ sur V_i pour $i = 1 \dots n$. L'application $\phi_{\eta, \mathcal{F}}$ est injective et passe au quotient en une application injective $f_{[\eta], \mathcal{F}}$ de $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n / \mathbb{R}_{(1, \dots, 1)}$ dans Δ , ne dépendant que de la classe de η , appelée *appartement marqué* passant par $x = [\eta]$ associé à la croix \mathcal{F} . L'image de $f_{[\eta], \mathcal{F}}$ dans Δ est l'ensemble des classes des normes ultramétriques adaptées à \mathcal{F} . Elle est appelée *appartement* associé à la croix \mathcal{F} et notée $A_{\mathcal{F}}$. On note \mathcal{A} l'ensemble des appartements marqués.

Pour tout élément g de G , on a $g.f_{[\eta], \mathcal{F}} = f_{[g.\eta], g\mathcal{F}}$ donc G conserve le système d'appartements marqués et agit transitivement sur les appartements (non marqués) (car G agit transitivement sur les croix de V). Si g permute les sous-espaces vectoriels d'une croix \mathcal{F} , alors g stabilise l'appartement associé.

Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V , on note $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = (\mathbb{F}e_1, \dots, \mathbb{F}e_n)$ la croix associée à \mathcal{E} . On note $\phi_{\mathcal{E}} = \phi_{\eta_{\mathcal{E}}, \mathcal{F}_{\mathcal{E}}}$ et $f_{\mathcal{E}}$ l'appartement marqué $f_{\eta_{\mathcal{E}}, \mathcal{F}_{\mathcal{E}}}$ induit, dit associé à \mathcal{E} . Notons que si $a \in G$ a pour matrice dans la base \mathcal{E} la matrice diagonale $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$, alors $a.\eta_{\mathcal{E}} = \phi_{\mathcal{E}}(\log |a_1|, \dots, \log |a_n|)$. On a $g.f_{\mathcal{E}} = f_{g\mathcal{E}}$ pour tout g dans G , donc G agit transitivement sur les appartements marqués associés aux bases de V (qui sont exactement les appartements marqués passant en l'origine par les sommets de Δ).

Les sommets de Δ qui sont dans l'appartement associé à une croix \mathcal{F} sont exactement les images par l'appartement marqué associé à une base \mathcal{E} de la croix \mathcal{F} des points de $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n / \mathbb{R}_{(1, \dots, 1)}$ provenant de Λ^n , où Λ est le sous-groupe additif de \mathbb{R} formé par les valeurs prises par la valuation de \mathbb{F} . Si la valuation est discrète (resp. dense), l'ensemble \mathcal{S} des sommets est discret dans chaque appartement (resp. dense). Si elle est surjective, alors tout point de Δ est un sommet, et en particulier G agit alors transitivement sur Δ . Une fois vérifiés les axiomes des immeubles affines, on aura de plus la propriété suivante (où d désigne la distance d'immeuble sur Δ , qui est égale à la distance euclidienne en restriction à chaque

appartement).

Proposition III.1.5 *Il existe une constante C telle que pour tout x dans $\overline{\Delta}$, il existe y dans l'ensemble \mathcal{S} des sommets de Δ tel que $d(x, y) \leq C$. \square*

Points fixes dans un appartement.

Proposition III.1.6 *Soit g dans G de déterminant de valeur absolue 1. Soit \mathcal{E} une base de V . L'ensemble des points fixes de g dans l'appartement associé à \mathcal{E} est l'image par $f_{\mathcal{E}}$ du polyèdre de Weyl de \mathbb{A} suivant.*

$$\{\alpha \in \mathbb{A} \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \alpha_j - \alpha_i \leq v(g_{ij})\} \quad (\text{III.6})$$

où $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de g dans la base \mathcal{E} .

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{A}$. On a $g.f_{\mathcal{E}}(\alpha) = f_{\mathcal{E}}(\alpha)$ si et seulement si $g.\phi_{\mathcal{E}}(\alpha) = \phi_{\mathcal{E}}(\alpha)$ (car g conserve le volume des normes ultramétriques) si et seulement si

$$\alpha_j - \alpha_i \leq v(g_{ij}) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

d'après le corollaire III.1.4. \square

On peut en déduire en particulier qu'un élément g de G de déterminant 1 fixe l'appartement associé à une croix \mathcal{F} de V point par point si et seulement si la matrice de g dans une base \mathcal{E} de \mathcal{F} est diagonale.

Comme un sous-ensemble non vide de \mathbb{A} de la forme $\{\alpha \in \mathbb{A} \mid \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \alpha_j - \alpha_i \leq \lambda_{ij}\}$, avec λ_{ij} dans $\Lambda = v(\mathbb{F}^*)$ ou $\lambda_{ij} = +\infty$, contient nécessairement un élément de $[\Lambda^n]$, nous pouvons déduire de cette proposition qu'un élément (et même un sous-groupe de type fini) de G de déterminant de valeur absolue 1 qui fixe un point fixe nécessairement aussi un sommet, et, dans une base de V , sa matrice appartient donc à $\text{GL}_n(\mathcal{O})$.

La structure modèle.

L'espace $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n /_{\mathbb{R}(1, \dots, 1)}$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel euclidien. On l'identifiera à l'orthogonal dans \mathbb{R}^n de la droite $\mathbb{R}(1, \dots, 1)$, c'est-à-dire le sous-espace formé des $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans \mathbb{R}^n tels que $\sum \alpha_i = 0$. Les restrictions à \mathbb{A} des permutations de la base canonique de \mathbb{R}^n forment un sous-groupe fini d'isométries vectorielles de \mathbb{A} , qui est engendré par des réflexions (les restrictions des transpositions). On le note \overline{W} , il est irréductible. Soit W le groupe de toutes les isométries affines de \mathbb{A} de partie vectorielle dans \overline{W} .

Nous allons montrer que la paire (Δ, \mathcal{A}) vérifie les axiomes (A1), (A2) et (A4) de la section II.1.2 et la propriété (A3') définie en section II.1.6, avec (\mathbb{A}, W) comme ci-dessus. D'après le théorème II.1.22, l'ensemble Δ , muni du système d'appartements marqués \mathcal{A} (qui est clairement couvrant), est alors un immeuble affine modelé sur (\mathbb{A}, W) .

Remarque. En se restreignant aux appartements marqués associés à une base, on peut prendre plus précisément le groupe W engendré par \overline{W} et le sous-groupe des translations de \mathbb{A} de vecteur dans $\Lambda^n /_{\mathbb{R}(1, \dots, 1)}$.

III.1.3 Vérification de l'axiome (A1).

Montrons que le système d'appartements marqués \mathcal{A} est invariant par précomposition par W . Ceci découle du lemme suivant.

Lemme III.1.7 *Soit η une norme ultramétrique sur V adaptée à une croix $\mathcal{F} = (V_1, \dots, V_n)$. Soit w un élément de W .*

Si w est une translation de \mathbb{A} de vecteur α , alors l'application $f_{[\eta], \mathcal{F}} \circ w$ est l'appartement marqué passant en l'origine par $f_{[\eta], \mathcal{F}}(\alpha)$ associé à la croix \mathcal{F} .

Si w fixe 0, alors l'application $f_{[\eta], \mathcal{F}} \circ w$ est l'appartement marqué passant par $[\eta]$ associé à la croix $\mathcal{F}' = \sigma \mathcal{F} = (V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(n)})$ obtenue par permutation de la croix \mathcal{F} , où σ est la permutation de $\{1, \dots, n\}$ telle que $w : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$.

Preuve. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans \mathbb{A} . On note ν la norme ultramétrique $\phi_{\eta, \mathcal{F}}(w(\lambda))$, qui est adaptée à \mathcal{F} .

Dans le premier cas $w(\lambda) = \lambda + \alpha$ et on note η' la norme $\phi_{\eta, \mathcal{F}}(\alpha)$. Pour tout i , en restriction à V_i on a

$$\nu = e^{-(\lambda_i + \alpha_i)} \eta = e^{-\lambda_i} e^{-\alpha_i} \eta = e^{-\lambda_i} \eta' = \phi_{\eta', \mathcal{F}}(\lambda).$$

Donc les normes ultramétriques ν et $\phi_{\eta', \mathcal{F}}(\lambda)$, égales en restriction à chaque sous-espace V_i d'une croix adaptée commune \mathcal{F} , sont égales.

Dans le deuxième cas, pour tout i , en restriction à $V_{\sigma(i)}$, on a

$$\nu = e^{-w(\lambda)_{\sigma(i)}} \eta = e^{-\lambda_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}} \eta = e^{-\lambda_i} \eta = \phi_{\eta, \mathcal{F}'}(\lambda).$$

La norme ultramétrique ν étant adaptée à \mathcal{F}' , car adaptée à \mathcal{F} , les normes ultramétriques ν et $\phi_{\eta, \mathcal{F}'}(\lambda)$, égales en restriction à chaque sous-espace d'une croix adaptée commune \mathcal{F}' , sont égales. \square

III.1.4 Vérification de l'axiome (A2).

Montrons que (Δ, \mathcal{A}) vérifie l'axiome (A2). Soient f et f' deux appartements marqués dont les images ont au moins un point commun. On considère l'ensemble

$$I = f'^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A})).$$

Montrons que I est un polyèdre de Weyl de \mathbb{A} , donc en particulier un convexe fermé, et que $f^{-1} \circ f'|_I$ est la restriction d'un élément de W .

Quitte à précomposer f et f' par des éléments de W , on peut supposer que $f = f_{\mathcal{E}}$ et $f' = f_{\mathcal{E}'}$ où $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de V . Soit $g \in G$ tel que $g\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. D'après le corollaire III.1.3, il existe une permutation σ telle que pour toute norme ultramétrique η adaptée à \mathcal{E} et \mathcal{E}' , on a pour tout j

$$\eta(e'_j) = |g_{\sigma(j)j}| \eta(e_{\sigma(j)}).$$

Quitte à permuter les éléments de \mathcal{E}' et à diviser e_i par g_{ii} (ce qui revient à précomposer f et f' par des éléments de W), on peut supposer que $\sigma = \text{Id}$ et que $g_{ii} = 1$ pour tout i . Soit

η une norme ultramétrique adaptée à \mathcal{E} . Alors η est adaptée à \mathcal{E}' si et seulement si $g.\eta = \eta$. En effet, si η est adaptée à \mathcal{E}' , i.e. si $g^{-1}.\eta$ est adaptée à \mathcal{E} , alors comme $g^{-1}.\eta(e_j) = \eta(e_j)$ pour tout j , les normes ultramétriques $g^{-1}.\eta$ et η , adaptées à une même base et coïncidant sur les vecteurs de cette base, sont égales.

Donc $f(I) = f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A})$ est exactement l'ensemble des classes des normes ultramétriques adaptées à \mathcal{E} et fixées par g . En utilisant (III.6) appliqué à $f = f_{\mathcal{E}}$, on en déduit que I est un polyèdre de Weyl de \mathbb{A} . On a $f'^{-1} \circ f|_I = f^{-1}g^{-1}f|_I = \text{Id}$, car g vaut l'identité sur $f(I)$.

Ceci conclut la vérification de l'axiome (A2). \square

III.1.5 Vérification de l'axiome (A4).

Par définition, une chambre de Weyl de Δ de sommet x est l'image par un appartement marqué $f_{[\eta], \mathcal{F}}$ avec $[\eta] = x$ d'une chambre de Weyl vectorielle de \mathbb{A} , qu'on peut supposer être $\mathbb{A}^+ = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{A} \mid \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n\}$. On notera cette chambre de Weyl $C_{[\eta], \mathcal{F}}$. On notera $C_{\mathcal{E}}$ la chambre de Weyl $f_{\mathcal{E}}(\mathbb{A}^+)$, dite associée à la base \mathcal{E} . On a $g(C_{\mathcal{E}}) = C_{g\mathcal{E}}$ pour tout g de G , donc G agit transitivement sur les chambres de Weyl de la forme $C_{\mathcal{E}}$, qui sont exactement les chambres de Weyl de Δ de sommet un sommet. Il est facile de déduire de la proposition III.1.6 la proposition suivante.

Proposition III.1.8 (Fixateur d'une chambre de Weyl) *Un élément g de déterminant de valeur absolue 1 de G fixe point par point la chambre de Weyl $C_{[\eta], \mathcal{F}}$ si et seulement si la matrice de g dans une base \mathcal{E} de \mathcal{F} est triangulaire supérieure et vérifie de plus $|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$.*

En particulier, si $\eta = \eta_{\mathcal{E}}$, l'élément g fixe point par point la chambre de Weyl $C_{\mathcal{E}}$ si et seulement si sa matrice dans la base \mathcal{E} est triangulaire supérieure, à coefficients de valeur absolue inférieur ou égale à 1. \square

Un *drapeau* de V est une suite croissante de sous-espaces vectoriels. On note $D(\mathcal{F})$ le drapeau $\{0\} \subset V_1 \subset V_1 \oplus V_2 \subset \dots \subset V_1 \oplus \dots \oplus V_m = V$ de V associé à une décomposition $\mathcal{F} = V_1, \dots, V_m$ de V .

Proposition III.1.9 *Deux chambres de Weyl $C_{x, \mathcal{F}}$ et $C_{x', \mathcal{F}'}$ de Δ ont une sous-chambre de Weyl commune si et seulement si les deux croix \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont même drapeau associé.*

Preuve. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux croix de V , et x et x' deux points dans leurs appartements associés respectifs. On choisit une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathcal{F} et une base $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de \mathcal{F}' . Soient $g \in G$ tel que $\mathcal{E}' = g\mathcal{E}$ et $P = (g_{ij})$ sa matrice dans la base \mathcal{E} .

Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont même drapeau associé, alors P est triangulaire supérieure et, quitte à diviser e'_i par g_{ii} , on peut supposer que $g_{ii} = 1$ pour tout i . Soit $b = g_{ij}$ un coefficient de valeur absolue maximale. On a

$$b^{-j}e'_j = \sum_i g_{ij}b^{i-j}b^{-i}e_i$$

avec

$$|g_{ij}b^{i-j}| \leq |b||b|^{i-j} \leq 1 \text{ pour tout } i < j.$$

Donc, quitte à diviser e'_j et e_j par b^j pour tout j , on peut supposer de plus que P est à coefficients de valeur absolue inférieure ou égale à 1. On a alors que g (qui est de déterminant 1 car à coefficients diagonaux égaux à 1) fixe la chambre de Weyl $C_{[\eta_\mathcal{E}], \mathcal{F}}$ point par point (voir proposition III.1.8), or $gC_{[\eta_\mathcal{E}], \mathcal{F}} = C_{[g\eta_\mathcal{E}], g\mathcal{F}}$ donc $C_{[\eta_\mathcal{E}], \mathcal{F}} = C_{[\eta_\mathcal{E}], \mathcal{F}'}$. Les chambres de Weyl $C_{x, \mathcal{F}}$ et $C_{x', \mathcal{F}'}$ contiennent respectivement les chambres de Weyl $C_{x, \mathcal{F}} \cap C_{[\eta_\mathcal{E}], \mathcal{F}}$ et $C_{x', \mathcal{F}'} \cap C_{[\eta_\mathcal{E}], \mathcal{F}'}$, qui sont incluses dans une même chambre de Weyl, donc ont une sous-chambre de Weyl commune.

Réciproquement, si les chambres de Weyl $C_{x, \mathcal{F}}$ et $C_{x', \mathcal{F}'}$ ont une sous-chambre de Weyl commune, montrons que les drapeaux associés aux croix \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont égaux. Quitte à passer à une sous-chambre et à changer de bases \mathcal{E} et \mathcal{E}' , on peut supposer que $x = x' = [\eta_\mathcal{E}]$ et $C_{x, \mathcal{F}} = C_{x, \mathcal{F}'}$ donc que $f_\mathcal{E} = f_{\mathcal{E}'} = g \circ f_\mathcal{E}$ en restriction à \mathbb{A}^+ . D'après la proposition III.1.8, la matrice de g dans la base \mathcal{E} est alors triangulaire supérieure, donc \mathcal{F} et $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$ ont même drapeau associé. \square

Montrons maintenant (A4): Soient $C = C_{[\eta], \mathcal{F}}$ et $C' = C_{[\eta'], \mathcal{F}'}$ deux chambres de Weyl. Considérons les drapeaux maximaux D et D' associés à \mathcal{F} et \mathcal{F}' .

Il est bien connu (voir par exemple [Bro, IV.2 exercice 2]) que pour tous drapeaux maximaux D et D' de V , il existe une croix \mathcal{F}'' de V et une permutation σ (dite permutation de Jordan-Hölder) telles que D est le drapeau maximal associé à la croix \mathcal{F}'' et D' celui associé à la croix $\sigma\mathcal{F}''$. D'après la proposition III.1.9, il en résulte que C (resp. C') a une sous-chambre de Weyl commune avec $C_{x'', \mathcal{F}''}$ (resp. avec $C_{x'', \sigma\mathcal{F}''}$), avec $x'' \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}''}$ quelconque. Ces deux sous-chambres de Weyl sont incluses dans un même appartement, car $A_{\mathcal{F}''} = A_{\sigma\mathcal{F}''}$. \square

III.1.6 Vérification de la propriété (A3').

On notera $c_{[\eta], \mathcal{F}}$ le germe en x de la chambre de Weyl $C_{[\eta], \mathcal{F}}$. Le stabilisateur G_c du germe c en x d'une chambre de Weyl C de sommet x est l'ensemble des éléments g de G qui envoient C sur une chambre de Weyl de même germe en x . Il est inclus dans le stabilisateur G_x de x .

Notons G'_α le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ formé des matrices (g_{ij}) telles que

$$|g_{ij}| e^{\alpha_j - \alpha_i} \leq 1 \text{ pour } i \leq j \text{ et } |g_{ij}| e^{\alpha_j - \alpha_i} < 1 \text{ pour } i > j.$$

Lemme III.1.10 (Stabilisateur d'un germe de chambre) *On considère une norme ultramétrique η adaptée à une croix \mathcal{F} . Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathcal{F} . Soit $\alpha_i = \log \eta(e_i)$ pour tout i et $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{A}$. Alors un élément g de G de déterminant de valeur absolue 1 stabilise le germe $c_{[\eta], \mathcal{F}}$ si et seulement si sa matrice dans la base \mathcal{E} appartient au sous-groupe G'_α .*

Preuve. Il est facile de voir que $C_{[\eta], \mathcal{F}} = f_\mathcal{E}(\alpha + \mathbb{A}^+)$. Donc l'élément g de G stabilise $c_{[\eta], \mathcal{F}}$ si et seulement si g fixe les images par $f_\mathcal{E}$ de α et d'un point $\alpha + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{A}^+$. D'après la proposition III.1.6, l'ensemble des points fixes de g dans $A_\mathcal{F}$ est l'image par $f_\mathcal{E}$ du polyèdre de Weyl

$$I = \{\lambda \in \mathbb{A}; \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_j - \lambda_i \leq v(g_{ij})\}.$$

Celui-ci contient α si et seulement si $v(g_{ij}) + \alpha_i - \alpha_j \geq 0$ pour tous i, j . Dans ce cas, s'il contient $\alpha + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{A}^+$ alors $v(g_{ij}) + \alpha_i - \alpha_j \geq \beta_j - \beta_i > 0$ pour $i > j$, et réciproquement,

si $\varepsilon = \min_{i>j} v(g_{ij}) + \alpha_i - \alpha_j > 0$, alors en prenant par exemple $\beta = \frac{1}{n}(n\varepsilon, \dots, \varepsilon)$ on a bien $\alpha + \beta \in I$. \square

On établit maintenant un analogue de la décomposition de Bruhat (voir [BrTi1, Thm. 7.3.4]).

Proposition III.1.11 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = G'_\alpha T G'_\beta$, où T est le sous-groupe des matrices monomiales (ayant un seul coefficient non nul par ligne et par colonne).*

Preuve. Soit $g = (g_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. On veut se ramener à une matrice monomiale par des opérations de pivot sur les lignes et les colonnes correspondant à la multiplication à gauche par des éléments de G'_α et à droite par des éléments de G'_β . On peut donc

- ajouter à la ligne k de g , notée L_k , la ligne i multipliée par a_{ki} , à condition que $|a_{ki}| \leq e^{\alpha_k - \alpha_i}$, et même que $|a_{ki}| < e^{\alpha_k - \alpha_i}$ si $k > i$.
- ajouter à la colonne l de g , notée C_l , la colonne j multipliée par b_{jl} , à condition que $|b_{jl}| \leq e^{\beta_j - \beta_l}$, et même que $|b_{jl}| < e^{\beta_j - \beta_l}$ si $j > l$.

Posons $m_{ij} = e^{\beta_j - \alpha_i} |g_{ij}|$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Soit $m = \max_{k,l} m_{kl}$. Soit i le plus grand des entiers k tels qu'il existe l avec $m_{kl} = m$ et j le plus petit des entiers l tels que $m_{il} = m$.

Pour tout $k \neq i$, on ajoute la ligne L_i multipliée par $a_{ki} = -\frac{g_{kj}}{g_{ij}}$ à la ligne L_k (on a g_{ij} non nul car m_{ij} est maximal, donc non nul). On a bien

$$|a_{ki}| = \frac{|g_{kj}|}{|g_{ij}|} \leq e^{\alpha_k - \alpha_i},$$

car

$$e^{\beta_j - \alpha_k} |g_{kj}| = m_{kj} \leq m = m_{ij} = e^{\beta_j - \alpha_i} |g_{ij}|,$$

l'inégalité étant stricte si $k > i$. La nouvelle matrice a un seul coefficient non nul sur la colonne j qui est g_{ij} .

De même, pour tout $l \neq j$, on ajoute la colonne C_j multipliée par $b_{jl} = -\frac{g_{il}}{g_{ij}}$ à la colonne C_l . On a bien

$$|b_{jl}| = \frac{|g_{il}|}{|g_{ij}|} \leq e^{\beta_j - \beta_l},$$

car

$$e^{\beta_l - \alpha_i} |g_{il}| = m_{il} \leq m = m_{ij} = e^{\beta_j - \alpha_i} |g_{ij}|,$$

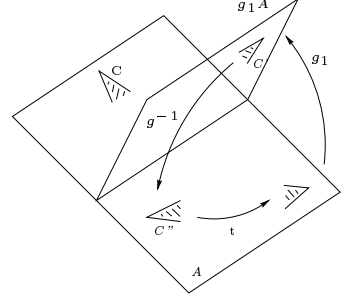
l'inégalité étant stricte si $l < j$. La nouvelle matrice a un seul coefficient non nul sur la ligne i et sur la colonne j (qui n'a pas bougé), qui est g_{ij} .

On recommence toutes ces opérations en supprimant la ligne i et la colonne j . \square

Corollaire III.1.12 (A3') *Deux germes de chambre de Weyl sont contenus dans un même appartement.*

Preuve. Soient $C = C_{[\eta], \mathcal{F}}$ et $C' = C_{[\eta'], \mathcal{F}'}$ deux chambres de Weyl. Soit $g \in G$ tel que $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$. Alors $\eta'' = g^{-1} \cdot \eta'$ est adaptée à \mathcal{F} et $C'' = g^{-1} C' = C_{[\eta''], \mathcal{F}}$. Soient \mathcal{E} une base de \mathcal{F} et $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ tels que $\eta = f_{\mathcal{E}}(\alpha)$ et $\eta'' = f_{\mathcal{E}}(\beta)$.

D'après la proposition III.1.11, on a $g = g_1 t g_2$ où les matrices de g_1 , g_2 et t dans \mathcal{E} sont respectivement dans G'_α , G'_β et T , donc g_1 stabilise le germe de la chambre de Weyl C , et g_2 celui de C'' , et t stabilise l'appartement A associé à \mathcal{F} . Alors l'appartement $g_1 A$ contient la chambre de Weyl $g_1 C$ de même germe que C et, comme $g_1 A = g_1 t A = g g_2^{-1} A$, il contient aussi la chambre de Weyl $g g_2^{-1} C''$ de même germe en $g \cdot [\eta''] = [\eta']$ que $g C'' = C'$. \square



On a donc montré que (Δ, \mathcal{A}) est un immeuble affine. Son immeuble à l'infini est bien l'immeuble sphérique associé à $\mathrm{GL}(V)$, dont l'ensemble des chambres est l'ensemble des drapeaux maximaux de V . En effet, la proposition III.1.9 permet de vérifier que ses chambres à l'infini correspondent aux drapeaux maximaux de V , et on vérifie facilement (dans un appartement) que les relations d'adjacence correspondent.

III.2 Sous-groupes bornés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Soit Δ l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Dans cette section, on considère Δ comme l'ensemble des normes ultramétriques sur $V = \mathbb{F}^n$ qui sont adaptables et de volume 1, inclus dans l'ensemble \mathcal{U} de toutes les normes ultramétriques sur V . Le groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ agit alors sur Δ par $g \cdot \eta = \delta(g) \eta \circ g^{-1}$, où δ désigne le morphisme multiplicatif $g \mapsto |\det(g)|^{\frac{1}{n}}$ de G dans \mathbb{R}_+^* .

Notons d la distance dans l'immeuble affine Δ définie comme en section II.1.2.

Notons d_∞ la distance *uniforme* sur \mathcal{U} , définie par

$$d_\infty(\eta, \eta') = \sup_{v \in V^*} \left| \log \frac{\eta'(v)}{\eta(v)} \right|$$

pour tous $\eta, \eta' \in \mathcal{U}$ (c'est la distance considérée dans [GoIw]).

Proposition III.2.1 *La distance d est équivalente à la distance sur Δ induite par d_∞ . Plus précisément, en restriction à Δ , on a*

$$d_\infty \leq d \leq \sqrt{n} d_\infty$$

Preuve. Soient η et η' deux normes ultramétriques dans Δ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base adaptée commune.

Pour tous a_1, \dots, a_n dans le corps \mathbb{F} , on a $\eta'(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sup_{i=1 \dots n} |a_i| \eta'(e_i)$, qui est inférieur ou égal à $\left(\sup_{i=1 \dots n} \frac{\eta'(e_i)}{\eta(e_i)} \right) \times \left(\sup_{i=1 \dots n} |a_i| \eta(e_i) \right)$. Or $\sup_{i=1 \dots n} |a_i| \eta(e_i)$ est égal à $\eta(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$, donc

$$\sup_{v \in V^*} \frac{\eta'(v)}{\eta(v)} = \sup_{i=1 \dots n} \frac{\eta'(e_i)}{\eta(e_i)} \quad (\text{III.7})$$

et, en échangeant η et η' , on obtient

$$d_\infty(\eta, \eta') = \sup_{i=1 \dots n} \left| \log \frac{\eta'(e_i)}{\eta(e_i)} \right| \quad (\text{III.8})$$

Par ailleurs, on a

$$d(\eta, \eta') = \left(\sum_{i=1}^n \left| \log \frac{\eta'}{\eta}(e_i) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.9})$$

donc

$$\sup_{i=1 \dots n} \left| \log \frac{\eta'}{\eta}(e_i) \right| \leq d(\eta, \eta') \leq \sqrt{n} \sup_{i=1 \dots n} \left| \log \frac{\eta'}{\eta}(e_i) \right|,$$

ce qui conclut. \square

Remarque. Comme l'espace \mathcal{U} des normes ultramétriques sur V est complet pour la distance uniforme, l'adhérence $\overline{\Delta}$ dans \mathcal{U} de Δ est le complété de Δ .

Soit $\eta \in \mathcal{U}$. Notons N_η la norme d'endomorphisme sur $\text{End}(V)$ associée à la norme η , définie par $N_\eta(g) = \sup_{v \in V^*} \frac{\eta(gv)}{\eta(v)}$ pour tout g dans $\text{End}(V)$. Elle est ultramétrique et sous-multiplicative (c'est-à-dire $N_\eta(gg') \leq N_\eta(g)N_\eta(g')$ pour tous g et g' de $\text{End}(V)$). Si η est la norme ultramétrique associée à une base \mathcal{E} de V , alors on note $N_\mathcal{E} = N_{\eta_\mathcal{E}}$ la norme d'endomorphisme associée à \mathcal{E} , et on a $N_\mathcal{E}(g) = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |g_{ij}|$ pour tout g dans G , où $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de g dans la base \mathcal{E} .

Proposition III.2.2 Soit $\eta \in \overline{\Delta}$ et g dans G . Rappelons que $\delta(g) = |\det(g)|^{\frac{1}{n}}$. On a

$$\max\left(\log \frac{N_\eta}{\delta}(g), \log \frac{N_\eta}{\delta}(g^{-1})\right) \leq d(\eta, g.\eta) \leq \sqrt{n} \max\left(\log \frac{N_\eta}{\delta}(g), \log \frac{N_\eta}{\delta}(g^{-1})\right)$$

Preuve. La distance uniforme $d_\infty(\eta, \delta(g)\eta \circ g^{-1})$ est égale à la borne supérieure pour v dans V^* de $\max\left(\log \delta(g) \frac{\eta \circ g^{-1}}{\eta}(v), \log \frac{1}{\delta(g)} \frac{\eta \circ g}{\eta}(g^{-1}v)\right)$ donc

$$d_\infty(\eta, g.\eta) = \max\left(\log \frac{N_\eta}{\delta}(g^{-1}), \log \frac{N_\eta}{\delta}(g)\right), \quad (\text{III.10})$$

et l'encadrement souhaité se déduit alors immédiatement de la proposition III.2.1 ci-dessus.

\square

Soit η_0 la norme ultramétrique associée à la base canonique de $V = \mathbb{F}^n$, définie par $\eta_0(v) = \sup_i |x_i|$ pour tout $v = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{F}^n . Soit N la norme canonique sur $\text{End}(V)$, telle que $N(g) = \sup_{i, j} |g_{ij}|$, où (g_{ij}) est la matrice de g dans la base canonique, qui est la norme d'endomorphisme sur $\text{End}(V)$ associée à η_0 . Si η est équivalente à η_0 , alors N_η est équivalente à N .

On a $\delta(g) \leq N(g)$ pour tout g dans G . Notons $\mathcal{N} = \frac{N}{\delta}$ la norme canonique renormalisée, qui est invariante par multiplication par un scalaire dans \mathbb{F}^* . Notons \mathcal{N}' la fonction $g \mapsto N(g)N(g^{-1})$ de G dans \mathbb{R}_+^* , qui est invariante par multiplication par un scalaire.

Proposition III.2.3 Notons d_{η_0} la fonction $g \mapsto d(\eta_0, g\eta_0)$ de G dans \mathbb{R}_+ . On a

$$\frac{1}{n} \log \mathcal{N}' \leq \log \mathcal{N} \leq \log \mathcal{N}'$$

et

$$\log \mathcal{N} \leq d_{\eta_0} \leq \sqrt{n} \log \mathcal{N}'.$$

Preuve. La deuxième assertion découle immédiatement de la proposition III.2.2 appliquée à $\eta = \eta_0$.

Montrons la première. Soit $g \in G$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée commune à η_0 et $g.\eta_0$, de déterminant 1. On a $N(g) = \sup_{V^*} \frac{\eta_0 \circ g}{\eta_0} = \sup_{i=1 \dots n} \frac{\eta_0(g e_i)}{\eta_0(e_i)}$ par la formule (III.7). Soit $\alpha_i = \log \frac{\eta_0(g e_i)}{\eta_0(e_i)}$ pour $i = 1 \dots n$, et supposons que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$. On a $\alpha = \frac{1}{n} \sum \alpha_i = \log \delta(a)$ d'une part, $\log N(g) = \alpha_1$ et $\log N(g^{-1}) = -\alpha_n$ d'autre part, et on conclut en remarquant que

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_n}{n} \leq \alpha_1 - \alpha \leq \alpha_1 - \alpha_n.$$

□

Définition III.2.4 Une partie B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ est dite projectivement bornée si $\mathcal{N}(B)$ est bornée.

Corollaire III.2.5 Soit B une partie de G . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. La partie B de G est projectivement bornée, i.e. $\mathcal{N}(B)$ est borné.
2. La fonction \mathcal{N}' est bornée sur B .
3. Pour un (tout) point x de Δ , la partie $B.x$ de Δ est bornée.

□

Proposition III.2.6 Soit Γ un sous-groupe de G . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Le groupe Γ fixe un point du complété $\overline{\Delta}$ de Δ .
2. Il existe une norme ultramétrique η sur V équivalente à η_0 telle que $\eta \circ g = \delta(g)\eta$ pour tout g de Γ .
3. Les orbites de Γ dans Δ sont bornées.
4. Le groupe Γ est projectivement borné, i.e. $\mathcal{N}(\Gamma)$ est borné.

Preuve. Comme Δ est CAT(0), le théorème de Cartan (voir [BrTi1, Th. 8.2.1]) dit que Γ fixe un point du complété si et seulement si l'orbite de η_0 sous Γ est bornée dans Δ . Les autres assertions découlent immédiatement du corollaire III.2.5.

On peut aussi voir que (4) implique (2) en obtenant directement η de la manière suivante.

Soit $g \in G$. On a $N(g^{-1})^{-1}\eta_0 \leq \eta_0 \circ g \leq N(g)\eta_0$ par définition de N . La norme ultramétrique $\eta_g = \delta(g)^{-1}\eta_0 \circ g$ de $\mathrm{End}(V)$ est donc équivalente à η_0 avec $\mathcal{N}(g^{-1})^{-1}\eta_0 \leq \eta_g \leq \mathcal{N}(g)\eta_0$ sur V .

Soit R un réel tel que $\mathcal{N}(h) \leq R$ pour tout h de Γ . Soit $\eta = \sup_{h \in \Gamma} \eta_h$. On a $\frac{1}{R}\eta_0 \leq \eta \leq R\eta_0$. On voit facilement que η est alors une norme ultramétrique sur V , équivalente à η_0 . Pour tout g, h de Γ , on a $\eta_h \circ g = \delta(g)\eta_{hg}$, donc $\eta \circ g = \delta(g)\eta$ pour tout g de Γ . □

Remarque III.2.7 Si Γ est inclus dans le sous-groupe G_0 des éléments de G de déterminant de valeur absolue 1, alors Γ est projectivement borné si et seulement s'il est borné au sens usuel, c'est à dire pour la norme canonique. De plus on a la propriété suivante. Un sous-groupe de type fini de G_0 qui admet un point fixe dans Δ fixe un sommet de Δ , donc est conjugué dans G à un sous-groupe de $\mathrm{Stab}_{G_0}(\eta_0) = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

Donc, si l'immeuble Δ est complet (par exemple dans le cas de la valuation discrète) un sous-groupe de type fini, borné, de G_0 est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

De plus, dans le cas où la valuation est discrète, on peut même supprimer l'hypothèse "de type fini", car on a la propriété suivante. Si x est un point de Δ , alors il existe un point y de \mathcal{S} tel que

$$\mathrm{Stab}_{G_0}(x) \subset \mathrm{Stab}_{G_0}(y).$$

Pour tout $h \in G$, notons i_h le morphisme $g \mapsto hgh^{-1}$ de $\mathrm{End}(V)$. Notons ϕ l'application de G dans $[1, +\infty[$, constante sur les classes de conjugaison, définie par $\phi = \inf_{h \in G} \mathcal{N} \circ i_h$.

Proposition III.2.8 *Soit C la constante donnée par la proposition III.1.5. On a $\log \phi(g) \leq \ell(g) + 2C$ pour tout g dans G .*

Preuve. Soit g dans G et x dans Δ . Par la proposition III.1.5, il existe $y \in \mathcal{S}$ tel que $d(x, y) \leq C$. Soit $h \in G$ tel que $y = h^{-1}\eta_0$. On a $d_{\eta_0}(hgh^{-1}) = d(y, gy) \leq d(x, gx) + 2C$. Comme $\log \mathcal{N} \leq d_{\eta_0}$ (cf. Prop. III.2.3), on en déduit que $\log \phi(g) \leq d(x, gx) + 2C$ pour tout x de Δ . D'où le résultat désiré. \square

Proposition III.2.9 (Décomposition polaire) *Si P est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ qui stabilisent un sous-espace vectoriel non trivial donné de $V = \mathbb{F}^n$ et $K = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, on a $G = KP$.* \square

Proposition III.2.10 *Pour tout g dans G , on a $\phi(g) = \inf_{p \in P} \mathcal{N}(pgp^{-1})$*

Preuve. D'après la proposition III.2.9, pour tout h dans G , il existe p dans P tel que $h = kp$. Or, pour tout k dans K , la conjugaison i_k par k conserve \mathcal{N} (car \mathcal{N} est sous-multiplicative et vaut 1 sur K , donc i_k et $i_{k^{-1}}$ diminuent \mathcal{N}). On a alors $\mathcal{N} \circ i_h = \mathcal{N} \circ i_k \circ i_p = \mathcal{N} \circ i_p$. On en déduit que $\inf_{h \in G} \mathcal{N} \circ i_h = \inf_{p \in P} \mathcal{N} \circ i_p$. \square

III.3 Sous-groupes elliptiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème III.3.1 *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, tel que*

1. *Le groupe Γ est engendré par une partie S telle que $S.x \subset \Delta$ est bornée pour un (tout) point x de l'immeuble de Bruhat-Tits Δ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ (par exemple S finie ou compacte).*
2. *La longueur minimale de translation ℓ est bornée sur Γ .*

Alors Γ admet un point fixe global dans le complété $\overline{\Delta}$ de Δ .

La condition 2 est satisfaite si tout élément de Γ fixe un point de $\overline{\Delta}$, et seulement dans ce cas par le théorème II.3.1.

Des cas particuliers de cet énoncé étaient déjà connus (voir [Bass] si Γ est absolument irréductible et [Ben] si Γ est Zariski-dense).

En particulier, si Δ est complet (par exemple si la valuation est discrète), on a alors (en notant \mathcal{O} l'anneau de valuation de \mathbb{F}): un sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ dont chaque élément est conjugué à un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

D'après le corollaire III.2.5 et les propositions III.2.6 et III.2.8, le théorème III.3.1 découle de la proposition suivante.

Proposition III.3.2 *Pour tout entier n non nul, on a la propriété (\mathcal{P}_n) : Soit \mathbb{F} un corps valué. Soit Γ un sous-groupe de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, tel que*

1. *Le groupe Γ est engendré par une partie S projectivement bornée.*
2. *La fonction $\phi : g \mapsto \inf_{h \in G} \mathcal{N}(hgh^{-1})$ est bornée sur Γ .*

Alors Γ est projectivement borné dans Δ .

Preuve. Dans le cas où $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ -module absolument irréductible, le lemme de Burnside entraîne que si $\mathrm{Trace}(\Gamma)$ est borné alors Γ est borné (voir par exemple [Bass, section 1, Corollary 1.3]). En adaptant les arguments de la démonstration, nous allons tout d'abord montrer une légère généralisation de ce résultat, adaptée à la situation considérée. Notons $\mathcal{T} = \frac{|\mathrm{Trace}|}{\delta}$.

Lemme III.3.3 *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ tel que $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ -module absolument irréductible. Si $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné, alors Γ est projectivement borné.*

Preuve. Le fait suivant est classique.

Fait III.3.4 *Si $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ -module absolument irréductible, alors Γ engendre l'espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$ sur \mathbb{F} . □*

On choisit une base s_1, \dots, s_{n^2} de $\mathrm{End}(V)$ formée d'éléments de Γ . La forme bilinéaire symétrique Tr sur $\mathrm{End}(V)$ qui à (A, B) associe $\mathrm{Trace}(AB)$ étant non dégénérée, il existe une base t_1, \dots, t_{n^2} de $\mathrm{End}(V)$ duale de s_1, \dots, s_{n^2} pour Tr , c'est-à-dire telle que pour tous i et j , $\mathrm{Trace}(s_i t_j) = \delta_{i,j}$.

Soit γ dans Γ et soient $x_1, \dots, x_{n^2} \in \mathbb{F}$ les coordonnées de γ dans la base t_1, \dots, t_{n^2} . Pour tout i , $\mathrm{Trace}(s_i \gamma) = x_i$. Comme N est une norme ultramétrique sur $\mathrm{End}(V)$, on a

$$N(\gamma) \leq \max_{i=1 \dots n^2} |x_i| N(t_i) \leq \left(\max_{i=1 \dots n^2} \mathcal{T}(s_i \gamma) \delta(s_i) N(t_i) \right) \delta(\gamma).$$

Comme $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné, alors la fonction \mathcal{N} est majorée sur Γ , ce qui conclut. □

Démontrons maintenant la proposition III.3.2 par récurrence sur l'entier n . Pour tout corps \mathbb{F} , l'immeuble affine associé à $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})$ est réduit à un point, donc borné. Par conséquent (\mathcal{P}_1) est vraie. Soit $n > 1$. Supposons la propriété (\mathcal{P}_m) vraie pour tout $m < n$. Soient \mathbb{F} et Γ vérifiant les hypothèses.

Montrons tout d'abord que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné. Pour tout g dans G , on a $|\mathrm{Trace}(g)| \leq N(g)$, donc

$$|\mathrm{Trace}(g)| \leq \inf_{h \in G} N(h^{-1}gh)$$

car la trace est un invariant de conjugaison. Notons $\mathcal{T} = \frac{|\mathrm{Trace}|}{\delta}$, alors $\mathcal{T} \leq \phi$ donc $\mathcal{T}(\Gamma)$ est borné d'après l'hypothèse 2.

Si $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ -module absolument irréductible, le lemme III.3.3 ci-dessus permet donc de conclure.

Supposons que \mathbb{F}^n n'est pas un Γ -module absolument irréductible. Alors, par définition, il existe une extension algébrique \mathbb{E} finie de \mathbb{F} telle que Γ stabilise un sous-espace vectoriel non-trivial de \mathbb{E}^n .

Proposition III.3.5 (Extension de la valuation) *Soit \mathbb{F} un corps muni d'une valuation v à valeurs réelles et \mathbb{E} une extension algébrique finie de \mathbb{F} . Alors il existe une valuation v' de \mathbb{E} à valeurs réelles telle que $v' = v$ sur \mathbb{F} (voir par exemple [Lan, Chap. XII, §4, Theorem 1, corollary 2]).* \square

Notons $\mathcal{N}_{\mathbb{E}}, \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ les normes canoniques renormalisées sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ associées respectivement à v' et v . Comme $\mathcal{N}_{\mathbb{E}} = \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ sur Γ , il est clair que Γ est un sous-groupe projectivement borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ si et seulement si c'est un sous-groupe projectivement borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$.

Par ailleurs, il est facile de voir que le sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ vérifie l'hypothèse 1, car $\mathcal{N}_{\mathbb{E}} = \mathcal{N}_{\mathbb{F}}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ qui contient Γ , et l'hypothèse 2, car, en restriction à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ qui contient Γ , la fonction $\inf_{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{E})} \mathcal{N}_{\mathbb{E}} \circ i_g$ est inférieure à la fonction $\inf_{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \mathcal{N}_{\mathbb{F}} \circ i_g$ qui est bornée sur Γ par l'hypothèse 2.

On s'est donc ramené, quitte à remplacer \mathbb{F} par \mathbb{E} , au cas où $\Gamma \subset \mathrm{End}(V)$ stabilise un sous-espace vectoriel de V de dimension r , avec $0 < r < n$, ce qu'on suppose désormais.

Quitte à conjuguer, on peut supposer que Γ est inclus dans le sous-groupe P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ suivant (on note $r_1 = r$ et $r_2 = n - r$):

$$\Gamma \subset P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}; A \in \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{F}), B \in M_{r_1, r_2}(\mathbb{F}), D \in \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{F}) \right\}$$

On considère alors le morphisme $\pi : P \longrightarrow G' = \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{F}) \subset P$ tel que $\pi \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Pour $i = 1, 2$, soit π_i le morphisme $pr_i \circ \pi$ où pr_i est la projection canonique de G' dans $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$, et notons g_i l'image de g par π_i pour tout g de P .

Lemme III.3.6 *Pour $i = 1, 2$, pour tout γ dans Γ , on a $\delta(\gamma_i) = \delta(\gamma)$.*

Preuve. Pour tout p dans P , on a $\delta(p_i) \leq N(p_i) \leq N(p)$ donc $\frac{\delta(p_i)}{\delta(p)} \leq \mathcal{N}(p)$. Comme le membre de gauche de cette inégalité est constant sur la classe de conjugaison de p dans P , on en déduit que, pour tout p dans P ,

$$\frac{\delta(p_i)}{\delta(p)} \leq \inf_{h \in P} \mathcal{N}(hph^{-1}) = \phi(p)$$

par la proposition III.2.10.

Comme ϕ est bornée sur Γ (hypothèse 2), disons par R , on a donc $\frac{\delta(\gamma_i)}{\delta(\gamma)} \leq R$ pour tout γ dans Γ .

En particulier, pour tout γ dans Γ , on a

$$\left(\frac{\delta(\gamma_i)}{\delta(\gamma)} \right)^k = \frac{\delta(\gamma_i^k)}{\delta(\gamma^k)} \leq R$$

pour tout entier k , ce qui entraîne que $\frac{\delta(\gamma_i)}{\delta(\gamma)} \leq 1$. En remplaçant γ par son inverse, on obtient le résultat désiré. \square

Montrons que, pour $i = 1, 2$, le sous-groupe $\Gamma_i = \pi_i(\Gamma)$ de $\text{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$ vérifie les hypothèses de récurrence. Le morphisme π_i diminue N donc \mathcal{N}' . Comme \mathcal{N}' est bornée sur S , on en déduit que \mathcal{N}' , donc \mathcal{N} , est bornée sur $\pi_i(S)$, qui engendre le groupe Γ_i , donc Γ_i vérifie l'hypothèse 1.

Soit R tel que $\phi < R$ sur Γ (dont l'existence est assurée par l'hypothèse 2 sur Γ). Soit $\gamma_i \in \Gamma_i$ et $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma_i = \pi_i(\gamma)$.

D'après la proposition III.2.10, il existe $p \in P$ tel que $\mathcal{N}(p\gamma p^{-1}) < R$. On a $\mathcal{N}'(p_i\gamma_i p_i^{-1}) \leq \mathcal{N}'(p\gamma p^{-1})$ car π_i diminue \mathcal{N}' . Donc $\mathcal{N}'(p_i\gamma_i p_i^{-1}) \leq \mathcal{N}'(p\gamma p^{-1})^n$ d'après la proposition III.2.3. Par conséquent, on a $\phi(\gamma_i) \leq R^n$ pour tout γ_i dans Γ_i , donc Γ_i vérifie l'hypothèse 2.

Il s'ensuit que pour $i = 1, 2$, le sous-groupe Γ_i de $\text{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$ vérifie les hypothèses de (\mathcal{P}_{r_i}) pour r_i qui est strictement inférieur à n , donc, par récurrence, on a que Γ_i est un sous-groupe projectivement borné de $\text{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$.

D'après la proposition III.2.6, pour $i = 1, 2$, il existe alors une norme ultramétrique η_i sur \mathbb{F}^{r_i} , équivalente à la norme canonique, telle que $\eta_i \circ \gamma_i = \delta(\gamma_i)\eta_i$ pour tout γ_i dans Γ_i . Soit η la norme ultramétrique sur V telle que $\eta(x_1, \dots, x_n) = \sup(\eta_1(x_1, \dots, x_{r_1}), \eta_2(x_{r_1+1}, \dots, x_n))$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Soit N_η la norme d'endomorphisme sur $\text{End}(V)$ associée à η , qui est ultramétrique, sous-multiplicative et équivalente à N .

Remarque. Si Γ est à éléments de déterminant de valeur absolue 1, et si la valuation est discrète, par la remarque III.2.7, comme Γ_i est un sous-groupe borné, il est conjugué à un sous-groupe de $\text{GL}_{r_i}(\mathcal{O})$. Donc $N_\eta = N$ convient, quitte à conjuguer Γ .

Le sous-groupe P' de P formé des éléments g tels que $\eta_i \circ g_i = \delta(g)\eta_i$ pour $i = 1, 2$ contient Γ (par le lemme III.3.6) et possède la propriété suivante. Pour $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{End}(V)$ avec $A \in \text{M}_{r_1}(\mathbb{F})$, $B \in \text{M}_{r_1, r_2}(\mathbb{F})$, $C \in \text{M}_{r_2, r_1}(\mathbb{F})$, $D \in \text{M}_{r_2}(\mathbb{F})$, notons $A_g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_g = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Alors si g et g' sont dans P' , on a

$$\frac{N_\eta(B_{gg'})}{\delta(gg')} \leq \max\left(\frac{N_\eta(B_g)}{\delta(g)}, \frac{N_\eta(B_{g'})}{\delta(g')}\right)$$

En effet, $B_{gg'} = A_g B_{g'} + B_g D_{g'}$, et, comme N_η est une norme ultramétrique et sous-multiplicative, on a $N_\eta(B_{gg'}) \leq \max(N_\eta(A_g)N_\eta(B_{g'}), N_\eta(B_g)N_\eta(D_{g'}))$. Or $N_\eta(A_g) = N_{\eta_1}(g_1) = \delta(g)$ et de même $N_\eta(D_{g'}) = \delta(g')$, d'où le résultat souhaité.

Or Γ est inclus dans P' . Comme Γ est engendré par une partie S de G bornée pour \mathcal{N} , donc également bornée pour la fonction équivalente $\frac{N_\eta}{\delta}$, il existe une constante M telle que $N_\eta(s) \leq M\delta(s)$ pour tout s de S . Comme pour tout g de P' on a $g = \pi(g) + B_g$, et donc $N_\eta(B_g)$ est inférieur ou égal à $\max(N_\eta(\pi(g)), N_\eta(g))$, lui-même inférieur ou égal à $\max(\delta(g), N_\eta(g))$, on a $\frac{N_\eta(B_g)}{\delta(g)} \leq M' = \max(1, M)$ pour tout $g \in S$. Or, d'après la propriété ci-dessus, $\frac{N_\eta(B_\gamma)}{\delta(\gamma)} \leq \sup_{s \in S} \frac{N_\eta(B_s)}{\delta(s)} \leq M'$ pour tout γ de Γ . Donc, comme pour tout g de P on a $N_\eta(g)$ est inférieur ou égal à $\max(N_\eta(\pi(g)), N_\eta(B_g))$, qui est inférieur ou égal à $\max(\delta(g), N_\eta(B_g))$, on a $\frac{N_\eta(\gamma)}{\delta(\gamma)} \leq M'$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Le sous-groupe Γ est donc borné pour $\frac{N_\eta}{\delta}$, donc pour \mathcal{N} . \square

Chapitre IV

Cônes asymptotiques des espaces symétriques.

Dans tout ce chapitre, ω désigne un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet (on renvoie à [Bou1] pour son existence et les propriétés rappelées ci-dessous), c'est-à-dire un ensemble de parties de \mathbb{N} vérifiant

1. L'ensemble vide n'est pas dans ω ;
2. Si A et B sont dans ω , alors $A \cup B$ aussi;
3. Si A est dans ω et est inclus dans B , alors B est dans ω ;
4. Pour toute partie A de \mathbb{N} , l'ensemble ω contient soit A , soit son complémentaire (toute partition finie de \mathbb{N} a par conséquent un unique élément dans ω).
5. Aucune partie finie de \mathbb{N} n'est dans ω .

On peut aussi voir ω comme une mesure de probabilité finiment additive définie sur toutes les parties de \mathbb{N} , à valeurs dans $\{0, 1\}$, nulle sur les parties finies, avec $w(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \omega$.

Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans un espace topologique E quelconque admet $x \in E$ comme limite suivant l'ultrafiltre ω si pour tout voisinage V de x dans E , on a $x_k \in V$ pour ω -presque tout k . Cette limite est l'une des valeurs d'adhérences de la suite (x_k) , et elle est unique si E est séparé. On note alors $\lim_{\omega} x_k = x$. On fera un grand usage de la propriété fondamentale suivante : une suite contenue (ω -presque partout) dans un compact admet toujours une limite (unique) suivant l'ultrafiltre ω .

On dit qu'une suite de réels (x_k) est ω -majorée (resp. ω -bornée) s'il existe un réel M tel que x_k est inférieur à M (resp. $-M \leq x_k \leq M$) ω -presque partout.

IV.1 Définition et propriétés.

On renvoie par exemple à [KILe] pour plus de détails concernant les ultralimites de suites d'espaces métriques pointés et les cônes asymptotiques et les preuves des propriétés énoncées et non démontrées ci-dessous.

Soit $(X_k, d_k, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques pointés. On considère l'ensemble $X_{\infty} = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k; d_k(*_k, x_k) \text{ est } \omega\text{-borné}\}$. On définit une pseudo-distance \tilde{d}_{ω} sur X_{∞} par $\tilde{d}_{\omega}((x_k), (y_k)) = \lim_{\omega} d_k(x_k, y_k)$. L'espace métrique (X_{ω}, d_{ω}) quotient de X_{∞} par la relation

“être à pseudo-distance \tilde{d}_ω nulle”, pointé en la classe $*_\omega$ de $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est appelé *l’ultralimite* de la suite $(X_k, d_k, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour $(x_k) \in X_\infty$, on note $[x_k]$ le point de X_ω associé.

Fait IV.1.1 *L’espace métrique X_ω est complet.* □

On se fixe désormais un espace métrique X , une suite $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans X , et une suite (λ_k) de scalaires dans \mathbb{R}_+^* , tendant vers $+\infty$. On se donne également un groupe G agissant par isométries sur X .

Le *cône asymptotique* de X , suivant l’ultrafiltre ω , par rapport à la suite de *points d’observation* $(*_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et à la suite de scalaires (λ_k) est par définition l’ultralimite $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ de la suite d’espaces métriques pointés $(X_k, d_k = \frac{1}{\lambda_k}d, *_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suivant l’ultrafiltre ω . On dira qu’une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de X est ω -bornée si elle est dans X_∞ (c’est-à-dire, si $\frac{1}{\lambda_k}d(*_k, x_k)$ est ω -borné).

Remarquons que si X est euclidien, alors X_ω est isométrique à X (car il existe des applications de X dans lui-même envoyant un point donné sur $*_k$ et multipliant la distance par λ_k).

Soit (ψ_k) une suite d’applications de X dans lui-même, diminuant la distance, telle que $\psi_k(*_k)$ est une suite ω -bornée dans X . Alors son ω -limite ψ_ω , notée $[\psi_k]$, est bien définie par $\psi_\omega([x_k]) = [\psi_k(x_k)]$ pour toute suite ω -bornée (x_k) , et elle diminue la distance.

On note G_∞ l’ensemble des suites $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d’éléments de G telles que $d_k(*_k, g_k *_k)$ est ω -borné. Pour $(g_k) \in G_\infty$, on note $[g_k]$ l’isométrie associée de X_ω , qui à $[x_k]$ associe $[g_k x_k]$. On note G_ω le groupe formé par les isométries de ce type.

On suppose désormais que X est un espace métrique CAT(0).

Proposition IV.1.2 1. *Le cône asymptotique X_ω est CAT(0).*

2. *Pour tous $x_\omega = [x_k]$, $y_\omega = [y_k]$ et $z_\omega = [z_k]$ dans X_ω , on a*

$$\tilde{\angle}_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) = \lim_{\omega} \tilde{\angle}_{x_k}(y_k, z_k) \quad \text{et} \quad \angle_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) \geq \lim_{\omega} \angle_{x_k}(y_k, z_k).$$

Preuve. Le point 1 est le lemme 2.4.4 de [KlLe]. La première assertion du point 2 est facile à voir, en regardant les triangles de comparaison (car les angles restent inchangés par les homothéties du plan). La deuxième en découle, car $\tilde{\angle}_{x_k}(y_k, z_k) \geq \angle_{x_k}(y_k, z_k)$ pour tout k , donc $\tilde{\angle}_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega)$ est supérieur ou égal à $\lim_{\omega} \angle_{x_k}(y_k, z_k)$, qui reste inchangé si on remplace y_k et z_k par y'_k et z'_k respectivement dans $[x_k, y_k]$ et $[x_k, z_k]$ pour tout k . On en déduit que pour tous y'_ω et z'_ω respectivement dans $[x_\omega, y_\omega]$ et $[x_\omega, z_\omega]$, on a $\tilde{\angle}_{x_\omega}(y'_\omega, z'_\omega) \geq \lim_{\omega} \angle_{x_k}(y_k, z_k)$, et on conclut en passant à la limite pour $y'_\omega \rightarrow x_\omega$ et $z'_\omega \rightarrow x_\omega$. □

Corollaire IV.1.3 *Supposons l’espace X complet et la suite de points d’observations constante égale à $*$. Soit x dans X et (y_k) et (z_k) deux suites ω -bornées dans X , tendant respectivement vers des points ξ et ξ' du bord de X . Alors*

$$\angle_{x_\omega}(y_\omega, z_\omega) \geq \angle_T(\xi, \xi')$$

où $x_\omega = [x]$, $y_\omega = [y_k]$ et $z_\omega = [z_k]$ dans X_ω .

Preuve. Soient y_ω' et z_ω' respectivement sur les segments $]x_\omega, y_\omega]$ et $]x_\omega, z_\omega]$ et (y'_k) et (z'_k) pour tout k respectivement sur les segments $]x_k, y_k]$ et $]x_k, z_k]$ tels que $y_\omega' = [y'_k]$ et $z_\omega' = [z'_k]$. Alors y'_k tend vers ξ et z'_k tend vers ξ' .

Il résulte de la proposition IV.1.2, (2) que $\tilde{\angle}_{x_\omega}(y_\omega', z_\omega') = \lim_\omega \tilde{\angle}_{x_k}(y'_k, z'_k)$, qui est supérieur à $\angle_T(\xi, \xi')$ par la semicontinuité de l'angle de comparaison (cf. proposition I.1.2).

En faisant tendre y_ω' et z_ω' vers x_ω , on obtient le résultat désiré. \square

On dit qu'une suite (r_k) de géodésiques de X est ω -bornée si la suite $(r_k(0))$ l'est. On appelle ω -limite de la suite (r_k) et on note $[r_k]$ l'application de \mathbb{R} dans X_ω qui à t associe $[r_k(\lambda_k t)]$, dont on voit facilement que c'est une géodésique de X_ω .

Proposition IV.1.4 *Les géodésiques de X_ω sont les ω -limites des géodésiques de X (voir par exemple [KlLe, 2.4.4]).* \square

Corollaire IV.1.5 *Soit r_k une suite ω -bornée de géodésiques de ω -limite r_ω . La ω -limite de la suite des projections orthogonales p_k sur r_k (qui à $[x_k]$ associe $[p_k(x_k)]$) est la projection orthogonale sur r_ω .*

Preuve. Soit (y_k) une suite ω -bornée dans X , et x_k la projection orthogonale de y_k sur r_k pour tout k . L'angle en $x_\omega = [x_k]$ entre $y_\omega = [y_k]$ et chacun des deux cotés de la géodésique r_ω est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ par la proposition IV.1.2 (2), donc x_ω est bien la projection orthogonale de y_ω sur r_ω (par les propriétés de la projection orthogonale dans les espaces CAT(0) complets). \square

Pour tout k , soient r_k et r'_k deux rayons géodésiques asymptotes de X . Supposons que les suites (r_k) et (r'_k) sont ω -bornées dans X . Alors les ω -limites r_ω et r'_ω des suites (r_k) et (r'_k) sont deux rayons géodésiques asymptotes de X_ω . L'application $(\partial X)^\mathbb{N} \rightarrow \partial X_\omega$, qui à la suite de terme $\alpha_k = r_k(\infty)$ associe $r_\omega(\infty)$, noté $[\alpha_k]$, est donc bien définie et surjective (car tout rayon de X_ω est ω -limite de rayons de X).

On suppose dorénavant que G un groupe de Lie semisimple réel, connexe, sans facteur compact, de centre fini et X l'espace symétrique de type non compact associé à G . Soit \mathbb{A} un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et \overline{W} le groupe de Weyl associé.

Une suite (f_k) de plats maximaux marqués de X est dite ω -bornée si la suite $(f_k(0))$ l'est, et son ω -limite est alors l'application $[f_k]$ de \mathbb{A} dans X_ω qui à a associe $[f_k(\lambda_k a)]$. On voit facilement que c'est une isométrie de \mathbb{A} dans X_ω .

Théorème IV.1.6 (Gromov, Kleiner-Leeb) *Le cône asymptotique X_ω , muni du système d'appartements formé par les ω -limites des suites ω -bornées de plats maximaux marqués de X , est un immeuble affine complet, de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$. Le groupe G_ω agit transitivement sur X_ω , par automorphismes d'immeuble, et transitivement sur les appartements marqués (voir [KlLe]).* \square

On fixe une chambre de Weyl fermée fondamentale \overline{C} de \mathbb{A} . Rappelons que Θ désigne l'application qui à un segment de l'espace symétrique de type non compact X (resp. de l'immeuble affine X_ω) associe son type dans \overline{C} . On a en particulier les propriétés suivantes.

Proposition IV.1.7 (Continuité de Θ) *Pour tout $x_\omega = [x_k]$ et $y_\omega = [y_k]$ de X_ω , on a $\Theta(x_\omega, y_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \Theta(x_k, y_k)$ dans \overline{C} .*

Preuve. Soit $u \in \overline{\mathcal{C}}$ la limite suivant l'ultrafiltre ω de la suite $u_k = \frac{1}{\lambda_k} \Theta(x_k, y_k)$ (qui est ω -bornée car $\frac{1}{\lambda_k} d(x_k, y_k)$ l'est). Pour tout k , soit f_k un plat maximal marqué tel que $f_k(0) = x_k$ et $f_k(\lambda_k u_k) = f_k(\Theta(x_k, y_k)) = y_k$. Alors la suite (f_k) est ω -bornée, et son ω -limite f est un appartement marqué de X_ω tel que $f(0) = [x_k] = x_\omega$ et $f(u) = [f_k(\lambda_k u)] = y_\omega$, car pour tout k on a $\frac{1}{\lambda_k} d(f_k(\lambda_k u_k), f_k(\lambda_k u)) = d_{\mathbb{A}}(u_k, u)$, qui tend vers 0. Par définition du type, on a donc $u = \Theta(x_\omega, y_\omega)$. \square

Fait IV.1.8 *Soit r_ω une géodésique de X_ω . Il existe une suite (r_k) ω -bornée de géodésiques de X de type constant égal à $\partial\Theta(r_\omega)$ telle que $[r_k] = r_\omega$. Le groupe G_ω agit transitivement sur les géodésiques de X_ω de type donné.*

Preuve. Soit u le type de r_ω , qui est un vecteur unitaire de la chambre de Weyl $\overline{\mathcal{C}}$. Soit f_ω un appartement marqué tel que pour tout réel t , on a $r_\omega(t) = f_\omega(tu)$. Soit (f_k) une suite ω -bornée de plats maximaux marqués de X tels que $f_\omega = [f_k]$ et soit r_k la géodésique $t \mapsto f_k(tu)$ (de type constant u). On a alors $[r_k] = r_\omega$ par définition de la ω -limite de la suite (f_k) .

La seconde assertion découle immédiatement de la transitivité des actions de G_ω sur X_ω et sur les appartements marqués. \square

Proposition IV.1.9 *Supposons que la suite de points d'observations est constante égale à $*$. Soit x dans X et (C_k) et (C'_k) deux suites de chambres de Weyl de X de sommet x , tendant respectivement vers des chambres de Weyl C et C' de X de sommet x . Supposons que les chambres $C(\infty)$ et $C'(\infty)$ sont opposées dans l'immeuble sphérique à l'infini de X . Alors les deux chambres de Weyl C_ω et C'_ω de sommet $x_\omega = [x]$ de X_ω ω -limites des suites (C_k) et (C'_k) sont opposées en x_ω .*

Preuve. Cela découle du corollaire IV.1.3, en prenant par exemple deux suites de rayons géodésiques r_k et r'_k , issus de x , respectivement dans C_k et C'_k pour tout k , de types constants (réguliers), opposés. Ces deux suites sont alors convergentes dans X , vers deux rayons géodésiques r et r' respectivement dans C et C' , de types opposés, donc vérifiant $\angle_T(r(\infty), r'(\infty)) = \pi$. L'angle en x_ω entre les ω -limites $r_\omega = [r_k]$ et $r'_\omega = [r'_k]$ est donc supérieur, donc égal à π , ce qui conclut. \square

IV.2 Modèle algébrique du cône asymptotique.

Cette section est consacrée à montrer que, pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, un cône asymptotique de l'espace symétrique de type non compact E_n associé est l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, pour un corps valué \mathbb{K}_ω totalement ordonné qu'on construit préalablement. Ce résultat nous a été communiqué par B. Leeb [Lee].

On suppose donc que $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. L'espace symétrique E_n associé à G sera identifié à l'ensemble des normes euclidiennes de volume 1 sur \mathbb{R}^n (voir section I.3), avec pour point-base x_0 la norme canonique ν_0 de \mathbb{R}^n , de stabilisateur $\mathrm{SO}(n)$ dans G .

Soit λ_k une suite de réels positifs non nuls tendant vers l'infini. On considère le cône asymptotique (X_ω, d_ω) de $(E_n, x_0, d_k = \frac{1}{\lambda_k} d)$.

IV.2.1 Le corps \mathbb{K}_ω .

Rappelons que ω désigne un ultrafiltre sur \mathbb{N} plus fin que le filtre de Fréchet.

L'ensemble \mathbb{R}_ω des suites de réels, modulo égalité ω -presque partout, muni de l'addition et de la multiplication terme à terme, est un corps (en effet, une suite de réels est soit nulle ω -presque partout, soit non nulle ω -presque partout). On note $(a_k)_\omega$ la classe de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ modulo égalité ω -presque partout. Le corps \mathbb{R} se plonge dans \mathbb{R}_ω via les suites constantes. On identifiera \mathbb{R} et son image lorsque cela n'engendre pas de confusion. La relation \leq_ω définie, pour tous $(a_k)_k, (b_k)_k \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, par

$$(a_k)_\omega \leq_\omega (b_k)_\omega \text{ si et seulement si } a_k \leq b_k \text{ } \omega\text{-presque partout}$$

fait de \mathbb{R}_ω un corps totalement ordonné. De plus, pour tout a positif dans \mathbb{R}_ω , il existe un unique élément \sqrt{a} positif de \mathbb{R}_ω de carré a .

Soit v l'application de \mathbb{R}_ω privé de 0 dans $[-\infty, +\infty]$ qui à $(a_k)_\omega$ associe $-\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log |a_k|$ (qui est bien définie car a_k est non nul pour ω -presque tout k). Notons $|\cdot|_v = e^{-v(\cdot)}$. On a les propriétés suivantes, i.e. v est une pseudo-valuation de \mathbb{R}_ω , triviale sur \mathbb{R} , compatible avec l'ordre, et $|\cdot|_v$ est la pseudo-valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{R}_ω associée à v (à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup +\infty$).

Proposition IV.2.1 1. $v((t)_\omega) = 0$ (ou encore $|(t)_\omega|_v = 1$) pour tout réel non nul t .

2. $v(ab) = v(a) + v(b)$ (ou encore $|ab|_v = |a|_v |b|_v$) pour tous a, b dans \mathbb{R}_ω tels que $v(a), v(b) > -\infty$.

3. Pour tous a, b dans \mathbb{R}_ω tels que $0 \leq_\omega b \leq_\omega a$, on a $v(a) \leq v(b)$ (ou encore $|b|_v \leq |a|_v$).

4. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ (ou encore $|a + b|_v \leq \max(|a|_v, |b|_v)$) pour tous a, b dans \mathbb{R}_ω .

5. Pour tous a et b positifs dans \mathbb{R}_ω , on a $|a + b|_v = \max(|a|_v, |b|_v)$.

6. Pour tous a_1, \dots, a_n positifs dans \mathbb{R}_ω , on a $\left| \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right|_v = \max_{i=1 \dots n} |a_i|_v$.

Preuve. Les trois premières affirmations sont faciles à démontrer. Montrons 4. Soient $(a_k), (b_k)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On peut supposer que $|b_k| \leq |a_k|$ ω -presque partout. On a alors $|a_k + b_k| \leq 2|a_k|$ ω -presque partout, c'est-à-dire $0 \leq_\omega (|a_k + b_k|)_\omega \leq_\omega 2(|a_k|)_\omega$, d'où $v((a_k + b_k)_\omega) \geq v((a_k)_\omega)$ par 3, 2 et 1, donc on a le résultat souhaité. L'affirmation 5 découle de 3 et 4, et 6 découle de 5 et 2 (qui entraîne que $|\sqrt{a}|_v = \sqrt{|a|_v}$ pour tout élément a positif de \mathbb{R}_ω). \square

Les éléments a de \mathbb{R}_ω tels que $|a|_v < +\infty$ forment un sous-anneau de \mathbb{R}_ω qu'on notera \mathbb{R}_ω' . Le quotient \mathbb{K}_ω de l'anneau \mathbb{R}_ω' par l'idéal formé par les éléments a tels que $|a|_v = 0$ est un corps totalement ordonné. Si (a_k) est une suite de réels telle que la suite $\frac{1}{\lambda_k} \log |a_k|$ est ω -majorée dans \mathbb{R} , on note $[a_k]$ le point de \mathbb{K}_ω associé.

L'application de \mathbb{K}_ω privé de 0 dans \mathbb{R} induite par v est une valuation de \mathbb{K}_ω , compatible avec l'ordre, qu'on notera également v . L'application de \mathbb{K}_ω dans \mathbb{R}_+ induite par $|\cdot|_v$ est la valeur absolue ultramétrique sur \mathbb{K}_ω associée à v . On la notera également $|\cdot|_v$. Toutes les propriétés énoncées dans la proposition IV.2.1 ci-dessus sont encore vraies si on remplace \mathbb{R}_ω par \mathbb{K}_ω .

IV.2.2 L'espace vectoriel \mathbb{K}_ω^n .

L'espace vectoriel \mathbb{R}_ω^n est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n)_\omega$ sur \mathbb{R}_ω des suites de vecteurs de \mathbb{R}^n , modulo égalité ω -presque partout (muni des opérations terme à terme). On les identifiera dorénavant. On note $(u_k)_\omega$ la classe de la suite (u_k) dans \mathbb{R}_ω^n . Pour toute famille $(u_k^1)_\omega, \dots, (u_k^n)_\omega$ de vecteurs dans \mathbb{R}_ω^n , on a $\det((u_k^1)_\omega, \dots, (u_k^n)_\omega) = (\det(u_k^1, \dots, u_k^n))_\omega$ dans \mathbb{R}_ω .

Notons η_0 l'application de \mathbb{R}_ω^n dans $[0, +\infty]$ qui à $u = (a_1, \dots, a_n)$ associe $\sup_{i=1 \dots n} |a_i|_v$, qui est égal à $\left| \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right|_v$ par la proposition IV.2.1. C'est la pseudo-norme ultramétrique canonique sur \mathbb{R}_ω^n associée à la pseudo-valuation v de \mathbb{R}_ω . Remarquons que, pour tout $u = (u_k)_\omega$ dans \mathbb{R}_ω^n , on a

$$\eta_0(u) = |(\nu_0(u_k))_\omega|_v = \lim_\omega \nu_0(u_k)^{\frac{1}{\lambda_k}}$$

ou encore $\log \eta_0(u) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log \nu_0(u_k)$.

L'espace vectoriel \mathbb{K}_ω^n sur \mathbb{K}_ω s'identifie au quotient du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}_ω^n formé par les vecteurs de pseudo-norme η_0 finie par celui formé par les vecteurs de pseudo-norme nulle. Il est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel sur \mathbb{K}_ω formé par les classes $[u_k]$ des suites (u_k) de vecteurs de \mathbb{R}^n telles que $\frac{1}{\lambda_k} \log \nu_0(u_k)$ est ω -majoré dans \mathbb{R} , où on identifie deux telles suites (u_k) et (w_k) quand $\frac{1}{\lambda_k} \log \nu_0(u_k - w_k)$ tend vers $-\infty$ suivant l'ultrafiltre ω . Pour toute famille $[u_k^1], \dots, [u_k^n]$ de vecteurs dans \mathbb{K}_ω^n , on a

$$\det([u_k^1], \dots, [u_k^n]) = [\det(u_k^1, \dots, u_k^n)]$$

dans \mathbb{K}_ω .

De même, l'algèbre $\text{End}(\mathbb{K}_\omega^n)$ s'identifie naturellement à l'espace quotient des suites (g_k) dans $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ telles que la limite $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log N(g_k)$ est finie, où on identifie deux telles suites (g_k) et (g'_k) quand $\frac{1}{\lambda_k} \log N(g_k - g'_k)$ tend vers $-\infty$ suivant l'ultrafiltre ω , muni des opérations terme à terme (où N désigne une norme quelconque sur $\text{End}(\mathbb{R}^n)$). On note alors $[g_k]$ l'élément de $\text{End}(\mathbb{K}_\omega^n)$ induit. Sa matrice dans la base canonique est $([g_k^{ij}])_{ij}$, où $(g_k^{ij})_{ij}$ est la matrice de g_k dans la base canonique de \mathbb{R}^n , pour tout k . On a $\det [g_k] = [\det g_k]$. Pour tout $u = [u_k]$ dans \mathbb{K}_ω^n , on a $[g_k][u_k] = [g_k u_k]$.

IV.2.3 Cône asymptotique et immeuble de $\text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

Rappelons que (X_ω, d_ω) est le cône asymptotique de $(E_n, x_0, d_k = \frac{1}{\lambda_k} d)$. On note G_ω le groupe formé par les automorphismes $[g_k]$ de X_ω associés aux suites ω -bornées dans G . Soit Δ_ω l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, formé par les normes ultramétriques adaptables, de volume 1, sur l'espace vectoriel \mathbb{K}_ω^n (voir chapitre III).

Théorème IV.2.2 *L'application ϕ de X_ω dans Δ_ω qui à $x_\omega = [\nu_k]$ associe la norme η_{x_ω} qui à $v = ([x_k^1], \dots, [x_k^n]) \in \mathbb{K}_\omega^n$ associe $|\nu_k(x_k^1, \dots, x_k^n)|_v = \lim_\omega \nu_k(x_k^1, \dots, x_k^n)^{\frac{1}{\lambda_k}}$, est un isomorphisme d'immeubles.*

Si (g_k) est une suite ω -bornée d'éléments de G , avec g_k de matrice $(g_k^{ij})_{ij}$, alors l'isométrie $g_\omega : [\nu_k] \mapsto [g_k \cdot \nu_k]$ du cône asymptotique X_ω associée à la suite (g_k) est conjuguée par ϕ à l'automorphisme de Δ_ω défini par la matrice $[g_k] = ([g_k^{ij}])_{ij}$ de $\text{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$.

Preuve. Pour toute suite $x = (\nu_k)$ de normes sur \mathbb{R}^n , on note η_x l'application de \mathbb{R}_ω^n dans $\mathbb{R}_+ \cup +\infty$ qui à $u = (u_k)_\omega$ associe $|(\nu_k(u_k))_\omega|_v$. On voit facilement que η_x est une pseudo-norme ultramétrique, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés $\eta_x(au) = |a|_v \eta_x(u)$ et $\eta_x(u+w) \leq \max\{\eta_x(u), \eta_x(w)\}$.

Si x est la suite constante égale à la norme euclidienne canonique ν_0 sur \mathbb{R}^n , alors, comme remarqué précédemment, η_x est la pseudo-norme ultramétrique canonique η_0 sur \mathbb{R}_ω^n associée à la pseudo-valuation v .

Soient $x = (\nu_k)$ et $y = (\nu'_k)$ deux suites dans E_n , c'est-à-dire deux suites de normes euclidiennes de volume 1 sur \mathbb{R}^n , telles que l'écart $d_\omega(x, y)$ est fini. On a donc $d_\infty^\omega(x, y) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d_\infty(\nu_k, \nu'_k)$, qui est fini, car, comme $d_\infty \leq d \leq \sqrt{n}d_\infty$ sur E_n , on a $d_\infty^\omega \leq d_\omega \leq \sqrt{n}d_\infty^\omega$ sur $E_n^\mathbb{N}$. Soit $u = (u_k)_\omega$ un élément de \mathbb{R}_ω^n . Pour tout k , on a

$$0 \leq e^{-d_\infty(\nu_k, \nu'_k)} \nu'_k(u_k) \leq \nu(u_k) \leq e^{d_\infty(\nu_k, \nu'_k)} \nu'_k(u_k)$$

dans \mathbb{R} . Par conséquent, on a

$$0 \leq \left(e^{-d_\infty(\nu_k, \nu'_k)} \right)_\omega (\nu'_k(u_k))_\omega \leq (\nu(u_k))_\omega \leq \left(e^{d_\infty(\nu_k, \nu'_k)} \right)_\omega (\nu'_k(u_k))_\omega$$

dans \mathbb{R}_ω , et, en prenant la pseudo-valeur absolue de chaque terme, on obtient

$$0 \leq e^{-d_\infty^\omega(x, y)} \eta_y(u) \leq \eta_x(u) \leq e^{d_\infty^\omega(x, y)} \eta_y(u) \quad (\text{IV.1})$$

dans \mathbb{R}_+ , grâce aux propriétés de la pseudo-valeur absolue (cf. Prop. IV.2.1). On en déduit que si l'écart $d_\omega(x, y)$ est nul, alors $\eta_x = \eta_y$ (car, comme d_ω et d_∞^ω sont équivalents, on a alors $d_\infty^\omega(x, y) = 0$).

Supposons que la suite $\frac{1}{\lambda_k} d(\nu_0, \nu_k)$ est ω -bornée. En appliquant (IV.1) à $y = (\nu_0)$, on a que $\eta_x(u)$ est fini si et seulement si $\eta_0(u)$ est fini et $\eta_x(u) = 0$ si et seulement si $\eta_0(u) = 0$. Donc η_x passe au quotient en une norme ultramétrique sur \mathbb{K}_ω^n , qui ne dépend que du point x_ω du cône asymptotique X_ω défini par la suite $x = (\nu_k)$ d'après ce qu'on vient de faire. Il est clair que cette norme ultramétrique est égale à l'application η_{x_ω} de l'énoncé.

Montrons que pour tout appartement $f : \mathbb{A} \rightarrow X_\omega$ de X_ω , l'application $\phi \circ f$ est un appartement de Δ_ω (donc, en particulier, ϕ est injective et à valeurs dans le sous-ensemble Δ_ω des normes ultramétriques sur \mathbb{K}_ω^n adaptables, de volume 1).

Soit f un appartement marqué de X_ω . Par le théorème IV.1.6, f est la ω -limite d'une suite f_k de plats maximaux marqués de E_n , restant à distance $\frac{1}{\lambda_k} d$ ω -bornée de l'origine, c'est-à-dire tels que la limite $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d(\nu_0, f_k(0))$ est finie. Rappelons que f est défini par $f(\alpha) = [f_k(\lambda_k \alpha)]$ pour tout α de \mathbb{A} .

Pour tout k , soit $\mathcal{E}_k = (e_k^1, \dots, e_k^n)$ une base de \mathbb{R}^n de déterminant 1, telle que f_k est le plat maximal marqué associé à \mathcal{E}_k . La limite $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log \nu_0(e_k^i)$ est finie pour tout $i = 1 \dots n$, car $\log \nu_0(e_k^i) \leq d(\nu_0, f_k(0))$ pour tout i, k , par le lemme I.3.1 appliqué à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$ et $\nu = f_k(0)$.

Le vecteur $e_i = [e_k^i]$ de \mathbb{K}_ω^n est donc bien défini. Le déterminant dans \mathbb{K}_ω^n de la famille de vecteurs $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est égal à $[\det \mathcal{E}_k]$. Or $\det \mathcal{E}_k = 1$ pour tout k , donc \mathcal{E} est une base de déterminant 1 de \mathbb{K}_ω^n . Notons $f_\mathcal{E}$ l'appartement de Δ_ω associé à \mathcal{E} . Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans \mathbb{A} , l'image de α par $f_\mathcal{E}$ est par définition la norme ultramétrique sur \mathbb{K}_ω^n , de base adaptée \mathcal{E} , valant e^{α_i} sur le vecteur e_i .

Montrons que $\phi \circ f = f_\mathcal{E}$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un élément de \mathbb{A} . Notons ν_k l'image par f_k de $\lambda_k \alpha$, qui est l'unique norme euclidienne admettant \mathcal{E}_k pour base orthogonale et vérifiant $\nu_k(e_k^i) = e^{\lambda_k \alpha_i}$ pour $i = 1 \dots n$. Par définition de f , on a l'image de α par f est le point $x_\omega = [\nu_k]$ de X_ω associé à la suite (ν_k) . Soit $\eta_{x_\omega} = \phi(x_\omega)$ la norme ultramétrique sur \mathbb{K}_ω^n associée à x_ω . Pour tous $a_1 = [a_k^1], \dots, a_n = [a_k^n]$ dans \mathbb{K}_ω , on a

$$\eta_{x_\omega}(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \left| \left[\nu_k(\sum_{i=1}^n a_i e_k^i) \right] \right|_v = \left| \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n e^{\lambda_k \alpha_i} (a_k^i)^2} \right] \right|_v = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n [e^{\lambda_k \alpha_i} (a_k^i)^2]} \right|_v = \max_{i=1 \dots n} e^{\alpha_i} |a_i|_v$$

Par conséquent η_ω est l'image de α par l'appartement $f_\mathcal{E}$ associé à la base \mathcal{E} de déterminant 1 de \mathbb{K}_ω^n .

Montrons maintenant que, pour tout appartement $f_\mathcal{E}$ de Δ_ω associé à une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de déterminant 1 de \mathbb{K}_ω^n , il existe un appartement f de X_ω tel que $\phi \circ f = f_\mathcal{E}$ (donc, en particulier, ϕ est surjective). Pour $i = 1 \dots n$, soit $(e_k^i)_k$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n telle que $e_i = [e_k^i]$. On a donc en particulier que $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log \nu_0(e_k^i) < +\infty$ pour $i = 1 \dots n$. Notons \mathcal{E}_k la famille (e_k^1, \dots, e_k^n) de vecteurs de \mathbb{R}^n . On a $[\det \mathcal{E}_k] = \det \mathcal{E} = 1$, donc $\det \mathcal{E}_k$ est non nul ω -presque partout (en effet, sinon il est nul ω -presque partout et $[\det \mathcal{E}_k] = 0$). Donc, pour ω -presque tout k , la famille de vecteurs \mathcal{E}_k est une base de \mathbb{R}^n , qu'on peut supposer de déterminant 1, quitte à diviser e_k^1 par $\det \mathcal{E}_k$, ce qui ne change pas $[e_k^1] = e_1$, car $[\frac{1}{\det \mathcal{E}_k} e_k^1] = \frac{1}{[\det \mathcal{E}_k]} [e_k^1] = [e_k^1]$. Soit f_k le plat maximal marqué de E_n associé à la base \mathcal{E}_k . En appliquant le lemme I.3.1 à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$ et $\nu = f_k(0)$, on a que

$$\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d(\nu_0, f_k(0)) \leq \sqrt{n}(n-1) \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \sup_{i=1 \dots n} \log \nu_0(e_k^i) < +\infty.$$

Donc cette suite de plats maximaux marqués définit un appartement marqué f du cône asymptotique X_ω . D'après ce qu'on a fait précédemment, on a bien $\phi \circ f = f_\mathcal{E}$.

On en conclut que ϕ est bien un automorphisme d'immeubles.

Montrons maintenant la deuxième assertion. Soit g_k une suite ω -bornée dans G et $g_\omega = [g_k]$ l'isométrie de X_ω associée. Alors, d'après la formule I.5, on a

$$\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log N(g_k) \leq \lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} d(\nu_0, g_k \cdot \nu_0) < +\infty$$

et de même $\lim_\omega \frac{1}{\lambda_k} \log N(g_k^{-1}) < +\infty$. Les suites (g_k) et (g_k^{-1}) définissent donc bien deux éléments g et g' de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, et on a $gg' = I$ donc $g' = g^{-1}$.

Montrons que, pour tout x_ω de X_ω , on a $g \cdot \phi(x_\omega) = \phi(g_\omega x_\omega)$. Notons $y_\omega = g_\omega x_\omega$, $\eta_{x_\omega} = \phi(x_\omega)$ et $\eta_{y_\omega} = \phi(y_\omega)$. Soit (ν_k) une suite de normes euclidiennes dans E_n telle que $x_\omega = [\nu_k]$, et $\nu'_k = g_k \cdot \nu_k = \nu_k \circ g_k^{-1}$. On a $y_\omega = [\nu'_k]$. Pour tout vecteur $v = [v_k]$ dans \mathbb{K}_ω^n , on a

$$g \cdot \eta_{x_\omega}(v) = \eta_{x_\omega}(g^{-1}v) = \eta_{x_\omega}([g_k^{-1}v_k]) = \lim_\omega \nu_k(g_k^{-1}v_k)^{\frac{1}{\lambda_k}} = \lim_\omega \nu'_k(v_k)^{\frac{1}{\lambda_k}} = \eta_{y_\omega}(v)$$

ce qui conclut. □

Chapitre V

Compactification.

V.1 La méthode de compactification utilisée.

Dans ce paragraphe, on donne la méthode de compactification d'un espace topologique qui sera utilisée en section V.4.

Soit \mathcal{E} un espace topologique.

Définition V.1.1 Une compactification de \mathcal{E} est une paire $(\eta, \tilde{\mathcal{E}})$, où $\tilde{\mathcal{E}}$ est un espace topologique compact et $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ un homéomorphisme sur son image, avec $\eta(\mathcal{E})$ ouvert et dense dans $\tilde{\mathcal{E}}$. Le complémentaire de $\eta(\mathcal{E})$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$ est appelé le bord de \mathcal{E} .

Remarque. Pour qu'un espace topologique admette une compactification, il est nécessaire qu'il soit localement compact.

Exemple. Soit \mathcal{E} un espace topologique localement compact. On pose $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$, muni de la topologie étendant celle de \mathcal{E} où les complémentaires des compacts de \mathcal{E} forment une base de voisinages de ∞ . Alors $(Id, \hat{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , appelée *compactification d'Alexandroff* de \mathcal{E} .

Soit \mathcal{E} un espace topologique localement compact. Soit C un espace topologique séparé et f une application continue de \mathcal{E} dans C d'image relativement compacte. Soit $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de \mathcal{E} . Soit g l'application continue de \mathcal{E} dans $\hat{\mathcal{E}} \times C$ qui à x associe $(x, f(x))$, et $\tilde{\mathcal{E}}$ l'adhérence de son image, qui est compacte. Alors $(g, \tilde{\mathcal{E}})$ est une compactification de \mathcal{E} , dite *associée* à f , dont le bord s'identifie à une partie de C .

V.2 Vecteur de translation.

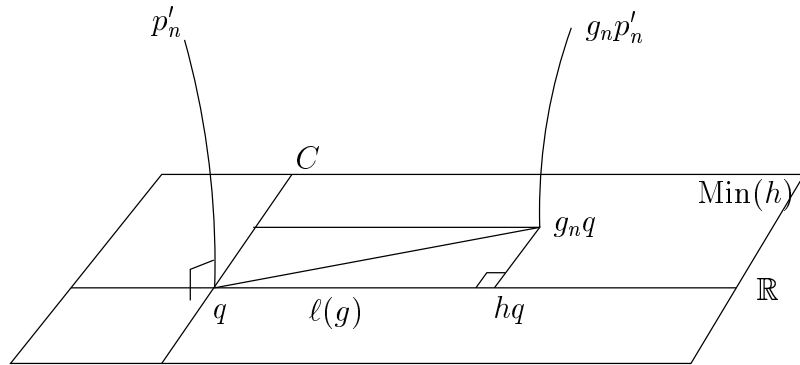
V.2.1 Vecteur de translation d'une isométrie d'un espace symétrique ou d'un immeuble.

Soit X un espace symétrique de type non compact et x_0 un point de X . Soit $G = \text{Isom}(X)_0$ la composante neutre du groupe des isométries de X . Soit A un sous-espace de

Cartan de l'algèbre de Lie de G et \overline{C} une chambre de Weyl fermée de \mathbb{A} . Le type dans \overline{C} d'un segment $[x, y]$ de X est noté $\Theta(x, y)$ (voir section I.2).

Proposition V.2.1 *Soit g dans G . L'adhérence dans \overline{C} de $\{\Theta(x, g.x), x \in X\}$ contient un unique segment de longueur minimale (donc égale à la longueur de translation $\ell(g)$ de g), qu'on note $v(g)$, et qu'on appelle vecteur de translation de g .*

Preuve. L'existence est claire, montrons l'unicité. Pour tout x de X , on a $\|\Theta(x, g.x)\| = d(x, g.x) = d_g(x)$, donc la borne inférieure des longueurs de $\Theta(x, g.x)$, pour $x \in X$, est égale à la distance de translation $\ell(g) = \inf_{x \in X} d_g(x)$ de g . L'unicité est évidente si $\ell(g) = 0$. Supposons que $\ell(g)$ est strictement positif. Soit p_n une suite de points de X tels que $d_g(p_n)$ tend vers $\ell(g)$. Soit $g = heu$ la décomposition de Jordan de g avec h hyperbolique, e elliptique et u unipotent commutant deux à deux. Pour tout n , soit q_n la projection orthogonale de p_n sur le convexe fermé non vide $\text{Min}(h)$. Comme g stabilise $\text{Min}(h)$, la projection de gp_n sur $\text{Min}(h)$ est gq_n . Donc $d_g(q_n)$ est inférieur ou égal à $d_g(p_n)$, et $d_g(q_n)$ tend également vers $\ell(g)$. Fixons un point q de $\text{Min}(h)$. Comme le commutateur $Z(h)$ de h agit transitivement sur $\text{Min}(h)$ (voir par exemple [Ebe, Prop. 4.1.4]), on peut choisir une suite $z_n \in Z(h)$ telle que $z_n q_n = q$. Soit $p'_n = z_n p_n$ et $g_n = z_n g z_n^{-1}$ pour tout n . Soit $\phi = gh^{-1} = eu$ et $\phi_n = z_n \phi z_n^{-1}$. Comme $\ell(g) > 0$, le convexe fermé $F = \text{Min}(h)$ est isométrique à un produit riemannien $C \times \mathbb{R}$ avec $h = (\text{id}, \ell(h))$ et $\phi = (\phi, 0)$ sur $F = C \times \mathbb{R}$ (voir prop. I.2.3). On a donc également



$\phi_n = (\phi_n, 0)$ sur $F = C \times \mathbb{R}$. Donc $d_{g_n}(q)$ est égal à $\sqrt{\ell(h)^2 + d(hq, g_n q)^2}$. Or $d_{g_n}(q)$ tend vers $\ell(g) = \ell(h)$, donc $g_n q$ tend vers hq . Si p'_n ne tend pas vers q , quitte à extraire, le rayon géodésique issu de q et passant par p'_n converge vers un rayon r orthogonal à $\text{Min}(h)$ en q , et son image par g'_n converge vers un rayon r' issu de hq et orthogonal à $\text{Min}(h)$. Pour tout $t > 0$, la distance entre $r(t)$ et $r'(t)$ est strictement plus grande que $d(q, hq) = \ell(h) = \ell(g)$ (sinon la géodésique passant par ces deux points est parallèle à celle passant par les points q et hq , donc $r(t) \in \text{Min}(h)$, ce qui est impossible). On en déduit que p'_n tend vers q et que $g_n p'_n$ tend vers hq . Donc $\Theta(p_n, gp_n) = \Theta(p'_n, g_n p'_n)$ tend vers $\Theta(q, hq)$ par continuité de Θ . On conclut en remarquant que le type du segment joignant un point à son image par h est constant sur $\text{Min}(h)$. \square

Remarque. La notion de vecteur de translation est plus fine que celle de longueur de translation (car $v(g)$ est de norme $\ell(g)$). On remarque que v est invariante par conjugaison, et qu'on a $v(g) = v(h)$ où h est la partie hyperbolique dans la décomposition de Jordan. Si g

est semisimple, on a $v(g) = \Theta(x, gx)$ pour tout x de $\text{Min}(g)$. Pour tout g , on a $v(g^N) = Nv(g)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. C'est donc en fait, bien que présenté différemment, le même invariant que celui noté $\log \lambda(g)$ dans [Ben].

Exemple. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on peut choisir $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{d}^+ = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$ et pour $g \in G$, on a alors que $v(g)$ est la suite des logarithmes des modules des valeurs propres de g , par ordre décroissant (car $v(g) = v(h)$ où h est la partie hyperbolique dans la décomposition de Jordan, c'est-à-dire diagonalisable à valeurs propres réelles positives, et les valeurs propres de h sont les modules des valeurs propres de g d'après la réduction de Jordan. Il ne reste plus qu'à calculer v pour une matrice d diagonale à coefficients positifs, ce qui est aisé car $x_0 = I \in \text{Min}(d)$).

Cette notion est définie de manière analogue pour les isométries d'un immeuble affine complet Δ préservant le type des segments, pour lesquelles la situation est plus simple car elles sont toutes semisimples d'après les résultats de la section II.3. Soit g une telle isométrie, alors par définition $v(g) = \Theta(x, gx)$ pour un (tout) point x dans l'ensemble minimal de translation de g (qui est non vide par les résultats de la section II.3).

Soit X un espace symétrique sans facteur compact (resp. un immeuble affine), et g une isométrie de X qui fixe deux points du bord opposés ξ^+ et ξ^- . Alors g préserve le sous-espace $F = F_{\xi^-\xi^+}$ de X formé par la réunion des géodésiques de ξ^- à ξ^+ . Cet espace se décompose (voir section I.1) en produit $F = C \times \mathbb{R}$ et, en restriction à F , g se décompose parallèlement en (g', t) , où g' est une isométrie de C et t une translation de \mathbb{R} . Les sous-espaces F et C de X sont des espaces symétriques sans facteurs compacts (resp. des sous-immeubles). Soit $\overline{\mathbf{C}}_F$ une chambre de Weyl fermée de F et $\overline{\mathbf{C}}_C$ la chambre de Weyl fermée de C telle que $\overline{\mathbf{C}}_F = \overline{\mathbf{C}}_C \times \mathbb{R}$. Notons p la projection canonique de $\overline{\mathbf{C}}_F$ dans $\overline{\mathbf{C}}$, qui est continue. Notons v_F (resp. v_C) la fonction vecteur de translation de F (resp. C) à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}_F$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}_C$).

Fait V.2.2 *Dans la situation décrite ci-dessus, le vecteur $v(g)$ est l'image par la projection p du vecteur $v_F(g|_F) = v_C(g') + v_{\mathbb{R}}(t)$.* □

Revenons maintenant au cas des espaces symétriques de type non compact.

Proposition V.2.3 *La fonction v de G dans $\overline{\mathbf{C}}$ est continue.*

Remarque. Ceci entraîne que la longueur de translation est continue sur $\text{Isom}_0(X)$. Cette propriété n'est pas vraie pour tous les espaces métriques CAT(0). Par exemple, dans le plan euclidien, les translations non nulles sont limites de rotations.

Remarque. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de voir que les modules des valeurs propres dépendent continûment de la matrice A , ce qui est bien connu.

Dans le cas général, nous allons donner maintenant une démonstration purement géométrique, reposant sur la dynamique des isométries sur le bord à l'infini de X .

Preuve. Soit $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans G , de limite g . Montrons que la suite des vecteurs de translation $v(g_k)$ de g_k possède une sous-suite convergeant vers $v(g)$ (cette propriété est équivalente à la continuité de v en g).

Si $\ell(g) = 0$, alors, par semi-continuité supérieure de la longueur de translation, la longueur de translation $\ell(g_k)$ de g_k tend nécessairement vers 0 et donc $v(g_k) \rightarrow 0$ (car $v(g_k)$ est de longueur $\ell(g_k)$) ce qui conclut.

Supposons que la longueur de translation $\ell(g)$ de g est strictement positive.

Soient ξ^+ et ξ^- comme dans la proposition I.2.3, et $F = F_{\xi^-\xi^+}$ le sous-espace convexe fermé de X formé par la réunion des géodésiques de ξ^- à ξ^+ .

Soit p un point de F . Soit $D > 0$ et $O_-(p, D)$ l'ombre sur le bord de X de la boule fermée $B(p, D)$, vue du point ξ^- , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités (dans ∂X) des géodésiques issues de ξ^- , et passant à distance inférieure à D de p . C'est un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G\xi^+$, qui est une variété. Soit B une boule topologique euclidienne fermée, contenue dans $O_-(p, D)$, contenant ξ^+ dans son intérieur.

D'après la proposition I.2.3, il existe N tel que l'image par g^N de $O_-(p, D)$ est incluse dans l'intérieur de B .

Si $v(g_k^N)$ tend vers $v(g^N)$ quand k tend vers l'infini, alors $v(g_k)$ tend vers $v(g)$ quand k tend vers l'infini car pour tout $h \in G$ on a $v(h^N) = Nv(h)$. Quitte à remplacer g par g^N et g_k par g_k^N , on donc peut supposer que $g(B)$ est inclus dans l'intérieur de B .

Comme l'action de G sur $G\xi^+$ est continue, il existe K tel que pour $k \geq K$, on a $g_k(B) \subset B$. Comme g_k est continue sur B , elle admet alors un point fixe z_k dans B par le théorème de Brouwer.

Quitte à extraire, la suite z_k tend vers un point z de B , qui est fixé par g . Comme ξ^+ est le seul point fixe de g dans B (cf prop. I.2.3), on a $z = \xi^+$.

Soit h_k un élément de G fixant ξ^- et envoyant p sur un point de $F_{\xi^-z_k}$ à distance inférieure à D de p (qui existe car z_k est dans $O_-(p, D)$), donc envoyant ξ^+ sur ξ_k^+ . Quitte à extraire, h_k tend vers $h \in G$. La suite $h_k^{-1}g_k h_k$ tend vers $h^{-1}gh$, et $v(h_k^{-1}g_k h_k) = v(g_k)$ et $v(g) = v(h^{-1}gh)$.

On peut donc supposer, quitte à remplacer g_k par $h_k^{-1}g_k h_k$ et g par $h^{-1}gh$, que $\xi_k^+ = \xi^+$, c'est-à-dire que g_k fixe ξ^+ pour k suffisamment grand.

On peut aussi supposer (en échangeant les rôles de ξ^+ et ξ^-) que g_k fixe le point ξ^- pour k suffisamment grand.

L'espace F se décompose en un produit direct $C \times \mathbb{R}$, et g agit sur $F = C \times \mathbb{R}$ comme $(g', \ell(g))$, où $\ell(g)$ désigne la translation $s \mapsto s + \ell(g)$ de \mathbb{R} et g' est une isométrie de C (avec $\ell(g') = 0$) (voir prop. I.2.3). De même, g_k agit sur F comme (g'_k, t_k) , où g'_k est une isométrie de C et t_k la translation de longueur t_k de \mathbb{R} , et on a $\ell(g_k) = \sqrt{\ell(g'_k)^2 + t_k^2} \geq t_k$ (voir section I.1). Comme g_k tend vers g , on a $t_k \rightarrow \ell(g)$ (par exemple en considérant la projection orthogonale sur $\{p\} \times \mathbb{R}$, qui est continue), donc $\ell(g_k)$ tend vers $\ell(g)$. On en déduit que $\ell(g'_k)$ tend vers 0.

Les sous-espaces F et C de X sont des espaces symétriques sans facteurs compacts. Soit $\overline{\mathbf{C}}_F$ une chambre de Weyl fermée de F et $\overline{\mathbf{C}}_C$ la chambre de Weyl fermée de C telle que $\overline{\mathbf{C}}_F = \overline{\mathbf{C}}_C \times \mathbb{R}$. Notons π la projection canonique de $\overline{\mathbf{C}}_F$ dans $\overline{\mathbf{C}}_C$. Notons v_F (resp. $v_C, v_{\mathbb{R}}$) la fonction vecteur de translation de F (resp. C) à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}_F$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}_C$).

On a $v_F(g_k) = v_C(g'_k) + t_k$ et $v(g_k) = \pi(v_F(g_k))$ (cf. fait V.2.2).

Comme $\pi(t_k)$ tend vers $v(g)$ et $v_C(g'_k)$ tend vers 0, on en déduit que $v(g_k)$ tend vers $v(g)$, car π est continue. □

V.2.2 Continuité asymptotique de v .

Soit ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} plus fin que le filtre de Fréchet. Soit (λ_i) une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, et $(*_i)$ une suite de points de X . Soit (X_ω, d_ω) le cône asymptotique de $(X, *_i, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω .

Proposition V.2.4 *Pour toute suite (g_i) dans G telle que la suite $\frac{1}{\lambda_i}d(*_i, g_i*_i)$ est ω -bornée, si g_ω est l'isométrie de X_ω associée, la suite $(\frac{1}{\lambda_i}v(g_i))$ a pour limite $v(g_\omega)$ suivant l'ultrafiltre ω .*

Preuve. Comme X_ω est un immeuble affine complet et g_ω un automorphisme de X_ω (cf. théorème IV.1.6), on sait que g_ω fixe un point ou translate une géodésique (cf. Chap. II, Corollaire II.3.2).

On voit facilement que $\lim_\omega \frac{\ell(g_i)}{\lambda_i} \leq \ell(g_\omega)$. Par conséquent, si g_ω fixe un point, on a $\lim_\omega \frac{\ell(g_i)}{\lambda_i} = \ell(g_\omega) = 0$, donc, comme $v(g_i)$ a pour norme $\ell(g_i)$ pour tout i , on a $\lim_\omega \frac{v(g_i)}{\lambda_i} = 0$, ce qui conclut.

On peut donc supposer dorénavant que g_ω translate une géodésique r_ω de X_ω . Quitte à conjuguer chaque g_i , on peut supposer pour simplifier les notations que la suite des points-base $(*_i)$ est constante égale à x_0 .

Soit r une géodésique de X telle que $r(0) = x_0$, de même type que r_ω . Alors, d'après IV.1.8, il existe une suite (h_i) dans G_∞ telle que $h_\omega = [h_i]$ envoie $[r] : t \mapsto [r(\lambda_i t)]$ sur r_ω . Quitte à conjuguer chaque g_i par h_i , on peut donc supposer (toujours pour simplifier) que $r_\omega = [r]$. Notons $\xi^+ = r(+\infty)$, $\xi^- = r(-\infty)$ les extrémités de r .

Pour tout réel t et pour tout réel positif D , notons $O_-(t, D)$ l'ombre sur le bord de X de la boule fermée $B(r(t), D)$, vue du point ξ^- , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités (dans ∂X) des géodésiques issues de ξ^- , et passant à distance inférieure à D de $r(t)$.

Lemme V.2.5 (Contraction des ombres) *Pour tous réels strictement positifs D, t, ε , l'image par g_i de l'ombre $O_-(0, D)$ est incluse dans l'ombre $O_-(t, \varepsilon)$ pour ω -presque tout i .*

Preuve. On raisonne par l'absurde. Sinon, il existe $D, t, \varepsilon > 0$ et une suite z_i dans ∂X avec $z_i \in O_-(0, D)$ et $g_i z_i \notin O_-(t, \varepsilon)$ ω -presque partout. Soit σ_i une géodésique de ξ^- à z_i telle que $d(r(0), \sigma_i(0)) \leq D$. Alors les géodésiques r_ω et $\sigma_\omega = [\sigma_i]$ de X_ω sont confondues sur $]-\infty, 0]$, car elles sont asymptotes en $-\infty$ et $d_\omega(r_\omega(0), \sigma_\omega(0)) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i}d(r(0), \sigma_i(0)) = 0$ (la situation est représentée sur la figure V.1).

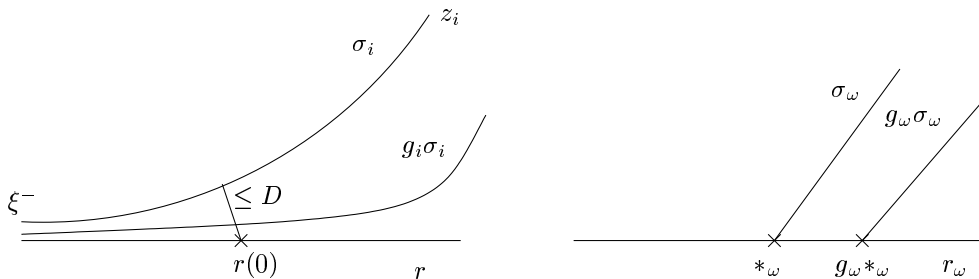


FIG. V.1 – Preuve du lemme V.2.5.

On a donc $\angle_{*_{\omega}}(r_{\omega}(+\infty), g_{\omega}\sigma_{\omega}(+\infty)) = 0$ (où $*_{\omega}$ est le point-base de X_{ω}), donc, comme le passage au cône asymptotique augmente les angles (voir prop. IV.1.2, (2)), on en déduit que $\angle_{r(t)}(\xi^+, g_i z_i) \rightarrow_{\omega} 0$ (car $[r(t)] = *_{\omega}$). Par conséquent $\angle_{r(t)}(\xi^-, g_i z_i) \rightarrow_{\omega} \pi$, et donc (par le fait I.2.1), la distance du point $r(t)$ à la réunion F_i des géodésiques de ξ^- à $g_i z_i$ tend vers 0 suivant l'ultrafiltre ω . Or, par hypothèse, on a $d(r(t), F_i) \geq \varepsilon$ ω -presque partout, ce qui est contradictoire. \square

Suite de la preuve de la proposition V.2.4. Soit $D > 0$. L'ombre $O_-(0, D)$ est un voisinage de ξ^+ dans son orbite $G.\xi^+$. Comme $G.\xi^+$ est une variété, elle contient donc une boule topologique euclidienne B contenant ξ^+ dans son intérieur. Comme les ombres $(O_-(t, \varepsilon))_{t, \varepsilon > 0}$ forment une base de voisinages de ξ^+ dans $G.\xi^+$ (cf. Fait I.2.2), il existe t et ε strictement positifs tels que l'ombre $O_-(t, \varepsilon)$ est contenue dans B .

D'après le lemme V.2.5, on a alors, pour ω -presque tout i , que g_i conserve la boule B donc que g_i admet un point fixe ξ_i^+ dans $O_-(t, \varepsilon)$ par le théorème de Brouwer (car g_i est continue sur B).

Comme $\xi_{\omega}^+ = [\xi^+]_+$ est un point du bord de X_{ω} opposé à $[\xi^-]_- = r_{\omega}(-\infty)$ et fixé par l'isométrie g_{ω} , qui translate la géodésique r_{ω} , il est nécessairement égal à $r_{\omega}(+\infty) = [\xi^+]_+$ (voir I.1.3).

On peut donc supposer, quitte à conjuguer chaque g_i , que $\xi_i^+ = \xi^+$, c'est-à-dire que g_i fixe ξ^+ pour ω -presque tout i .

On peut aussi supposer (en échangeant les rôles de ξ^+ et ξ^-) que g_i fixe le point ξ^- pour ω -presque tout i .

Pour ω -presque tout i , g_i préserve le sous-espace convexe fermé $F = F_{\xi^-\xi^+}$ formé par la réunion des géodésiques de ξ^- à ξ^+ . Ce sous-espace se décompose en un produit direct $C \times \mathbb{R}$ et g_i se décompose parallèlement en produit (g'_i, t_i) en restriction à $F = C \times \mathbb{R}$, où g'_i est une isométrie de C et t_i la translation $s \mapsto s + t_i$ de \mathbb{R} (voir section I.1).

Soit p_i l'image de x_0 par g_i et q_i sa projection orthogonale sur r . Alors $q_i = t_i x_0$. Comme la

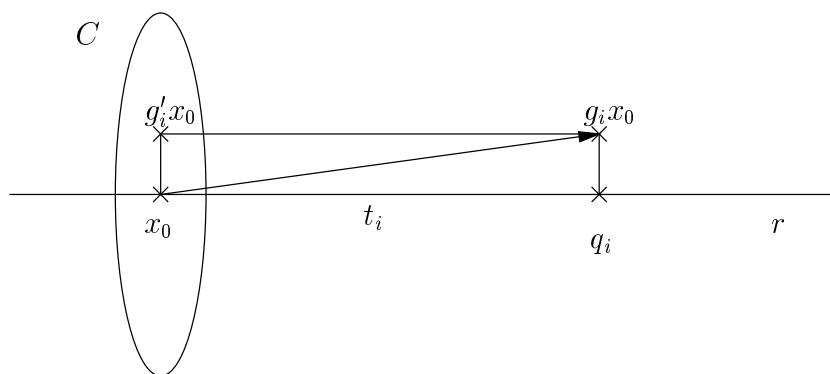


FIG. V.2 –

limite de la suite des projections orthogonales sur r est la projection orthogonale sur r_{ω} (voir le corollaire IV.1.5), on a que $q_{\omega} = [q_i]$ est égal à la projection orthogonale de $g_{\omega} *_{\omega}$ sur r_{ω} . Or $g_{\omega} *_{\omega} \in r_{\omega}$, donc on a $q_{\omega} = g_{\omega} *_{\omega}$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda_i} d(x_0, g'_i x_0)$ tend vers 0 suivant l'ultrafiltre ω , et donc $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_i} \ell(g'_i) = 0$. On en déduit que $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_i} \Theta(x_0, t_i x_0) = \Theta(*_{\omega}, g_{\omega} *_{\omega}) = v(g_{\omega})$.

Les sous-espaces F et C de X sont des espaces symétriques sans facteurs compacts. Soit $\overline{\mathcal{C}}_F$ une chambre de Weyl fermée de F et $\overline{\mathcal{C}}_C$ la chambre de Weyl fermée de C telle que $\overline{\mathcal{C}}_F = \overline{\mathcal{C}}_C \times \mathbb{R}$. Notons p la projection canonique de $\overline{\mathcal{C}}_F$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. Notons v_F (resp. v_C) la fonction vecteur de translation de F (resp. C) à valeurs dans $\overline{\mathcal{C}}_F$ (resp. $\overline{\mathcal{C}}_C$). On a (cf. fait V.2.2) $v_F(g_i) = v_C(g'_i) + t_i$ et $v(g_i) = p(v_F(g_i))$.

Or on vient de voir que $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_i} v_C(g'_i) = 0$ et que $\lim_{\omega} p(\frac{1}{\lambda_i} t_i) = v(g_{\omega})$, ce qui entraîne que $\frac{v(g_i)}{\lambda_i} \rightarrow_{\omega} v(g_{\omega})$ car p est continue. \square

V.3 Espaces de représentations.

On se fixe désormais un groupe Γ infini, de type fini et une partie génératrice finie S de Γ . On munit Γ de la topologie discrète.

V.3.1 Actions sur un espace CAT(0) propre.

Soit X un espace métrique CAT(0). Soit G un sous-groupe fermé du groupe $\text{Isom}(X)$ des isométries de X , muni de la topologie compacte-ouverte. Le résultat suivant découle du théorème d'Ascoli.

Fait V.3.1 *Supposons X propre. Soit x un point de X et $M \geq 0$, alors l'ensemble des éléments g de G tels que $d(x, g.x) \leq M$ est un compact. Le groupe topologique G est localement compact, métrisable.* \square

Dans tout ce qui suit, une action de Γ sur X désigne une action par isométries dans G , c'est-à-dire une représentation (morphisme de groupes) de Γ dans G .

Définition V.3.2 *On dit qu'une représentation de Γ dans G est fidèle et discrète si elle est injective et d'image discrète. On note \mathbb{R}_{fd} l'espace des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G .*

Remarquons que, dans le cas où X est propre, une représentation fidèle et discrète de Γ dans G n'a pas de point fixe dans X , car Γ est infini et le stabilisateur d'un point est compact.

Soit $\mathbb{R} = \mathbb{R}(\Gamma, G)$ l'ensemble des représentations de Γ dans G , muni de la topologie compacte-ouverte, qui est aussi celle de la convergence simple. L'espace \mathbb{R} s'identifie à un sous-ensemble fermé de G^S par l'application qui à $\rho \in \mathbb{R}$ associe $(\rho(s))_{s \in S}$. Si X est propre, alors G^S est localement compact, métrisable, donc \mathbb{R} aussi.

Le groupe topologique G agit sur \mathbb{R} par conjugaison : pour $g \in G$ et $\rho \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$ on a $g.\rho(\gamma) = g\rho(\gamma)g^{-1}$. L'espace \mathbb{R}/G des orbites de G dans \mathbb{R} est muni de la topologie quotient. Il n'est pas nécessairement séparé. La projection canonique $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/G$ est ouverte.

V.3.2 Déplacement

Définition V.3.3 Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une action de Γ sur X un espace CAT(0). On appelle fonction de déplacement de ρ et on note d_ρ la fonction convexe continue

$$\begin{aligned} d_\rho : X &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sup_{s \in S} d(x, \rho(s).x) \end{aligned}$$

On appelle minimum de déplacement de ρ et on note $\lambda(\rho)$ le nombre réel positif

$$\lambda(\rho) = \inf_{x \in X} d_\rho(x),$$

qui est un invariant de conjugaison, et ensemble de déplacement minimal de ρ le convexe fermé Min_ρ , éventuellement vide, formé des points de X où d_ρ atteint son minimum.

Notons $\|\cdot\|_S$ la longueur des mots sur Γ associée à la partie génératrice finie S . La propriété suivante permet de majorer la longueur de translation des images des éléments de Γ par une représentation ρ en fonction de $\lambda(\rho)$ et de la longueur des mots.

Proposition V.3.4 Pour toute représentation ρ de Γ dans G , on a $\ell \circ \rho \leq \lambda(\rho) \|\cdot\|_S$ sur Γ .

Preuve. Soit ρ une représentation de Γ dans G et γ dans Γ . Pour tout x de X on a $d(x, \rho(\gamma)x) \leq \|\gamma\|_S d_\rho(x)$. Donc $\ell(\rho(\gamma)) \leq \|\gamma\|_S d_\rho(x)$ pour tout x de X , d'où le résultat souhaité. \square

Proposition V.3.5 Supposons que X est propre.

- Soit x un point de X et $M \geq 0$. Alors $\{\rho \in R, d_\rho(x) \leq M\}$ est un compact de R .
- Soit (ρ_i) une suite de R convergeant vers ρ . Alors d_{ρ_i} converge vers d_ρ uniformément sur tout compact de X et $\limsup \lambda(\rho_i) \leq \lambda(\rho)$.
- Supposons que l'action de G sur X est cocompacte. Pour toute représentation ρ de R , il existe une représentation ρ' dans l'adhérence de l'orbite de ρ sous G telle que $\text{Min}(\rho')$ n'est pas vide et $\lambda(\rho') = \lambda(\rho)$.

Preuve. Les deux premières affirmations sont faciles à vérifier. Montrons la troisième. Soit x_0 un point de X et un réel positif D tels que les images par G de la boule de centre x_0 et de rayon D recouvrent X . Pour tout k , soit y_k un point de X tel que $d_\rho(y_k) \leq \lambda(\rho) + \frac{1}{k}$, et g_k dans G tel que $d(x_0, g_k y_k) \leq D$. Notons ρ_k la représentation $g_k \rho g_k^{-1}$. La suite $d_{\rho_k}(x_0)$ est inférieure à $d_{\rho_k}(g_k y_k) + 2D$, donc à $\lambda(\rho) + 2D + 1$, donc bornée. Donc, quitte à extraire, la suite ρ_k converge vers une représentation ρ' , et on peut supposer également que la suite $g_k y_k$ converge vers un point y . La fonction $d_{\rho'}$ est la limite de $d_{\rho_k} = d_\rho \circ g_k^{-1}$, donc partout supérieure ou égale à $\lambda(\rho)$, et égale à $\lambda(\rho)$ en y . On en conclut que $\lambda(\rho') = \lambda(\rho)$. \square

V.3.3 Actions non-paraboliques

On suppose désormais que X est propre.

Définition V.3.6 *On dit qu'une action de Γ sur X est non-parabolique si Γ n'a pas de point fixe global dans le bord à l'infini de X . On note R_{np} l'espace des représentations non-paraboliques de Γ dans G .*

Remarque. Une représentation est non-parabolique si et seulement si les générateurs n'ont pas de points fixes communs au bord. Dans le cas où $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, une représentation est non-parabolique si et seulement si elle est irréductible. Dans le cas où G est un groupe algébrique semisimple connexe, sur \mathbb{C} , une représentation est non-parabolique si et seulement si elle est *stable* (voir par exemple [JoMi]). Les représentations (d'images) Zariski-denses sont non-paraboliques.

Proposition V.3.7 *Une action ρ de Γ sur X est non-parabolique si et seulement si $\{x \in X; d_\rho(x) \leq K\}$ est borné pour tout K , ou encore si et seulement si Min_ρ est non vide et borné (donc compact). \square*

Proposition V.3.8 *Soit ρ une action non-parabolique de Γ sur X . Soit ρ_k une suite d'actions de Γ sur X convergeant vers ρ . Alors*

- 1) *Pour k suffisamment grand, ρ_k est non-parabolique.*
- 2) *$\lambda(\rho_k) \rightarrow \lambda(\rho)$ et pour tout ε , il existe N tel que Min_{ρ_k} est contenu dans le ε -voisinage de Min_ρ pour tout $k \geq N$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que le compact C non vide de X formé des points x tels que $d_\rho(x) \leq \lambda(\rho) + 2\eta$ est contenu dans le ε -voisinage de Min_ρ . Comme d_{ρ_k} converge vers d_ρ uniformément sur les compacts, il existe un entier N tel que pour tout $k \geq N$ on a $|d_{\rho_k}(x) - d_\rho(x)| \leq \eta$ pour tout x de C . Pour $k \geq N$, le sous-ensemble $\{x \in X; d_{\rho_k}(x) \leq \lambda(\rho) + \eta\}$ est non vide et borné, car il contient Min_ρ et est inclus dans C , donc ρ_k est non-parabolique et $\mathrm{Min}_{\rho_k} \subset C$. On a de plus que $\lambda(\rho_k) \geq \lambda(\rho) - \eta$ car $d_{\rho_k} \geq d_\rho - \eta \geq \lambda(\rho) - \eta$ sur C , qui contient Min_{ρ_k} , et, de même, $\lambda(\rho) \geq \lambda(\rho_k) - \eta$ car $d_\rho \geq d_{\rho_k} - \eta \geq \lambda(\rho_k) - \eta$ sur C , qui contient Min_ρ . \square

Corollaire V.3.9 *L'espace R_{np} est un ouvert de R et $\lambda : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue aux points de R_{np} . \square*

Proposition V.3.10 *L'espace topologique R_{np}/G quotient de R_{np} par l'action de G est localement compact.*

Preuve. Montrons en premier lieu que R_{np}/G est séparé. Supposons qu'on ait une suite (ρ_k) dans R_{np} qui converge vers $\rho \in R_{np}$, et une suite $g_k \in G$ telle que $g_k \cdot \rho_k$ converge vers $\rho' \in R_{np}$. Alors soit $\varepsilon > 0$, d'après la proposition V.3.8, il existe N tel que pour $k > N$ on a que Min_{ρ_k} est contenu dans un ε -voisinage C de Min_ρ et $g_k(\mathrm{Min}_{\rho_k})$ dans le ε -voisinage de $\mathrm{Min}(\rho')$. La suite g_k est donc bornée, car l'image du borné C par g_k reste dans un borné, et on peut en extraire une sous-suite convergente vers g . On a donc $\rho' = g \cdot \rho$, ce qui conclut.

Le sous-espace R_{np} des représentations non-paraboliques est un ouvert de R (voir le corollaire V.3.9) qui est métrisable et localement compact, donc il est également métrisable

et localement compact. L'image R_{np}/G de l'ouvert saturé R_{np} par la projection canonique π de R dans le quotient R/G est un ouvert. La projection π est ouverte, continue et, en restriction à R_{np} , à valeurs dans un espace séparé, donc l'image d'un voisinage compact de x dans R_{np} est un voisinage compact de $\pi(x)$ dans R_{np}/G . Donc l'espace R_{np}/G est localement compact. \square

V.3.4 Représentations fidèles et discrètes dans un groupe de Lie semi-simple

On suppose maintenant que G est un groupe de Lie connexe semisimple réel, sans facteur compact, de centre fini, et que X est l'espace symétrique de type non compact associé à G . Le morphisme de G dans $\text{Isom}(X)$ est de noyau fini, donc les résultats des sections V.3.1 à V.3.3 restent valables.

On dit qu'un groupe abstrait *vérifie l'hypothèse (H)* s'il n'admet pas de sous-groupe d'indice fini contenant un sous-groupe abélien distingué infini.

On dit qu'un sous-groupe d'isométries d'un espace métrique X CAT(0) est *non virtuellement parabolique* s'il n'a pas d'orbite finie dans le bord à l'infini de X , ou, de manière équivalente, s'il n'a pas de sous-groupe d'indice fini parabolique (i.e. admettant un point fixe global dans le bord à l'infini). Cette propriété est clairement héritée par les sous-groupes d'indice fini. Pour $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, cette notion correspond à celle de sous-groupe *fortement irréductible*, i.e. ne préservant pas de réunion finie de sous-espaces vectoriels propres non triviaux de \mathbb{R}^n .

Proposition V.3.11 *Un sous-groupe discret non virtuellement parabolique de G vérifie l'hypothèse (H).*

Preuve. Soit Γ un sous-groupe discret non virtuellement parabolique de G . Supposons que Γ ne vérifie pas l'hypothèse (H). Quitte à remplacer Γ par un de ses sous-groupes d'indice fini, on peut supposer que Γ possède un sous groupe abélien A distingué infini.

Si A possède un élément parabolique non trivial, alors, d'après [Ebe, Corollary 4.4.5], Γ admet un point fixe global dans le bord à l'infini de X .

Dans le cas contraire, A n'a que des éléments semisimples. On montre dans ce cas (voir par exemple [BGS, Lemma 7.1]), par induction sur la dimension, que le sous-espace $F = \bigcap_{a \in A} \text{Min}(a)$ est non vide et se décompose de manière canonique en un produit $C \times \mathbb{R}^k$ (avec $k \geq 0$ minimal), de telle manière que tous les éléments a de A opèrent sur F comme (id, a') , où a' est une translation de \mathbb{R}^k .

En effet, si a et b sont deux éléments semisimples qui commutent, alors b préserve $\text{Min}(a)$ et $\inf_{x \in X} d(x, bx) = \inf_{x \in \text{Min}(a)} d(x, bx)$, donc $\text{Min}(b) \cap \text{Min}(a)$ est non vide. Dans le cas où a est elliptique, alors $\text{Min}(a)$ est de dimension strictement inférieure à X , et on conclut par induction. Si a est axiale, alors $\text{Min}(a)$ se décompose canoniquement en produit $M \times \mathbb{R}$ avec $\dim(M) < \dim(X)$ et $a = (\text{id}, a')$ sur $M \times \mathbb{R}$. Alors $b \in A$ préserve cette décomposition, et si $b = (b_1, b')$ sur $M \times \mathbb{R}$, on a $\text{Min}(b) \cap \text{Min}(a) = \text{Min}(b_1) \times \mathbb{R}$. Par induction $F' = \bigcap_{b \in A} \text{Min}(b_1)$ est non vide et se décompose en produit $C \times \mathbb{R}^l$ de telle sorte que b_1 opère comme (id, b'_1) sur F' , où b'_1 est une translation de \mathbb{R}^m . On en conclut $F = F' \times \mathbb{R} = C \times \mathbb{R}^{m+1}$ a les propriétés désirées.

Comme A est distingué dans Γ , le groupe Γ stabilise F et préserve la décomposition $F = C \times \mathbb{R}^k$, donc préserve le bord de \mathbb{R}^k .

Comme A contient au moins un élément non elliptique (car sinon, A est fini car il fixe F non vide point par point et est discret), alors $k \neq 0$, donc le bord de \mathbb{R}^k est non vide, et il est inclus dans un appartement de l'immeuble de Tits sphérique à l'infini de X , donc il ne rencontre qu'un nombre fini de facettes à l'infini. Le groupe Γ a donc une orbite finie dans le bord à l'infini. \square

On suppose désormais que Γ vérifie l'hypothèse (H).

Théorème V.3.12 (Goldman-Millson) *Soit Γ un groupe infini de type fini, vérifiant (H) et G un groupe de Lie réel semi-simple, connexe, de centre fini. Alors l'espace R_{fd} des représentations fidèles et discrètes de Γ dans G est un fermé de l'espace des représentations de Γ dans G .*

Preuve. Comme Γ est linéaire, il contient un sous-groupe sans torsion Γ' d'indice fini, d'après le lemme de Selberg (voir par exemple [Alp]). Alors Γ' n'a pas de sous-groupe abélien distingué non trivial (car il vérifie (H) et n'a pas de sous-groupe fini non trivial), donc, par Goldman-Millson (voir [GoMi]), l'espace $R_{fd}(\Gamma', G)$ est fermé.

Soit ρ_k une suite convergente de représentations fidèles et discrètes de Γ dans G , de limite ρ . La restriction de ρ à Γ' est donc fidèle et discrète.

L'intersection de $\ker \rho$ et Γ' est triviale, donc $\ker \rho$ est fini. Or $1 \in G$ n'est pas limite d'éléments d'ordre inférieur à une constante donnée. La restriction de ρ_k à $\ker \rho$ tend vers l'identité, donc est constante à partir d'un certain rang. Comme ρ_k est fidèle pour tout k , on en déduit que $\ker \rho$ est trivial, autrement dit que ρ est fidèle.

De plus, on voit facilement qu'un sous-groupe de G contenant un sous-groupe discret d'indice fini est discret, donc ρ est discrète. \square

Corollaire V.3.13 *La fonction "minimum de déplacement" λ ne s'annule pas sur R_{fd} .*

Preuve. Sinon, soit $\rho \in R_{fd}$ telle que $\lambda(\rho) = 0$. D'après ce qui a été fait en section V.3.2, il existe $\rho' \in \overline{G \cdot \rho}$ telle que $\text{Min}(\rho')$ est non vide et $\lambda(\rho') = \lambda(\rho) = 0$, donc ρ' a un point fixe dans X . Or $G \cdot \rho \subset R_{fd}$ qui est fermé dans R d'après le théorème ci-dessus, donc ρ' est fidèle et discrète, avec un point fixe intérieur, ce qui est impossible. \square

On considère désormais l'espace $\mathcal{X} = R_{fdnp}/G$ des représentations de Γ dans G fidèles, discrètes et non-paraboliques, modulo conjugaison par G , c'est-à-dire des actions fidèles et discrètes, sans point fixe global à l'infini, de Γ sur l'espace symétrique de type non compact X associé à G , modulo isométrie équivariante dans G .

Proposition V.3.14 *L'espace \mathcal{X} est localement compact.*

Preuve. Comme on a supposé que Γ vérifie l'hypothèse (H), d'après le théorème V.3.12, le sous-espace R_{fd} est un fermé de R , qui est saturé. Le quotient R_{fd}/G est par conséquent un fermé de R/G , donc $\mathcal{X} = R_{fd}/G \cap R_{np}/G$ est fermé dans R_{np}/G localement compact (par la proposition V.3.10), donc il est localement compact. \square

V.4 Compactification via le spectre marqué des vecteurs de translation.

Soit Γ un groupe infini de type fini, vérifiant l'hypothèse (H), et S une partie génératrice finie de Γ . Soit G un groupe de Lie connexe semisimple réel, sans facteurs compacts, de centre fini. On fixe un sous-espace de Cartan \mathbb{A} de l'algèbre de Lie de G , de groupe de Weyl \overline{W} , et une chambre de Weyl fermée \overline{C} de \mathbb{A} .

On considère l'espace \mathcal{X} des représentations fidèles et discrètes, non paraboliques de Γ dans G , modulo conjugaison par G , qu'on suppose non vide. On va construire une compactification de \mathcal{X} reposant sur la notion de vecteur de translation développée en section V.2.

V.4.1 Spectre marqué des vecteurs de translation.

Le *spectre marqué des vecteurs de translation* d'une représentation ρ de Γ dans G est la fonction $v \circ \rho : \Gamma \rightarrow \overline{C}$. On considère la restriction à \mathcal{X} de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \mathbb{R}/G &\longrightarrow \overline{C}^\Gamma \\ [\rho] &\mapsto v \circ \rho \end{aligned}$$

qui est bien définie car le vecteur de translation v est constant sur les classes de conjugaison dans G , et continue car v l'est (voir la proposition V.2.3).

Remarque. L'espace \overline{C}^Γ est métrisable, car Γ est dénombrable et \overline{C} est un cône d'un espace euclidien, donc métrisable.

La fonction λ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ est invariante par conjugaison, continue sur \mathbb{R}_{np} (cf. V.3.9) et ne s'annule pas sur \mathbb{R}_{fd} (d'après le corollaire V.3.13). Elle définit donc une fonction de $\mathbb{R}(\Gamma, G)/G$ dans \mathbb{R}_+ , qu'on notera également λ , qui est continue et non nulle sur \mathcal{X} .

On considère l'application continue $\frac{\mathcal{V}}{\lambda}$ de \mathcal{X} dans \overline{C}^Γ qui à $[\rho]$ associe $\frac{1}{\lambda(\rho)}v \circ \rho$.

Proposition V.4.1 *L'application $\frac{\mathcal{V}}{\lambda}$ est à valeurs dans un compact.*

Preuve. D'après la proposition V.3.4, pour toute représentation ρ de Γ dans G , pour tout γ dans Γ on a

$$\frac{\|v(\rho(\gamma))\|}{\lambda(\rho)} \leq \|\gamma\|_S$$

où $\|\cdot\|_S$ désigne la longueur des mots sur Γ associée à la partie génératrice finie S . Pour $t \geq 0$, notons \overline{C}_t le compact de \overline{C} formé des vecteurs de norme inférieure ou égale à t . L'image de $\frac{\mathcal{V}}{\lambda}$ est donc incluse dans le produit $\prod_{\gamma \in \Gamma} \overline{C}_{\|\gamma\|_S}$, qui est compact par Tikhonoff. \square

L'application continue $\frac{\mathcal{V}}{\lambda}$ définit donc (voir le paragraphe V.1) une compactification $\tilde{\mathcal{X}}$ de \mathcal{X} , dont le bord s'identifie à une partie B de \overline{C}^Γ .

V.4.2 Interprétation des points du bord.

On dit que deux éléments u et u' de $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ sont *projectivement égaux* s'il existe un réel positif non nul λ tel que $u' = \lambda u$.

Théorème V.4.2 *Un point du bord de \mathcal{X} est projectivement égal au spectre marqué des vecteurs de translation d'une action de Γ soit sur X et ayant un point fixe au bord (type P), soit sur un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$, sans point fixe global (type I).*

Preuve. Soit b un point du bord B de \mathcal{X} et ρ_i une suite de représentations de Γ dans G , fidèles, discrètes et non-paraboliques, telle que la suite $[\rho_i]$ converge vers le point b dans $\tilde{\mathcal{X}}$. En particulier, par définition de la compactification, la suite $[\rho_i]$ sort de tout compact de \mathcal{X} .

Quitte à conjuguer chaque représentation, on peut supposer que le point base x_0 vérifie $d_{\rho_i}(x_0) = \lambda(\rho_i)$.

Supposons en premier lieu que la suite $\lambda_i = \lambda(\rho_i)$ est bornée. Pour tout élément s de la partie génératrice finie S de Γ , l'image de x_0 par la suite $\rho_i(s)$ reste dans un compact. On peut donc extraire de ρ_i une suite convergente dans $R(\Gamma, G)$ de limite ρ . Comme les représentations fidèles et discrètes forment un fermé de $R(\Gamma, G)$ (voir V.3.12), la représentation ρ est fidèle et discrète (donc n'a pas de point fixe global). Elle ne peut être dans R_{np} , car sinon la suite $[\rho_i]$ converge vers $[\rho]$ dans \mathcal{X} , ce qui contredit les hypothèses. Donc elle possède un point fixe dans le bord à l'infini de X .

Comme \mathcal{V} est continue sur $R(\Gamma, G)$, on a $\mathcal{V}(\rho_i) \rightarrow \mathcal{V}(\rho)$. De plus, d_{ρ_i} converge (uniformément sur les compacts de X) vers d_ρ , donc $d_{\rho_i}(x_0) = \lambda_i$ converge vers $d_\rho(x_0)$, qui est non nul car ρ est fidèle et discrète. De plus, $d_\rho(x_0) \geq \lambda(\rho) \geq \limsup \lambda_i$, donc $\lim(\lambda_i) = d_\rho(x_0) = \lambda(\rho)$. La suite $\frac{\mathcal{V}(\rho_i)}{\lambda_i}$ converge donc vers $\frac{\mathcal{V}(\rho)}{\lambda(\rho)}$, donc $b = \frac{\mathcal{V}(\rho)}{\lambda(\rho)}$.

Supposons maintenant que la suite $\lambda_i = \lambda(\rho_i)$ n'est pas bornée. Quitte à extraire, on peut supposer qu'elle tend vers $+\infty$. Soit ω un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet. On considère le cône asymptotique X_ω de $(X, x_0, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω . C'est un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$. Pour tout γ de Γ , la suite $\frac{1}{\lambda_i}d(x_0, \rho_i(\gamma).x_0)$ est constante égale à 1, donc bornée. On considère l'action asymptotique ρ_ω de Γ sur X_ω , telle que pour tout γ de Γ , $[x_i]$ de X_ω , on a $\rho_\omega(\gamma).[x_i] = [\rho_i(\gamma).x_i]$.

Notons d_{ρ_ω} la fonction de déplacement de ρ_ω . Pour tout $x_\omega = [x_i] \in X_\omega$, on a $d_{\rho_\omega}(x_\omega) = \lim_\omega \frac{1}{\lambda_i}d_{\rho_i}(x_i) \geq 1$, avec égalité si $x_\omega = [x_0]$. Il en résulte que l'action ρ_ω n'a pas de point fixe global dans X_ω .

D'après la proposition V.2.4, pour tout γ de Γ , on a $\frac{\mathcal{V}(\rho_i)(\gamma)}{\lambda_i} \rightarrow v(\rho_\omega(\gamma))$ dans $\overline{\mathcal{C}}^\Gamma$ suivant l'ultrafiltre ω . Donc $b = v \circ \rho_\omega$ est le spectre marqué des vecteurs de translation de l'action asymptotique ρ_ω . \square

L'action asymptotique a été étudiée par F. Paulin, qui a établi le théorème suivant (non utilisé ici).

Théorème V.4.3 (Paulin) *La suite des actions ρ_i de Γ sur les espaces métriques $(X, \frac{1}{\lambda_i}d)$ converge pour la topologie de Gromov équivariante vers l'action ρ_ω de Γ sur l'immeuble affine X_ω . Cette action est à stabilisateurs de germes d'appartements virtuellement résolubles (voir [Pau3]).* \square

V.4.3 Les points du bord sont non nuls.

Proposition V.4.4 *Soit $b : \Gamma \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ un point du bord de \mathcal{X} , de type I, alors $\|b\|$ est projectivement égal au spectre marqué des longueurs de translation d'une action sans point fixe global de Γ sur un immeuble classique provenant d'une représentation dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, avec \mathbb{K}_ω un corps valué totalement ordonné. En particulier, b n'est pas identiquement nul.*

Preuve. On peut supposer que G est un sous-groupe fermé auto-adjoint de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, et donc que X est un sous-espace totalement géodésique passant par x_0 de l'espace symétrique E_n associé à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Le cône asymptotique X_ω de $(X, x_0, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω est donc un sous-immeuble du cône asymptotique E_ω de $(E_n, x_0, \frac{1}{\lambda_i}d)$ suivant l'ultrafiltre ω .

D'après ce qui a été fait dans la section IV.2, l'action asymptotique provient en fait d'une représentation ρ_ω de Γ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}_\omega)$, où \mathbb{K}_ω est un corps valué totalement ordonné.

Comme cette action n'a pas de point fixe global dans X_ω , donc dans E_ω , le théorème III.3.1 du chapitre III permet de conclure. \square

V.5 Exemple : structures projectives convexes sur une surface.

Soit \mathcal{S} une surface fermée (lisse) orientée connexe de genre g supérieur ou égal à 2. Soit $\Gamma = \pi_1(\mathcal{S})$ le groupe fondamental de \mathcal{S} (pour un choix indifférent du point-base). On renvoie par exemple à [FLP] et à [Bus] pour tout ce qui concerne la géométrie hyperbolique et l'espace de Teichmüller de \mathcal{S} .

Soit $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Soit E_3 l'espace symétrique associé à G , et x_0 le point fixé par $\mathrm{SO}(3)$. Soit \mathbb{A} le sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G formé par les matrices diagonales de trace nulle, et $\overline{\mathcal{C}}$ la chambre de Weyl fermée de \mathbb{A} formée par les matrices diagonales $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$.

Une *structure hyperbolique (marquée)* sur \mathcal{S} est un couple (M, f) où M est une variété hyperbolique orientée et f est un homéomorphisme de \mathcal{S} sur M préservant l'orientation.

Une structure hyperbolique marquée sur \mathcal{S} induit une représentation fidèle et discrète, non parabolique, de son groupe fondamental Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, appelée *holonomie* (bien définie modulo conjugaison).

On dit que deux structures hyperboliques (M, f) et (M', f') sont *équivalentes* s'il existe une isométrie i de M dans M' telle que $i \circ f$ est isotope à f' .

L'*espace de Teichmüller* de \mathcal{S} , qu'on notera \mathcal{T} , est l'ensemble des classes d'équivalence de structures hyperboliques marquées sur \mathcal{S} . Il s'identifie à une des deux composantes connexes de l'espace des classes de conjugaison des représentations fidèles et discrètes de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Définition V.5.1 (Structure projective convexe) *Une structure projective (réelle) convexe sur \mathcal{S} est la classe de conjugaison d'une représentation fidèle ρ de Γ dans $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ agissant sur \mathbb{RP}^2 par transformations projectives, telle que l'image $\rho(\Gamma)$ de ρ agit proprement librement sur un convexe Ω d'intérieur non vide de \mathbb{RP}^2 , avec quotient homéomorphe à \mathcal{S} .*

On sait qu'alors, pour tout γ de Γ , l'image $\rho(\gamma)$ de γ par ρ est un élément diagonalisable, à valeurs propres positives distinctes, de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ (voir par exemple [Gol]), c'est-à-dire une transvection de direction régulière.

Théorème V.5.2 (Goldman-Choï) *L'espace \mathcal{P} des structures projectives convexes sur \mathcal{S} est une composante connexe de $\mathrm{R}(\Gamma, G)/G$, incluse dans \mathcal{X} (voir [ChGo]).* \square

Rappelons que $\mathrm{SO}(2, 1)$ est le sous-groupe auto-adjoint de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ formé des éléments préservant la forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

On identifie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à la composante neutre $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ de $\mathrm{SO}(2, 1)$, qui est un sous-groupe fermé irréductible de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Le plan hyperbolique s'identifie parallèlement au sous-espace totalement géodésique $\mathbb{H} = \mathrm{SO}_0(2, 1).x_0$ de E_3 , qui est préservé par $\mathrm{SO}_0(2, 1)$. Les géodésiques de E_3 incluses dans \mathbb{H} sont dans une même orbite sous $\mathrm{SO}_0(2, 1)$, donc toutes de même type $X \in \overline{\mathcal{C}}$. Comme ce vecteur est nécessairement stable par l'involution d'opposition $Z \mapsto Z^{opp} = \Theta(-Z)$ de $\overline{\mathcal{C}}$, il est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Diag}(1, 0, -1)$, qui est l'unique vecteur unitaire de $\overline{\mathcal{C}}$ invariant par l'involution d'opposition. Les éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont conjugués dans $\exp(\mathbb{R}_+ X)$. Ce sont donc en particulier des transvections de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Comme une représentation fidèle et discrète de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est nécessairement Zariski-dense, la représentation fidèle et discrète de Γ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ induite est irréductible. L'espace de Teichmüller \mathcal{T} des structures hyperboliques sur \mathcal{S} est donc inclus dans \mathcal{X} , via l'identification de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.

Le disque ouvert \mathbb{D} de \mathbb{RP}^2 d'équation (dans les coordonnées homogènes usuelles) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0$ est un convexe de \mathbb{RP}^2 préservé par $\mathrm{SO}_0(2, 1)$. Muni de la distance de Hilbert sur \mathbb{D} , qui est invariante par l'action de $\mathrm{SO}_0(2, 1)$, il est isométrique au plan hyperbolique. C'est le modèle projectif, dit de Klein-Beltrami, du plan hyperbolique.

Les structure hyperboliques sur \mathcal{S} définissent donc, via le modèle projectif du plan hyperbolique, des structures projectives convexes sur \mathcal{S} . L'espace de Teichmüller \mathcal{T} est donc inclus dans \mathcal{P} .

V.5.1 Courbes fermées simples, nombres d'intersections.

Soit C une courbe fermée simple, orientée, sur \mathcal{S} . Soit $\tilde{\mathcal{S}}$ le revêtement universel de \mathcal{S} . Les relevés de C forment une famille $\tilde{\mathcal{F}}$ de courbes simples orientées deux à deux disjointes.

Soit T l'arbre dual à la partition de $\tilde{\mathcal{S}}$ définie par la famille $\tilde{\mathcal{F}}$, dont les sommets sont les composantes connexes de $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{F}}$ et où une arête orientée joint les deux composantes connexes bordant un même relevé η de C , en allant de celle de gauche à celle de droite (voir figure V.3).

Le groupe fondamental Γ de \mathcal{S} agit sur T en préservant l'orientation.

Définition V.5.3 (Nombres d'intersections positives et négatives) *Soit $\gamma \in \Gamma$. On appelle nombre d'intersections positives (resp. négatives) de γ et C et on note $\mathrm{Int}^+(\gamma, C)$ (resp. $\mathrm{Int}^-(\gamma, C)$) l'entier suivant. Dans le cas où γ fixe un point de T , on pose $\mathrm{Int}^\pm(\gamma, C) = 0$. Sinon, l'élément γ translate une unique géodésique de T , c'est-à-dire qu'il existe un unique*

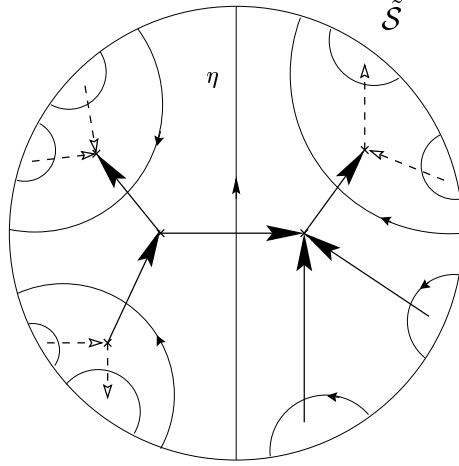


FIG. V.3 – L'arbre dual.

entier ℓ non nul et une unique (à translation près sur les indices) suite sans répétition $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'arêtes consécutives de T tels que $\gamma e_i = e_{i+\ell}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, soit ε_i égal à $+1$ si l'arête orientée e_i pointe vers e_{i+1} , égal à -1 dans le cas contraire.

On définit alors $\text{Int}^+(\gamma, C) = \text{Card}\{i \in \{0, \dots, \ell - 1\}; \varepsilon_i = +1\}$ (resp. $\text{Int}^-(\gamma, C) = \text{Card}\{i \in \{0, \dots, \ell - 1\}; \varepsilon_i = -1\}$). Notons $\text{Int}(\gamma, C) = \text{Int}^+(\gamma, C) + \text{Int}^-(\gamma, C) = \ell$ le nombre d'intersections de Γ et C .

Remarque V.5.4 Si C_γ est une courbe fermée dont la classe d'homotopie libre est la classe de conjugaison de γ , alors $\text{Int}(\gamma, C)$ est exactement le nombre d'intersections géométrique $i(C_\gamma, C)$ (voir par exemple [FLP]), défini comme étant le nombre minimum d'intersections de deux courbes lisses transverses respectivement librement homotopes à C_γ et C .

V.5.2 Twist le long d'une courbe fermée simple.

Le procédé de "pliage" suivant, développé par de nombreuses personnes (Dehn, Thurston, Apanasov, Kourionotis, Johnson-Millson...) (voir par exemple [JoMi]), permet de construire des déformations d'une structure hyperbolique marquée dans l'espace \mathcal{P} des structures projectives convexes sur \mathcal{S} .

Soit C une courbe fermée simple orientée sur \mathcal{S} , et $c \in \Gamma$ un élément dans la classe de conjugaison correspondant à la classe d'homotopie libre de C , qui translate un relevé \tilde{C} de C dans $\tilde{\mathcal{S}}$. L'arête correspondant à \tilde{C} dans l'arbre T défini en section V.5.1 va d'un sommet \mathcal{A} , correspondant à la composante connexe de $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{F}}$ bordant \tilde{C} sur sa gauche, à un sommet \mathcal{B} , correspondant à la composante connexe de $\tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{F}}$ bordant \tilde{C} sur sa droite. Soit A le stabilisateur dans Γ de \mathcal{A} .

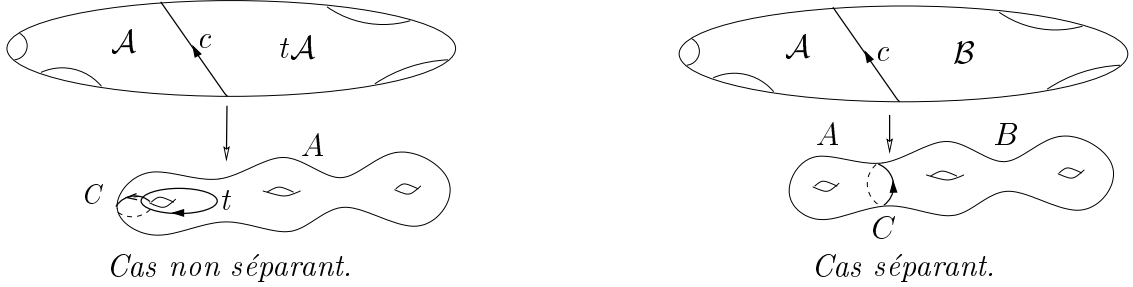
Soit Y un vecteur dans l'espace euclidien \mathbb{A} . Soit ρ une représentation de Γ dans G telle que $\rho(c)$ est une transvection de direction régulière $Z \in \mathbf{C}$, c'est-à-dire est conjugué à $\exp(Z)$.

Notons h l'élément $g \exp(Y) g^{-1}$ de G , pour un (tout) $g \in G$ tel que $\rho(c) = g \exp(Z) g^{-1}$, qui commute avec $\rho(c)$.

Supposons que la courbe fermée simple C n'est pas séparante, c'est-à-dire que $\mathcal{S} - C$ est connexe. Alors Γ agit transitivement sur les sommets de l'arbre T . Soit t un élément de Γ

tel que $t\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Soit c' l'élément $t^{-1}ct$. On a alors (voir par exemple [Ser]) que $\Gamma = A *_{\langle c \rangle} t$, où $A *_{\langle c \rangle} t$ désigne le groupe de présentation finie engendré par A et t , ayant pour système de relations les relations de A et la relation supplémentaire $c' = t^{-1}ct$ (extension HNN).

Il existe une unique représentation ρ' , qu'on notera $T_{c,Y}(\rho)$, telle que $\rho' = \rho$ sur A et $\rho'(t) = h\rho(t)$.



Supposons que la courbe fermée simple C est séparante, c'est-à-dire qu'elle sépare la surface \mathcal{S} en deux composante connexes. L'arête joignant \mathcal{A} à \mathcal{B} est alors un domaine fondamental pour l'action de Γ sur l'arbre T . Soit B le stabilisateur dans Γ de \mathcal{B} . On a alors (voir par exemple [Ser]) que $\Gamma = A *_{\langle c \rangle} B$, où $A *_{\langle c \rangle} B$ désigne le produit amalgamé de A et de B au dessus du sous-groupe cyclique $\langle c \rangle$ engendré par c , c'est-à-dire le groupe de présentation finie engendré par A et B , ayant pour système de relations les relations de A et de B et la relation supplémentaire $i_A(c) = i_B(c)$, où i_A et i_B désignent les inclusions naturelles de $\langle c \rangle$ dans A et dans B .

Il existe une unique représentation ρ' , qu'on notera également $T_{c,Y}(\rho)$ telle que $\rho' = \rho$ sur A et $\rho' = i_h \circ \rho$ sur B , où i_h désigne la conjugaison par h (qui à g dans G associe hgh^{-1}).

Fait V.5.5 *Si la représentation ρ provient d'une structure projective convexe sur \mathcal{S} , alors il en est de même pour ρ' (voir [Gol, Theorem 3.7]).* \square

On suppose maintenant que ρ provient d'une structure hyperbolique sur \mathcal{S} , c'est-à-dire que c'est une représentation fidèle et discrète de Γ dans $SO_0(2,1)$ (qu'on a identifié avec $PSL_2(\mathbb{R})$).

Remarque V.5.6 *Si on prend Y colinéaire à X , on a le twist de Dehn ordinaire (voir par exemple [FLP]).*

La géodésique σ de \mathbb{H} translatée par $\rho(c)$ borde deux composantes connexes de $\mathbb{H} - \rho(\Gamma)\sigma$. On note \mathcal{A}_ρ celle qui est stabilisée par $\rho(A)$ et \mathcal{B}_ρ l'autre. On peut définir une application (ρ, ρ') -équivariante ϕ de $\mathbb{H} - \rho(\Gamma)\sigma$ dans E_3 par les conditions suivantes.

- $\phi = \text{id}$ sur \mathcal{A}_ρ ; $\phi = h \circ \text{id}$ sur \mathcal{B}_ρ ;
- $\phi \circ \rho(\gamma) = \rho'(\gamma) \circ \phi$ pour tout γ de Γ .

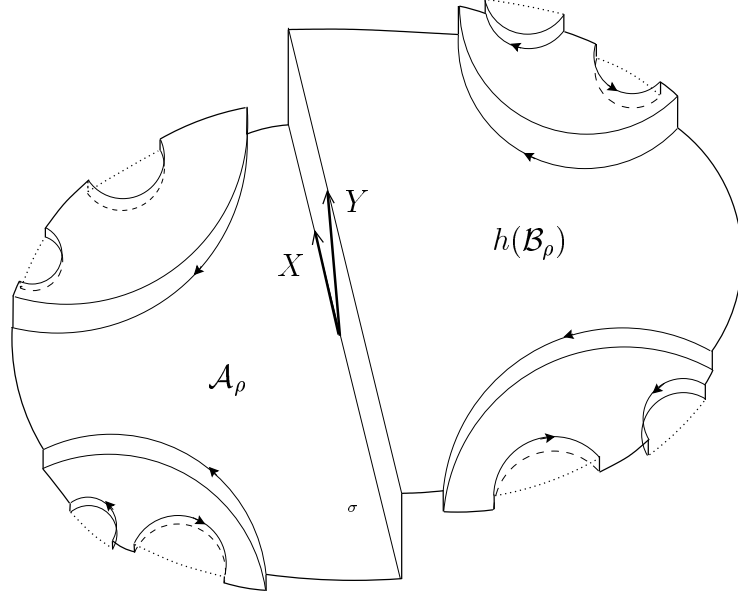


FIG. V.4 – Surface dans E_3 invariante par ρ' .

V.5.3 Exemples de points du bord.

Soit $(\rho_k)_{k \geq 0}$ une suite de représentations de Γ dans $SO_0(2, 1)$. Quitte à conjuguer chaque ρ_k par un élément de $SO(2, 1)$, on peut supposer que l'axe de translation de $\rho_k(c)$ dans \mathbb{H} est une géodésique fixée σ (paramétrée à vitesse constante 1) de \mathbb{H} d'origine x_0 . Soit λ_k une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout γ dans Γ , la limite de la suite $\frac{1}{\lambda_k} d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0)$ suivant l'ultrafiltre ω est finie, et non nulle si $\gamma \notin \langle c \rangle$.
2. Pour tout γ dans $\Gamma - \langle c \rangle$, la limite de l'angle $\sphericalangle_{x_0}(\sigma, \rho_k(\gamma)x_0)$ suivant l'ultrafiltre ω est non nulle.

Exemple V.5.7 On choisit un système $C^1 = C, C^2, \dots, C^{3g-3}$ de $3g - 3$ courbes fermées simples essentielles, deux à deux disjointes sur \mathcal{S} , contenant C , induisant une décomposition de \mathcal{S} en $2g - 2$ pantalons. Soit $p_0 = C(0)$.

Rappelons (voir par exemple [Bus]) que cette décomposition induit une paramétrisation (analytique réelle) de l'espace de Teichmüller de \mathcal{S} par les couples

$$(L, A) = (\ell^1, \dots, \ell^{3g-3}, \alpha^1, \dots, \alpha^{3g-3}) \in \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

appelés *coordonnées de Fenchel-Nielsen* sur \mathcal{T} , où ℓ_i et α^i sont respectivement la longueur et le paramètre de twist associés à C^i .

On munit \mathcal{S} d'une structure hyperbolique fixée standard M_0 telle que les courbes C^j sont des géodésiques fermées de longueur 1 paramétrées à vitesse constante 1 et pour chaque paire $C^j, C^{j'}$ de courbes bordant un même pantalon de la décomposition, l'unique segment géodésique simple orthogonal commun (paramétré proportionnellement à sa longueur, i.e. à vitesse constante égale à sa longueur) $D^{jj'}$ a ses extrémités dans $\{C^j(0), C^j(\frac{1}{2})\}$ et

$\{C^{j'}(0), C^{j'}(\frac{1}{2})\}$. Les segments géodésiques C^j et $D^{jj'}$ induisent une décomposition de M_0 en hexagones hyperboliques droits.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère une structure hyperbolique marquée (M_k, f_k) sur $\mathcal{S} = M_0$ dans la classe d'équivalence de coordonnées de Fenchel-Nielsen suivantes : les paramètres de twist sont nuls, la longueur ℓ_k^1 associée à C (c'est-à-dire la longueur de l'unique géodésique fermée librement homotope à C) est $\frac{1}{k}$ et les longueurs $\ell_k^2, \dots, \ell_k^{3g-3}$ associées à C^2, \dots, C^{3g-3} sont égales à 1 (voir figure V.5).

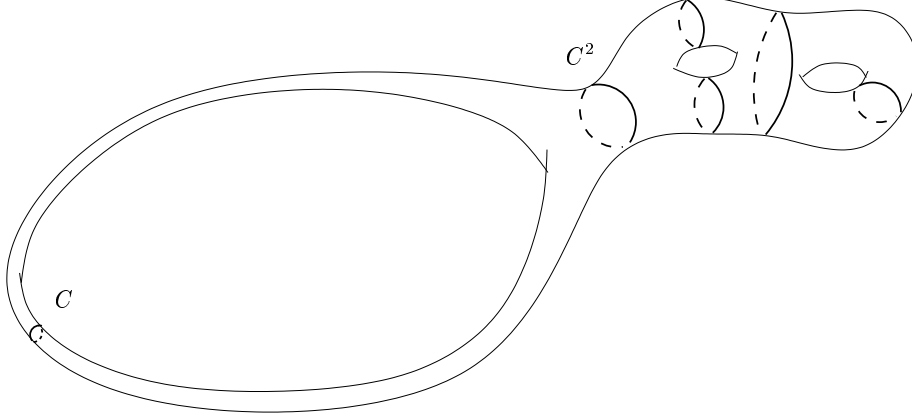


FIG. V.5 – Exemple V.5.7.

On peut supposer que f_0 est l'identité, et (voir par exemple [Bus]), comme les paramètres de twist sont nuls, que $f_k : M_0 \rightarrow M_k$ préserve la décomposition en hexagones hyperboliques droits et le paramétrage (proportionnel à leur longueur) des segments bordant ces hexagones, c'est-à-dire que les images C_k^j des courbes C^j par f_k sont des géodésiques fermées (de longueur ℓ_k^j), paramétrées à vitesse constante égale à ℓ_k^j , et que l'image de $D^{jj'}$ est le segment géodésique simple (paramétré proportionnellement à sa longueur) orthogonal aux images $C_k^j, C_k^{j'}$ de $C^j, C^{j'}$.

Notons $C_k = C_k^1$. On considère le revêtement universel $\pi_k : \mathbb{H} \rightarrow M_k$ tel que l'image du point-base x_0 de \mathbb{H} est le point $C_k(0)$ de M_k et l'image de la géodésique σ est la courbe C_k .

Soit $\tilde{f}_k : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ le relevé de f_k qui fixe x_0 . On a $\tilde{f}_k(\sigma(t)) = \sigma(\frac{t}{k})$ pour tout réel t , et \tilde{f}_k envoie la géodésique orthogonale à σ en $\sigma(m)$ sur la géodésique orthogonale à σ en $\sigma(\frac{m}{k})$ pour tout m de \mathbb{Z} .

On prend pour ρ_k la représentation de Γ dans $SO_0(2, 1)$ induite par \tilde{f}_k .

On prend pour λ_k la largeur du collier maximal associé à C_k , i.e. tel que $\sinh(\frac{\lambda_k}{2}) = (\sinh \frac{1}{2k})^{-1}$ (voir par exemple [Bus, Th. 4.1.1]). Alors λ_k tend vers $+\infty$.

Nous allons maintenant montrer que les hypothèses sont vérifiées.

Vérifions tout d'abord l'hypothèse 1. Soit $\gamma \in \Gamma$. On représente γ par un lacet dans M_0 , issu de x_0 et formé d'une suite β_1, \dots, β_m de segments géodésiques consécutifs du bord des hexagones.

La longueur du lacet $f_k \circ \gamma$ (donc $d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0)$) est inférieure à ms_k , où s_k est le maximum de la longueur des segments (en nombre fini) bordant les hexagones de la décomposition de M_k .

Le lemme ci-dessous assure que, dans tous les cas, $\lim_{\omega} \frac{s_k}{\lambda_k}$ est fini, donc on a bien $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0) < +\infty$.

Lemme V.5.8 *La limite $\lim_{\omega} \frac{s_k}{\lambda_k}$ est égale à $\frac{1}{2}$ dans le cas séparant, à 1 dans le cas non séparant.*

Preuve. En effet, il suffit de considérer les hexagones de la décomposition de M_0 contenant une moitié de C dans leur bord, car les autres sont constants.

Considérons un hexagone hyperbolique de cotés consécutifs $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ et la perpendiculaire h commune à α_1 et au coté opposé β_2 , qui découpe l'hexagone en deux pentagones hyperboliques droits, le coté α_1 en deux segments α'_1 et α''_1 et le coté β_2 en deux segments β'_2 et β''_2 (voir figure V.6). Les formules de géométrie hyperbolique pour les pentagones à angles droits (voir par exemple [Bus, Th.2.3.4]) donnent que $\sinh \beta'_2 \sinh \alpha_2 = \cosh \alpha'_1$, qui est compris entre 1 et $\cosh \alpha_1$. En particulier, β'_2 est supérieur à la largeur $w(\alpha_2) = \operatorname{arcsinh}(\frac{1}{\sinh \alpha_2})$ du demi-collier associé à α_2 . On en déduit de plus que, si α_1 est borné alors $\beta'_2 - w(\alpha_2)$ est borné. En particulier, dans ce cas, si α_2 est constant non nul, alors β'_2 est borné, et si α_2 tend vers 0, alors $\beta'_2/w(\alpha_2)$ tend vers 1.

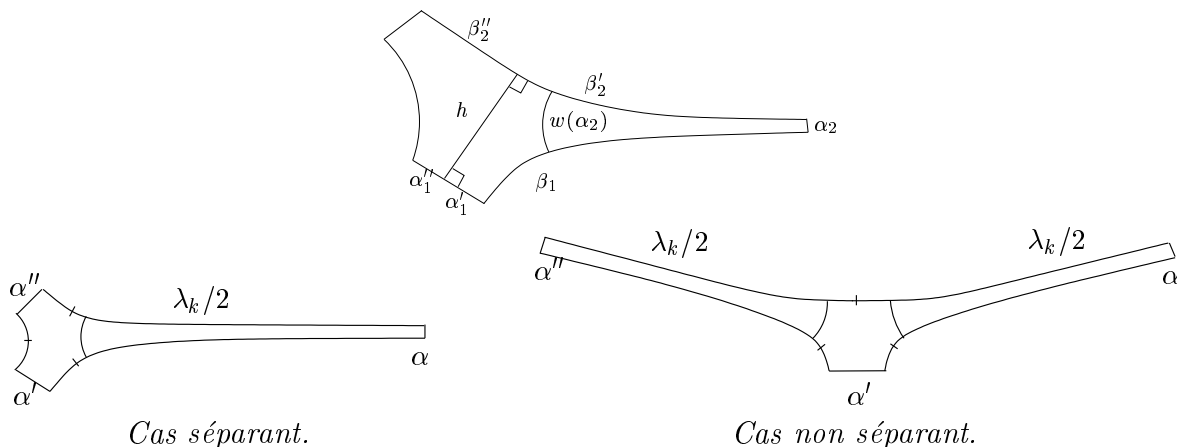
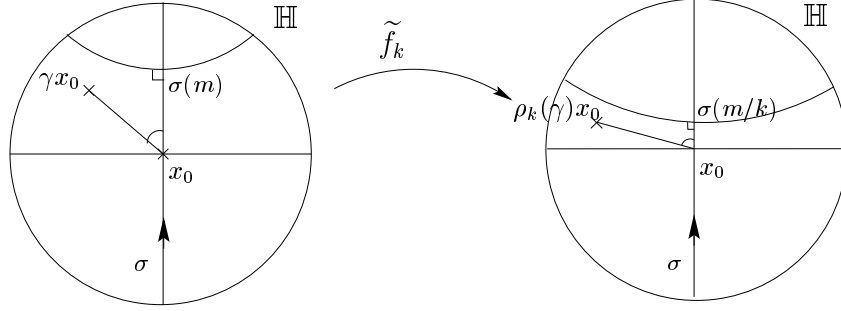


FIG. V.6 – dégénérescences d'hexagones hyperboliques.

Prenons un hexagone de la décomposition de M_0 contenant une moitié α , de longueur $\frac{1}{2k}$, de C dans son bord, ainsi qu'une moitié α' , de longueur $\frac{1}{2}$, d'une courbe C^j avec $j \neq 1$. Un troisième coté α'' de l'hexagone est dans une courbe $C^{j''}$, avec $j'' = 1$, donc de longueur $\frac{1}{2k}$, si C n'est pas séparante, et $j'' \neq 1$, donc de longueur $\frac{1}{2}$, si C est séparante. Ces trois cotés sont de longueur bornée. En appliquant la remarque ci-dessus pour divers choix de α_1, α_2 dans $\{\alpha, \alpha', \alpha''\}$, on obtient que $d(\alpha, \alpha')/\lambda_k$ tend vers $\frac{1}{2}$; que $d(\alpha', \alpha'')/\lambda_k$ tend vers $\frac{1}{2}$ et $d(\alpha, \alpha'')/\lambda_k$ tend vers 1 dans le cas non séparant; et que $d(\alpha', \alpha'')/\lambda_k$ tend vers 0 et $d(\alpha, \alpha'')/\lambda_k$ tend vers $\frac{1}{2}$ dans le cas séparant. \square

Terminons la vérification de l'hypothèse 1. Supposons que $\gamma \notin \langle c \rangle$. Un lacet géodésique de sommet $p_0 = \pi(x_0)$ qui n'est pas une puissance de C est de longueur supérieure à λ_k (car il n'est pas inclus dans le collier de largeur $\frac{\lambda_k}{2}$ de part et d'autre de C_k). Donc $\lim_{\omega} \frac{1}{\lambda_k} d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0) \geq 1 > 0$.

Vérifions maintenant l'hypothèse 2. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que le segment géodésique de x_0 à γx_0 est inclus dans la bande comprise entre la perpendiculaire à σ en $\sigma(0) = x_0$ et la perpendiculaire à σ en $\sigma(m)$. Comme l'application \tilde{f}_k conserve l'orthogonale à σ en $\sigma(0) = x_0$ et envoie l'orthogonale à σ en $\sigma(m)$ sur l'orthogonale à σ en $\sigma(\frac{m}{k})$, la projection orthogonale de $\rho_k(\gamma)x_0 = \tilde{f}_k(\gamma x_0)$ sur σ tend vers x_0 . Comme la distance de x_0 à $\rho_k(\gamma)x_0$ ne tend pas vers 0 (elle tend au contraire vers $+\infty$ par ce qui précède), on en déduit que l'angle $\sphericalangle_{x_0}(\sigma, \rho_k(\gamma)x_0)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Ceci termine la construction de l'exemple V.5.7.



On considère maintenant une suite Y_k de vecteurs de \mathbb{A} , tels que la limite Y_ω de la suite $\left(\frac{1}{\lambda_k}\|Y_k\|\right)$ suivant l'ultrafiltre ω est finie, non nulle. Soit $h_k = g \exp(Y_k) g^{-1}$, pour un (tout) g de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ tel que $g^{-1}\sigma g$ est la géodésique $t \mapsto \exp(tX).x_0$ (rappelons qu'on a alors $\rho_k(c) = g \exp(\ell(\rho_k(c))X)g^{-1}$).

On étudie la dégénérescence de la suite $\rho'_k = T_{c, Y_k}(\rho_k)$ des déformations de ρ_k dans G associées à Y_k .

Soit $(\Delta_\omega, *_\omega, d_\omega)$ le cône asymptotique de $(E_3, x_0, \frac{1}{\lambda_k}d)$ suivant l'ultrafiltre ω , et \mathbb{H}_ω le cône asymptotique de $(\mathbb{H}, x_0, \frac{1}{\lambda_k}d)$, qui est inclus dans Δ_ω .

Comme pour tout γ , la suite $\frac{1}{\lambda_k}d(x_0, \rho_k(\gamma)x_0)$ est ω -bornée (d'après l'hypothèse 1), la suite de représentations ρ_k définit une action ρ_ω de Γ sur Δ_ω , préservant \mathbb{H}_ω .

Montrons que, pour tout γ dans Γ , la suite $\frac{1}{\lambda_k}d(x_0, \rho'_k(\gamma)x_0)$ est ω -bornée. Il suffit de le vérifier pour une partie génératrice de Γ . On a $\rho'_k = \rho_k$ sur A , donc c'est vrai pour $\gamma \in A$. Dans le cas où C n'est pas séparante, le groupe Γ est engendré par $A \cup \{t\}$. Pour tout k , on a $d(x_0, \rho'_k(t)x_0) \leq d(x_0, \rho_k(t)x_0) + \|Y_k\|$ (par inégalité triangulaire), donc la suite $\frac{1}{\lambda_k}d(x_0, \rho'_k(t)x_0)$ est ω -bornée, ce qui conclut. Dans le cas où C est séparante, le groupe Γ est engendré par $A \cup B$. Pour tout k , et b dans B on a $d(x_0, \rho'_k(b)x_0) \leq d(x_0, \rho_k(b)x_0) + 2\|Y_k\|$ (par inégalité triangulaire), donc la suite $\frac{1}{\lambda_k}d(x_0, \rho'_k(b)x_0)$ est ω -bornée, ce qui conclut.

La suite de représentations ρ'_k définit donc une action ρ'_ω de Γ sur Δ_ω .

Notons $h_\omega = [h_k]$, qui commute avec $\rho_\omega(c)$. Remarquons que ρ'_ω est la déformation de ρ_ω donnée par $\rho'_\omega = \rho_\omega$ sur A et par, dans le cas non séparant $\rho'_\omega(t) = h_\omega \rho_\omega(t)$, dans le cas séparant $\rho'_\omega = i_{h_\omega} \circ \rho_\omega$ sur B .

La proposition suivante donne le spectre marqué des vecteurs de translation de ρ'_ω en fonction de celui de ρ_ω .

Proposition V.5.9 *Pour tout γ dans Γ , on a*

$$v(\rho'_\omega(\gamma)) = v(\rho_\omega(\gamma)) + \text{Int}^+(\gamma, c) \times \Theta(Y_\omega) + \text{Int}^-(\gamma, c) \times \Theta(-Y_\omega).$$

Preuve. Soit $\sigma_\omega = [\sigma]$ et $F_\omega = [F]$ l'unique appartement de Δ_ω contenant σ_ω . On montre tout d'abord le lemme suivant, qui est une conséquence de l'hypothèse 2.

Lemme V.5.10 *Pour tout γ dans $\Gamma - \langle c \rangle$, le germe en $*_\omega$ du segment de $*_\omega$ à $\rho_\omega(\gamma)*_\omega$ est contenu dans un germe de chambre de Weyl en $*_\omega$ opposé à tous les germes en $*_\omega$ des chambres de Weyl de sommet $*_\omega$ de l'appartement F_ω . En particulier, $d_\omega(\sigma_\omega, \rho_\omega(\gamma)\sigma_\omega) = d_\omega(*_\omega, \rho_\omega(\gamma)*_\omega) > 0$, et par conséquent $\rho_\omega(c)$ fixe $*_\omega$.*

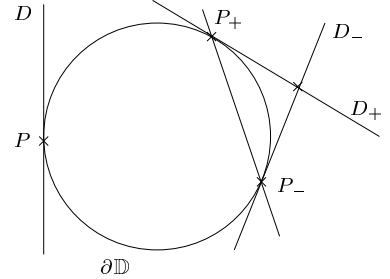
Preuve. Soit \mathbf{D}_ω une chambre de Weyl de F_ω de sommet $*_\omega$. Soit \mathbf{D} la chambre de Weyl de F de sommet x_0 telle que $\mathbf{D}_\omega = [\mathbf{D}]$.

Soit $x_k = \rho_k(\gamma).x_0$. Pour l'ultrafiltre ω , le point x_k tend vers un point ξ du bord de E_3 . Alors ξ est dans le bord de \mathbb{H} et n'est pas égal à l'une des deux extrémités de la géodésique σ d'après l'hypothèse 2.

Tout point du bord à l'infini de \mathbb{H} est contenu dans une unique chambre (P, D) de l'immeuble à l'infini de \mathcal{E}_3 , identifié à l'immeuble des drapeaux du plan projectif \mathbb{RP}^2 . Le point P est alors dans le cercle $\partial\mathbb{D}$ (d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$) et la droite D est la tangente en P à $\partial\mathbb{D}$.

Soit (P, D) la chambre de ∂E_3 contenant ξ . Le bord de l'appartement F contenant la géodésique σ est l'appartement de ∂E_3 donné par le triangle $P_+, P_-, D_+ \cap D_-$, où (P_+, D_+) et (P_-, D_-) sont les deux chambres contenant respectivement $\sigma(+\infty)$ et $\sigma(-\infty)$.

Comme P, P_+ et P_- sont trois points distincts de $\partial\mathbb{D}$, il est clair que le point P n'est ni sur la tangente D_+ au cercle $\partial\mathbb{D}$ en P_+ , ni sur la tangente D_- à $\partial\mathbb{D}$ en P_- , ni sur la droite joignant P_- et P_+ , et que la tangente D à $\partial\mathbb{D}$ en P ne passe ni par P_+ , ni par P_- , ni par le point d'intersection de D_+ et D_- . La chambre (P, D) est donc opposée à toutes les chambres du bord à l'infini de F , donc à $\mathbf{D}(\infty)$.



Soit C_k l'unique chambre de Weyl de sommet x_0 contenant x_k , alors C_k tend vers la chambre de Weyl de sommet x_0 et de bord à l'infini (P, D) . Soit C_ω la limite asymptotique de la suite de chambres de Weyl C_k , qui est une chambre de Weyl de Δ_ω , de sommet $*_\omega$, contenant $\rho_\omega(\gamma)*_\omega$. Alors, d'après la proposition IV.1.9, les germes en $*_\omega$ de \mathbf{D}_ω et C_ω sont opposés dans l'immeuble des directions en $*_\omega$ de Δ_ω .

Cela entraîne que $*_\omega$ est nécessairement la projection orthogonale de $\rho_\omega(\gamma)*_\omega$ sur l'appartement F_ω , donc sur la géodésique σ_ω , et réciproquement (en remplaçant γ par γ^{-1}), et donc que $d_\omega(\sigma_\omega, \rho_\omega(\gamma)\sigma_\omega) = d_\omega(*_\omega, \rho_\omega(\gamma)*_\omega) > 0$.

Enfin, $\rho_\omega(c)$ envoie la projection orthogonale de $\rho_\omega(\gamma)*_\omega$ sur σ_ω , qui est $*_\omega$, sur la projection orthogonale de $\rho_\omega(c\gamma)*_\omega$ sur σ_ω , qui est également $*_\omega$. \square

Lemme V.5.11 *Soient γ et γ' dans $\Gamma - \langle c \rangle$ telles que l'arête e sépare les arêtes γe et $\gamma' e$ dans l'arbre T , alors le point $*_\omega$ de Δ_ω est sur le segment $[\rho_\omega(\gamma)*_\omega, \rho_\omega(\gamma')*_\omega]$.*

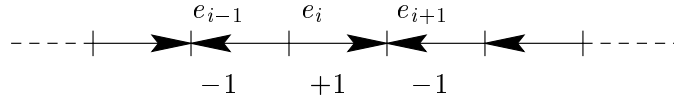
Preuve. Comme, pour tout k , la géodésique σ sépare les points $x_k = \rho_k(\gamma)x_0$ et $y_k = \rho_k(\gamma')x_0$ dans \mathbb{H} , on a $d(x_k, y_k) \geq d(x_k, \sigma) + d(\sigma, y_k)$. En passant à la limite asymptotique, on a que $d(\rho_\omega(\gamma)*_\omega, \rho_\omega(\gamma')*_\omega)$ est supérieur ou égal à $d(\rho_\omega(\gamma)*_\omega, \sigma_\omega) + d(\sigma_\omega, \rho_\omega(\gamma')*_\omega)$, donc à $d(\rho_\omega(\gamma)*_\omega, *_\omega) + d(*_\omega, \rho_\omega(\gamma')*_\omega)$ d'après le lemme V.5.10, ce qui conclut par le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. \square

Démontrons maintenant la proposition V.5.9. Soit $\gamma \in \Gamma$. Supposons tout d'abord que $\text{Int}^+(\gamma, c)$ et $\text{Int}^-(\gamma, c)$ soient nuls. Alors, quitte à remplacer γ par un de ses conjugués dans Γ (ce qui ne change pas les vecteurs de translation), on peut supposer que γ est dans A ou éventuellement dans B , suivant le cas. On a donc $\rho'_\omega(\gamma) = \rho_\omega(\gamma)$ si $\gamma \in A$, ou éventuellement $\rho'_\omega(\gamma) = h_\omega \rho_\omega(\gamma) h_\omega^{-1}$ si $\gamma \in B$, ce qui conclut.

Supposons maintenant que γ n'est pas conjugué dans A ni dans B . Alors γ translate une unique géodésique de l'arbre orienté T dual à la partition du revêtement universel de \mathcal{S} définie par les relevés de la courbe fermée simple C . Il existe par conséquent un unique entier ℓ positif non nul et une unique (à translation près sur les indices) suite sans répétition $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'arêtes consécutives de T tels que $\gamma e_i = e_{i+\ell}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, soit ε_i égal à $+1$ si l'arête orientée e_i pointe vers e_{i+1} , égal à -1 dans le cas contraire.

Par définition, on a $\text{Int}^+(\gamma, c) = \text{Card}\{i \in \{0, \dots, \ell - 1\}; \varepsilon_i = +1\}$ et $\text{Int}^-(\gamma, c) = \text{Card}\{i \in \{0, \dots, \ell - 1\}; \varepsilon_i = -1\}$.



Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, soit a_i dans Γ tel que $e_i = a_i e$ où e est l'arête de T de stabilisateur $\langle c \rangle$. On a $\gamma a_i \langle c \rangle = a_{i+\ell} \langle c \rangle$ dans $\Gamma / \langle c \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Soit $\sigma_{i,\omega}$ l'image de la géodésique σ_ω de \mathbb{H}_ω par $\rho_\omega(a_i)$, et $\alpha_i = \rho_\omega(a_i)*_\omega = \sigma_{i,\omega}(0)$. Alors, comme $\rho_\omega(c)$ fixe le point $*_\omega$, on a $\rho_\omega(\gamma)\alpha_i = \alpha_{i+\ell}$ pour tout i .

Le lemme V.5.11 entraîne que les points α_i , $i \in \mathbb{Z}$, de \mathbb{H}_ω sont sur une même géodésique, translatée par $\rho_\omega(\gamma)$, car l'arête e_i de T sépare les arêtes e_{i-1} et e_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On en déduit que le vecteur de translation de $\rho_\omega(\gamma)$ est égal à $\sum_{i=0}^{\ell-1} \Theta(\alpha_i, \alpha_{i+1})$.

On définit deux suites de points $(\alpha'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(\beta'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ dans Δ_ω de la manière suivante.

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier k , soit $\alpha_{i,k}$ dans E_3 l'image du point x_0 par $\rho_k(a_i)$. On a $[\alpha_{i,k}] = \alpha_i$. Soit $s_{i,k}$ le segment (orienté) ouvert $] \alpha_{i,k}, \alpha_{i+1,k} [$, qui ne rencontre pas la famille de géodésiques $\tilde{\mathcal{F}}_k = \rho_k(\Gamma)\sigma$. Soit $s'_{i,k}$ l'image par l'application ϕ_k du segment $s_{i,k}$, et s'_i le segment de Δ_ω qui est la limite asymptotique des segments $s'_{i,k}$. Soient β'_i, α'_{i+1} les deux points de Δ_ω tels que $s'_i = [\beta'_i, \alpha'_{i+1}]$.

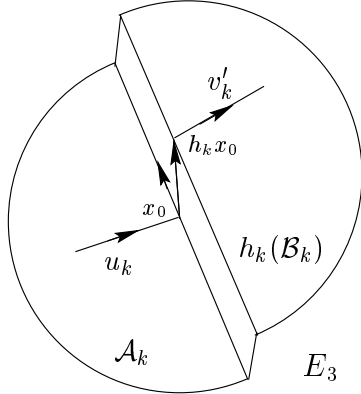
Pour tout i dans \mathbb{Z} , on a $\rho'_\omega(\gamma)s'_i = s'_{i+\ell}$.

Notons qu'on a $\Theta(\beta'_i, \alpha'_{i+1}) = \Theta(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ pour tout i .

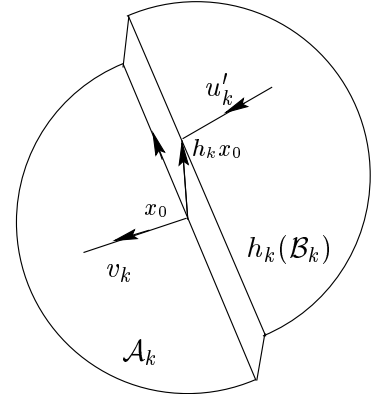
Soit $i \in \mathbb{Z}$. Soient $\gamma = a_i^{-1}a_{i-1}$ et $\gamma' = a_i^{-1}a_{i+1}$. Soient u_k et v_k les images par $\rho_k(a_i^{-1})$ des segment $s_{i-1,k}$ et $s_{i,k}$ et $u = [u_k]$ et $v = [v_k]$ leurs limites asymptotiques. On a $u_k = [\rho_k(\gamma)x_0, x_0]$ et $v_k = [x_0, \rho_k(\gamma')x_0]$, $u = [\rho_\omega(\gamma)*_\omega, *_\omega]$ et $v = [*_\omega, \rho_\omega(\gamma')*_\omega]$

Soient u'_k et v'_k les images par ϕ_k de u_k et v_k . Soient $u' = [u'_k]$ et $v' = [v'_k]$ leurs limites asymptotiques, et u'_0, u'_1, v'_0, v'_1 les points de Δ_ω tels que $u' = [u'_0, u'_1]$ et $v' = [v'_0, v'_1]$.

Comme ϕ_k est (ρ_k, ρ'_k) -équivariante, les segments $s'_{i-1,k}$ et $s'_{i,k}$ sont les images par $\rho'_k(a_i)$ de u'_k et v'_k . Les segments s'_{i-1} et s'_i sont les images par $\rho'_\omega(a_i)$ de u' et v' . Les points β'_{i-1} , α'_i , β'_i , et α'_{i+1} sont donc par définition les images par $\rho'_\omega(a_i)$ des points u'_0 , u'_1 , v'_0 et v'_1 .



Cas $\varepsilon_i = +1$.



Cas $\varepsilon_i = -1$.

Si $\varepsilon_i = +1$, alors $u_k \subset \mathcal{A}_k$ et $v_k \subset \mathcal{B}_k$, donc $u'_k = u_k$ et $v'_k = h_k(v_k)$. On en déduit que $u' = u = [\rho_\omega(\gamma)*_\omega, *_\omega]$ et que $v' = h_\omega v = [h_\omega *_\omega, h_\omega \rho_\omega(\gamma')*_\omega]$. On a donc $\Theta(\alpha'_i, \beta'_i) = \Theta(u'_1, v'_0) = \Theta(*_\omega, h_\omega *_\omega) = \Theta(Y_\omega)$. De plus, d'après le lemme V.5.10, les segments issus de $u'_1 = *_\omega$ et d'extrémités respectives $u'_0 = \rho_\omega(\gamma)*_\omega$ et $v'_0 = h_\omega *_\omega$ ont leurs germes en $u'_1 = *_\omega$ dans des chambres opposées de l'immeuble des directions de $*_\omega$ de Δ_ω . De même, les segments issus de $v'_0 = h_\omega *_\omega$ et d'extrémités respectives $u'_1 = *_\omega$ et $v'_1 = h_\omega \rho_\omega(\gamma')*_\omega$ ont leurs germes en $v' - 0 = h_\omega *_\omega$ dans des chambres opposées de l'immeuble des directions de $h_\omega *_\omega$ de Δ_ω .

Si $\varepsilon_i = -1$, alors $u_k \subset \mathcal{B}_k$ et $v_k \subset \mathcal{A}_k$, donc $u' = h_\omega u = [h_\omega \rho_\omega(\gamma)*_\omega, h_\omega]$ et $v' = v = [*_\omega, \rho_\omega(\gamma')*_\omega]$. On en déduit que $\Theta(\alpha'_i, \beta'_i) = \Theta(u'_1, v'_0) = \Theta(h_\omega *_\omega, *_\omega) = \Theta(-Y_\omega)$. On a de même que les segments $[u'_1, u'_0]$ et $[u'_1, v'_0]$ (resp. $[v'_0, v'_1]$ et $[v'_0, u'_1]$) sont dans des germes de chambres opposés en u'_1 (resp. en v'_0).

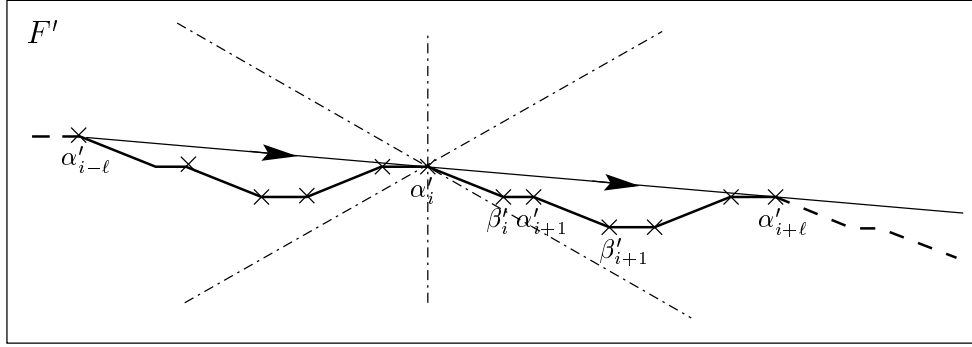
On a donc obtenu que $\Theta(\alpha'_i, \beta'_i) = \Theta(\varepsilon_i Y_\omega)$ pour tout i , et que la suite

$$\dots, \alpha'_i, \beta'_i, \alpha'_{i+1}, \beta'_{i+1}, \dots$$

est une géodésique par morceaux à segments localement dans des germes de chambres opposées. Elle est donc contenue dans un appartement F' par la propriété des immeubles affines énoncée dans le corollaire II.1.13.

Pour tout i dans \mathbb{Z} , d'après le corollaire II.1.13, les points $\alpha'_{i-\ell}$ et $\alpha'_{i+\ell}$ sont dans deux chambres de Weyl de Δ_ω de sommet α'_i , opposées en α'_i . Or le segment $[\alpha'_i, \alpha'_{i+\ell}]$ est l'image par $\rho'_\omega(\gamma)$ du segment $[\alpha'_{i-\ell}, \alpha'_i]$, en particulier ces deux segments sont de même type. Les points $\alpha'_{i-\ell}$, α'_i et $\alpha'_{i+\ell}$ sont donc nécessairement alignés.

Le vecteur de translation de $\rho'_\omega(\gamma)$ est donc égal au type du segment $[\alpha'_i, \alpha'_{i+\ell}]$. Dans l'appartement F' , le vecteur de α'_i à $\alpha'_{i+\ell}$ est égal à la somme des vecteurs de α'_j à β'_j et des vecteurs de β'_j à α'_{j+1} pour j allant de i à $i+\ell-1$. Or tous ces vecteurs sont dans une même chambre de Weyl vectorielle de F' , donc le type de leur somme est la somme de leur types. Par ailleurs, on a $\Theta(\alpha'_j, \beta'_j) = \Theta(\varepsilon_j Y_\omega)$ et $\Theta(\alpha'_j, \beta'_j) = \Theta(\alpha_j, \alpha_{j+1})$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, donc $\Theta(\alpha'_i, \rho'_\omega(\gamma)\alpha'_i) = v(\rho_\omega(\gamma)) + \text{Int}^+(\gamma, c) \times \Theta(Y_\omega) + \text{Int}^-(\gamma, c)\Theta(-Y_\omega)$ d'après la définition des



nombres d'intersections positives et négatives de γ et c , ce qui conclut. \square

Remarque V.5.12 Comme $v \circ \rho'_\omega$ n'est pas identiquement nul sur Γ , c'est (à multiplication par un scalaire près) une valeur d'adhérence de la suite ρ'_k dans le bord de \mathcal{X} .

Remarque V.5.13 Remarquons que le spectre des longueurs obtenu ne dépend que du type dans $\overline{\mathcal{C}}$ de Y_ω . Si ce type est invariant par l'involution d'opposition $Z \mapsto Z^{opp} = \Theta(-Z)$ de $\overline{\mathcal{C}}$, il est colinéaire à X . Par ailleurs, dans le cas où C est séparante, pour tout γ on a $\text{Int}^+(\gamma, C) = \text{Int}^-(\gamma, C)$, et donc $v \circ \rho'_\omega(\gamma) = v \circ \rho_\omega(\gamma) + \text{Int}(\gamma, C)(Y_\omega + Y_\omega^{opp})$. Dans ces deux cas, le spectre de vecteurs de translation obtenu est égal à celui obtenu en twistant ρ_k le long de C dans \mathbb{H} par un twist de Dehn hyperbolique ordinaire (voir par exemple [FLP]).

On se replace dans le cadre de l'exemple V.5.7. Le sous-arbre de \mathbb{H}_ω porté par l'orbite du point-base $*_\omega$ sous l'action de $\rho_\omega(\Gamma)$, qui est invariant par $\rho_\omega(\Gamma)$, est alors isométrique à l'arbre T (car les hexagones hyperboliques droits ne bordant pas C sont constants, donc leurs relevés convergent vers des points du cône asymptotique, et ceux bordant C ont leurs relevés qui convergent vers des segments de longueur $\frac{1}{2}$, dans le cas séparant, 1 dans le cas non-séparant, du cône asymptotique, d'après le choix de λ_k).

On a donc

$$v(\rho_\omega(\gamma)) = \text{Int}(\gamma, C)X \quad \text{pour tout } \gamma \text{ de } \Gamma.$$

La proposition V.5.9 permet donc de calculer explicitement le spectre de ρ'_ω .

Proposition V.5.14 Dans l'exemple V.5.7, pour tout γ dans Γ , on a

$$v(\rho'_\omega(\gamma)) = \text{Int}^+(\gamma, C)Z + \text{Int}^-(\gamma, C)Z^{opp}$$

où $Z = X + \Theta Y_\omega \in \overline{\mathcal{C}}$. \square

Corollaire V.5.15 Dans l'exemple V.5.7, on suppose que C n'est pas séparante et que ΘY_ω n'est pas invariant par l'involution d'opposition de $\overline{\mathcal{C}}$. Alors le spectre des longueurs de translation de ρ'_ω n'est pas le spectre des longueurs de translation d'une action de Γ sur un arbre.

Preuve. En effet, soit $g = atat^{-1}$ où a est un élément de $A - \langle c \rangle$. D'après la proposition V.5.14, les vecteurs de translation de t , g , $gt = ata$ et $gt^{-1} = atat^{-2}$ pour l'action ρ'_ω sont respectivement égaux à Z , $Z + Z^{opp}$, Z et $Z + 2Z^{opp}$ (car on voit facilement que

$\text{Int}^+(t, C) = \text{Int}^\pm(g, C) = \text{Int}^+(gt, C) = \text{Int}^+(gt^{-1}, C) = 1$, $\text{Int}^-(t, C) = \text{Int}^-(gt, C) = 0$, et $\text{Int}^-(gt^{-1}, C) = 2$).

Comme X est stable par l'involution d'opposition, il résulte des hypothèses que Z n'est pas égal, donc pas colinéaire, à son opposé Z^{opp} . On en déduit que les longueurs de translation de gt et gt^{-1} pour l'action ρ'_ω sont toutes deux strictement inférieures à la somme des longueurs de translation de t et g , ce qui n'est pas possible dans une action sur un arbre. En effet, pour une action sur un arbre, si $\ell(gt) < \ell(g) + \ell(t)$, alors $\ell(gt^{-1}) = \ell(g) + \ell(t)$ (voir [CuMo, section 1.11]). \square

Bibliographie

- [Alp] R. Alperin, *An elementary account of Selberg's lemma*, L'Ens. Math. **33** (1987), 269-373.
- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Mathematics **61**, Birkhäuser 1985.
- [Bass] H. Bass, *Groups of integral representation type*, Pac. J. Math. **86** (1980), 15-51.
- [Ben] Y. Benoist, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 1-47.
- [Bes] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J. **56** (1988), 143-161.
- [Bou1] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, chap. 1, Hermann, Paris, 1971.
- [Bou2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 6, Hermann, Paris, 1971.
- [Bou3] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4 à 6, Hermann, Paris, 1971.
- [Bri] M.R. Bridson, *On the semisimplicity of polyhedral isometries*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2143-2146.
- [BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.
- [Bro] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, 1989.
- [BrTi1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.
- [BrTi2] F. Bruhat, J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. Fr. **112** (1984), 259-301.
- [Bus] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Math. **106**, Birkhäuser, 1992.
- [CaKe] D. Carter, G. Keller, *Elementary expressions for unimodular matrices*, Comm. Algebra **12** (1984) 379-389.
- [Chi] I.M. Chiswell, *Non standard analysis and the Morgan-Shalen compactification*, Quart. J. Math. Oxford **42** (1991), 257-270.
- [ChGo] S. Choi, W. M. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 657-661.
- [CuMo] M. Culler, J. Morgan, *Groups actions on \mathbb{R} -trees*, Proc. Lond. Math. Soc. **55** (1987), 571-604.
- [CS] M. Culler, P.B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109-146.

- [Ebe] P. Eberlein, *Geometry of non-positively curved manifolds*, Chicago L. N. in Math., The Univ. of Chicago Press, 1996.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru (eds), *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France (1979).
- [Ger] P. Gérardin, *Immeubles des groupes linéaires généraux*. Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980), Lect. Notes in Math. **880**, Springer (1981), 138–178.
- [GW] H. Glöckner, G. A. Willis, *Uniscalar p -adic Lie groups*, prépublication 1999.
- [Gol] W. M. Goldman, *Convex real projective structures on compact surfaces*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 791-845.
- [GoIw] O. Goldman, N. Iwahori, *The space of p -adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137-177.
- [GoMi] W. M. Goldman, J. J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space*, Invent. Math. **88** (1987) 495-520.
- [Gro] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [Hit] N. J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology **31** (1992), 449-473.
- [JoMi] D. Johnson, J. J. Millson, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*, Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), Progr. Math. **67**, Birkhäuser, 1987, 48-106.
- [KaLe] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 582-603.
- [KLLe] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), 115-197.
- [Lan] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.
- [Lee] B. Leeb, communication orale, 1997.
- [LMR] A. Lubotzky, S. Mozes, M.S. Raghunathan, *The word and Riemannian metric on lattices of semisimple Lie groups*, preprint.
- [Mar] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groups*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.
- [MaSo] G. Margulis, G. Soifer, *Maximal subgroups of infinite index in finitely generated groups*, J. Alg. **69** (1981) 1-23.
- [Mor] J. Morgan, *Group actions on trees and the compactification of the space of classes of $SO(n, 1)$ -representations*, Topology **25** (1986) 1-33.
- [MoSh] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I, II, III*, Ann. Math. **122** (1985), 398-476, et **127** (1988), 403-519.
- [Mos] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces* Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press, 1973.
- [Par1] A. Parreau, *Immeubles affines, construction par les normes et étude des isométries*, prépublication Univ. Orsay, Sep. 1999.

- [Par2] A. Parreau, *Sous-groupes elliptiques de groupes linéaires sur un corps valué*, prépublication Univ. Orsay, Sep. 1999.
- [Pau1] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94** (1988), 53-80.
- [Pau2] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d'habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).
- [Pau3] F. Paulin, *Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), no. 11, 1217-1220.
- [Rag] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer Verlag 1972.
- [Ron] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.
- [Rou] G. Rousseau, *Exercices métriques immobiliers*, Prépublication, Univ. Nancy (1999).
- [Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).
- [Ste] T. Steger, *Local fields and buildings*, Contemp. Math. **206**, Amer. Math. Soc. (1997), 79-107.
- [Tit] J. Tits, *Immeubles de type affine*, dans "Buildings and the geometry of diagrams", Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag (1986), 159-190.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UMR 8628 DU CNRS,
 BÂT. 425, UNIVERSITÉ PARIS-SUD,
 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.
Courrier électronique : **Anne.Parreau@math.u-psud.fr**