Contemporary Mathematics

Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries

Anne Parreau

ABSTRACT. Let $\mathbb{F}$ be a field endowed with a valuation $v : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \infty$. When v is discrete, the classical construction of the Bruhat-Tits building Δ associated with $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ relies on its simplicial complex structure, with vertices identified with homothety classes of lattices in $\mathbb{F}^n$. When the valuation is not discrete (dense or surjective), the affine building Δ is no longer simplicial. We first give the construction of Δ using ultrametric norms of $\mathbb{F}^n$, inspired by the work of Goldman-Iwahori dealing with locally compact fields $\mathbb{F}$. This approach allows to unify the cases where the valuation is discrete, dense or surjective and to give a concrete model for Δ.

After developing the basic properties of affine buildings, we prove the following result, in a purely geometric way. Let Δ be a complete affine building, with thick spherical building at infinity and no trivial factor. There exists a constant K depending only on the type of Δ such that for every isometry g of Δ, we have

$$d(x, \mathrm{Min}_g) \leq K d(x, gx)$$

for all points x in Δ, where $\mathrm{Min}_g = \{x \in \Delta;\ d(x, gx) \text{ is minimal}\}$. In particular g either fixes a point or translates some geodesic.

The main difficulty lies in the case where $\mathbb{F}$ is not locally compact. An application to non archimedean representations of group with bounded generation is given.

Introduction.

Les immeubles affines sont des objets géométriques, ayant en particulier une métrique à courbure négative ou nulle, introduits par J. Bruhat et J. Tits (voir par exemple [**Tit**]).

L'exemple fondateur est l'immeuble de Bruhat-Tits associé à un groupe algébrique semi-simple G sur un corps valué $\mathbb{F}$ (cf. [**BrTi1**]). Il joue un rôle analogue pour G à celui joué pour un groupe de Lie semi-simple réel par l'espace symétrique associé, qui est une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle.

Les immeubles combinatoires de type affine, ou "discrets", qui sont des complexes simpliciaux et correspondent au cas où la valuation de $\mathbb{F}$ est discrète, sont bien connus et ont fait l'objet d'expositions très complètes ([**Bro**], [**Ron**]).

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E42, 51E24, 20G25.

Mais, dans le cas où la valuation de $\mathbb{F}$ n'est pas discrète, l'immeuble de Bruhat-Tits de G est un immeuble affine plus général, "non discret", qui n'admet plus de structure simpliciale. Les immeubles affines qui nous intéressent ne sont en général pas discrets. En particulier, les cônes asymptotiques d'espaces symétriques (introduits par M. Gromov), outils très utiles dans l'étude des espaces symétriques, sont des immeubles affines (voir [**KlLe**]) qui ne sont ni discrets ni localement compacts. Ces immeubles font intervenir des corps valués $\mathbb{F}$ qui ne sont pas localement compacts ni à valuation discrète. Les immeubles affines non discrets de dimension 1 sont les arbres réels (sans sommets terminaux) qui apparaissent par exemple comme dégénérescences d'espaces symétriques de rang 1 (voir [**MoSh**]). Ces exemples motivent une étude des immeubles affines (et de leurs isométries) dans le cadre le plus général (qui contient le cas particulier des immeubles affines discrets, plus précisément les réalisations géométriques des immeubles combinatoires de type affine).

B. Kleiner et B. Leeb ont développé une définition géométrique des immeubles affines (complets) dans [**KlLe**]. Cependant elle est difficile à vérifier directement pour les immeubles affines classiques. La définition (et le point de vue) de départ adoptée dans cet article est celle de Tits (voir [**Tit**],[**Ron**, appendix 3]). On montre que la définition de Kleiner-Leeb (élargie au cas non complet) est équivalente à celle de Tits.

Dans une première partie (sections 1 et 2), on revoit la notion d'immeuble affine (pas nécessairement discret). On établit proprement les propriétés fondamentales. On donne les relations entre les différentes définitions des immeubles affines et des caractérisations pratiques. Une partie de cela est sans doute bien connue, mais, à notre connaissance, bien écrite seulement dans le cas discret.

Dans une deuxième partie (section 3), on donnera la construction directe de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ par les normes ultramétriques. La construction usuelle de l'immeuble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ dans le cas où la valuation est discrète (voir [**Ser**] pour $n = 2$, et par exemple [**Ste**] pour $n > 2$) s'appuie fortement sur sa structure de complexe simplicial, dont les sommets s'identifient aux classes d'homothétie de réseaux de $\mathbb{F}^n$. Elle n'est donc pas valable pour une valuation non discrète. L'approche choisie ici permet d'unifier les cas où la valuation est discrète, dense, ou surjective et de donner un modèle concret pour l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. La construction de cet espace est due dans le cas localement compact à [**GoIw**] (voir aussi [**Ger**]), mais leurs outils ne s'adaptent pas au cas général. Bruhat et Tits ont vérifié dans [**BrTi2**], dans le cas général (et pour tous les groupes classiques), que cet espace est isomorphe à l'immeuble de Bruhat-Tits introduit dans [**BrTi1**] (L'existence de [**Ger**] et [**BrTi2**] nous a été signalée par F. Choucroun après qu'une première version de cet article ait été écrite.). Ici, on a tenté de vérifier les axiomes des immeubles affines de la manière la plus directe et élémentaire possible.

Enfin, dans la dernière partie (section 4), on démontre un théorème de classification des isométries des immeubles affines. Rappelons (voir par exemple [**BrHa**]) qu'on classe de façon standard une isométrie d'un espace métrique CAT(0) dans l'un des trois types suivants : elliptique si elle a un point fixe, axiale si elle translate une géodésique, parabolique si la borne inférieure de la distance entre un point et son image n'est pas atteinte (voir l'exemple du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$).

Théorème 1. *Soit Δ un immeuble affine, dont l'immeuble sphérique à l'infini est épais. Soit g une isométrie de Δ, alors g fixe un point ou translate une géodésique du complété de Δ.*

Plus précisément on donne (voir Théo. 4.1) une majoration (uniforme en le type de l'immeuble) de la distance d'un point x à l'ensemble de déplacement minimal en fonction de la distance de x à son image par g (voir [**Rou**] pour des résultats apparentés). Si g préserve les chambres de Weyl (par exemple si g est un automorphisme), le résultat est valable sans l'hypothèse sur l'immeuble à l'infini.

Ce résultat s'applique par exemple à l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sur son immeuble affine associé (voir section 3).

En dimension 1, il est dû à Serre (voir aussi [**MoSh**]). Dans le cas discret (voir [**Bri**] pour un résultat plus général dans cette direction) ou localement compact, la démonstration en est très facile.

Il permet par exemple de montrer le corollaire intéressant suivant.

On dit qu'un groupe abstrait Γ est de *génération bornée* par rapport à une de ses parties finies F s'il existe un entier k tel que pour tout élément γ de Γ, il existe des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de F et des entiers $n_1, \dots, n_k$ tels que $\gamma = \gamma_1^{n_1}, \dots, \gamma_k^{n_k}$. Par exemple (voir [**CaKe**]), pour $n \geq 3$, le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est de génération bornée par rapport à la partie finie F formée des matrices unipotentes élémentaires. Ces matrices sont de plus des éléments γ de Γ de *longueur stable nulle*, c'est-à-dire que pour une (toute) longueur des mots $\|.\|$ sur Γ, on a $\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\gamma^m\|/m = 0$ (voir par exemple [**LMR**]).

Corollaire 2. *Soit Γ un groupe de génération bornée par rapport à une de ses partie finie F formée d'éléments de longueur stable nulle de Γ. Si Γ agit sur un immeuble affine Δ par isométries préservant le type, alors Γ admet un point fixe global dans le complété de Δ.*

Preuve. Le théorème 1 ci-dessus entraîne qu'un élément γ de longueur stable nulle de Γ admet nécessairement un point fixe dans le complété $\overline{\Delta}$ de Δ. En effet, il existe un point x dans $\overline{\Delta}$ tel que $d(x, \gamma^m x) = md(x, \gamma x)$, or $d(x, \gamma^m x) \leq \|\gamma^m\|_S \sup_{s \in S} d(x, sx)$ (où S est une partie génératrice finie quelconque de Γ et $\|.\|_S$ la longueur des mots associée), dont on déduit en passant à la limite pour $m \longrightarrow \infty$ que $d(x, \gamma x) = 0$. Les éléments de F ont donc chacun un point fixe dans $\overline{\Delta}$. Il est alors facile de voir en utilisant la propriété de génération bornée que les orbites de Γ dans l'espace métrique CAT(0) complet $\overline{\Delta}$ sont bornées, donc que Γ admet un point fixe global. □

Corollaire 3. *Soient $\mathbb{F}$ un corps valué et $\mathcal{O}$ son anneau de valuation. Soient n et m deux entiers non nuls, avec $n \geq 3$. Soit ρ une représentation de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{F})$. Alors $\rho(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}))$ est un sous-groupe borné de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{F})$, et dans le cas où l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{F})$ est complet, $\rho(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}))$ est conjugué dans $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$.* □

Ce résultat est dû à Margulis dans le cas où le corps $\mathbb{F}$ est localement compact. Il est par ailleurs bien connu que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur des arbres sans point fixe global, donc l'hypothèse $n \geq 3$ est nécessaire.

Je remercie Frédéric Paulin pour ses commentaires. Je remercie également Yehuda Shalom pour avoir attiré mon attention sur les actions de groupes de génération bornée, ainsi que Francis Choucroun.

Table des matières

1. Définitions et caractérisations des immeubles affines.

Nous allons tout d'abord définir les immeubles affines, puis établir un certain nombre de leurs propriétés fondamentales, qu'on peut utiliser pour les caractériser. Cette section est organisée dans le but de démontrer le théorème 1.21, qui donne différentes caractérisations des immeubles affines, qui seront utilisées dans la suite. On utilisera sans démonstration les propriétés classiques des groupes de réflexions finis et systèmes de Coxeter (voir par exemple [**Bou**]), ainsi que des immeubles sphériques (voir par exemple [**Bro**], [**Ron**]).

1.1. La structure modèle. On renvoie par exemple à [**Bro**, Chapter 1] pour les définitions et résultats énoncés ci-dessous.

Soit $\mathbb{A}$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Un *groupe de réflexions fini* est un sous-groupe fini $\overline{W}$ d'isométries vectorielles de $\mathbb{A}$, engendré par des réflexions. On appellera parfois également la paire $(\mathbb{A}, \overline{W})$ un groupe de réflexions fini, quand il est nécessaire d'expliciter l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{A}$ sous-jacent, et on dira qu'il est *trivial* si le groupe $\overline{W}$ est réduit à l'identité.

Soient $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$ des groupes de réflexions finis. Le produit direct $\overline{W}_1 \times \overline{W}_2$ agissant canoniquement sur la somme directe orthogonale $\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$ est un groupe de réflexions fini. On dit qu'un groupe de réflexions fini est *irréductible* s'il n'est pas trivial et ne se décompose pas en produit de groupes de réflexions finis comme ci-dessus. Un groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ admet une décomposition canonique en un produit $(\mathbb{A}, \overline{W}) = (\mathbb{A}_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{A}_m, \overline{W}_0 \times \ldots \times \overline{W}_m)$ de groupes de réflexions finis où $(\mathbb{A}_i, \overline{W}_i)$ est trivial pour $i = 0$ et irréductible pour $i > 0$.

On se fixe désormais un espace vectoriel euclidien $\mathbb{A}$ de dimension finie n et un groupe de réflexions fini $\overline{W}$ agissant sur $\mathbb{A}$.

Un hyperplan de $\mathbb{A}$ qui est l'ensemble des points fixes d'une réflexion de $\overline{W}$ est appelé un *mur (vectoriel)* de $\mathbb{A}$. Les murs vectoriels de $\mathbb{A}$ sont donc en nombre fini. Une composante connexe du complémentaire dans $\mathbb{A}$ de la réunion des murs (respectivement son adhérence) est appelée une *chambre de Weyl (vectorielle)* (respectivement *chambre de Weyl fermée*) de $\mathbb{A}$. C'est un cône polyédral convexe. Les *facettes (vectorielles)* (respectivement *facettes fermées*) de $\mathbb{A}$ sont les facettes ouvertes (resp. fermées) de ces cônes polyédraux. Elles forment une partition de $\mathbb{A}$. Le groupe $\overline{W}$ opère simplement transitivement sur les chambres de Weyl vectorielles de $\mathbb{A}$. On se fixe dorénavant une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathbf{C}}$ de $\mathbb{A}$ dite *fondamentale.* C'est un domaine fondamental strict pour l'action de $\overline{W}$ sur $\mathbb{A}$.

On appelle *murs, chambres de Weyl, facettes, ... affines* de $\mathbb{A}$ les translatés des murs, chambres de Weyl, facettes, ... vectoriels de $\mathbb{A}$ (nos chambres de Weyl et facettes correspondent respectivement aux *quartiers* et *facettes de quartiers* de [**Tit**]).

Soit W un sous-groupe d'isométries affines de $\mathbb{A}$, de projection vectorielle $\overline{W}$, tel qu'il existe a dans $\mathbb{A}$ tel que $W = TW_a$, où W_a fixe a et T est un sous-groupe de translations de $\mathbb{A}$ (ou, de manière équivalente, engendré par des réflexions affines).

1.2. Définition des immeubles affines.

DÉFINITION 1.1. Soient Δ un ensemble et $\mathcal{A}$ une famille d'injections de $\mathbb{A}$ dans Δ, qu'on appelle *appartements marqués.* On appelle *appartement* l'image d'un appartement marqué.

On dit que Δ muni du *système d'appartements (marqués)* $\mathcal{A}$ est un *immeuble affine modelé sur* $(\mathbb{A}, W)$ si les axiomes (A1)-(A5') suivants sont vérifiés.

- **(A1):** Le système d'appartements marqués est invariant par précomposition par W.
- **(A2):** Soient f et f' deux appartements marqués. L'ensemble $I = f'^{-1}(f(\mathbb{A}))$ est un convexe fermé de $\mathbb{A}$ et en restriction à I, le changement d'appartement $f^{-1} \circ f'$ est la restriction d'un élément de W.
- **(A3):** Par deux points de Δ passe au moins un appartement.

Les axiomes (A2) et (A3) permettent de définir une fonction d de $\Delta \times \Delta$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que, pour tout appartement marqué f et tous points a et b de $\mathbb{A}$, on a que $d(f(a), f(b))$ est égal à la distance euclidienne de a à b dans $\mathbb{A}$. On appelle chambre de Weyl de Δ l'image par un appartement marqué d'une chambre de Weyl affine de $\mathbb{A}$.

(A4): Deux chambres de Weyl contiennent des chambres de Weyl contenues dans un même appartement.

(A5'): Pour tout point x de Δ et tout appartement A passant par x, il existe une rétraction r de Δ sur A (c'est-à-dire une application de Δ dans $\mathbb{A}$ égale à l'identité en restriction à $\mathbb{A}$), diminuant d, et telle que $r^{-1}(x) = \{x\}$.

Remarques. Cette définition est extraite de [**Ron**, Appendix 3], où on trouvera un historique de l'axiome (A5'). On notera que dans [**Ron**, Appendix 3] et [**Tit**], le seul groupe W autorisé est le groupe $\widetilde{W}$ de toutes les isométries affines de $\mathbb{A}$ de partie vectorielle dans $\overline{W}$. Pour toutes les propriétés étudiées dans cet article, cela revient au même, comme on le remarquera ci-dessous. Notons simplement que la définition donnée ici permet de caractériser les immeubles affines discrets de la manière naturelle suivante.

La paire $(\Delta, \mathcal{A})$ est la réalisation géométrique d'un immeuble combinatoire de type affine (voir par exemple [**Tit**], [**Ron**] pour la définition) si et seulement si c'est un immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}, W)$, au sens ci-dessus, avec W discret, et $\overline{W}$ irréductible.

Remarquons que, si $(\Delta, \mathcal{A})$ est un immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}, W)$, alors $(\Delta, \widetilde{\mathcal{A}})$ est encore un immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}, \widetilde{W})$, avec $\widetilde{\mathcal{A}} = \{f \circ \widetilde{w};\ f \in \mathcal{A},\ \widetilde{w} \in \widetilde{W}\}$. Toutes les notions (appartements, chambres de Weyl et facettes, distance, ...) et propriétés étudiées dans cet article ne dépendent que de $\widetilde{\mathcal{A}}$, aussi supposera-t-on désormais, pour simplifier les notations, que W est le sous-groupe de toutes les isométries affines de $\mathbb{A}$ de partie vectorielle dans $\overline{W}$. On dira alors que $(\Delta, \mathcal{A})$ est un immeuble affine de *type (vectoriel)* $(\mathbb{A}, \overline{W})$.

À partir de maintenant et dans tout le reste de la section 1, on suppose donné un ensemble Δ muni d'une famille $\mathcal{A}$ d'injections de $\mathbb{A}$ dans Δ vérifiant les axiomes (A1), (A2) et (A3).

Remarque. Pour que la fonction d définie ci-dessus soit une distance sur Δ, il faut et il suffit que l'inégalité triangulaire soit vérifiée. On verra que c'est bien le cas si Δ est un immeuble affine (cf. Prop. 1.3).

1.3. Premières définitions.

1.3.1. *Type d'un segment.* Le *segment* $[x, y]$ d'un point x à un point y de Δ est par définition le segment euclidien de x à y dans un (tout) appartement les contenant. A chaque segment $[x, y]$ dans Δ on associe le *type* $\Theta[x, y]$ de ce segment, qui est l'unique vecteur de la chambre de Weyl fermée fondamentale $\overline{\mathbf{C}}$ de $\mathbb{A}$ tel que dans un appartement marqué f contenant x et y, on ait $x = f(a)$ et $y = f(a + \Theta[x, y])$ avec $a \in \mathbb{A}$. Cette notion est bien définie car $\overline{\mathbf{C}}$ est un domaine fondamental strict pour l'action du groupe de Weyl vectoriel $\overline{W}$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{A}$ (voir paragraphe 1.1).

1.3.2. *Facettes de* Δ. Un *complexe simplicial* est un ensemble D partiellement ordonné tel que

1. Deux éléments ayant un minorant commun ont une borne inférieure.
2. Le sous-ensemble des minorants, appelés *facettes*, d'un élément donné F est isomorphe à l'ensemble, partiellement ordonné par l'inclusion, des parties

non vides d'un ensemble fini $\{1,\ldots,r\}$. L'entier $r-1$ est appelé la *dimension* de F.

On dit qu'un complexe simplicial D est *marqué* si on a un morphisme de D dans l'ensemble, partiellement ordonné par l'inclusion, des parties non vides d'un ensemble fini fixé, qui est injectif en restriction au sous-ensemble des minorants de chaque élément F de D.

Un *complexe de chambres* est un complexe simplicial dont les éléments maximaux, appelés *chambres*, sont de même dimension et dont deux chambres quelconques peuvent être jointes par une *galerie*, c'est-à-dire une suite de chambres telle que deux chambres consécutives sont *adjacentes*, i.e. ont une facette de codimension 1 commune.

L'ensemble Σ des facettes vectorielles de $\mathbb{A}$, muni de la relation "être une facette de", c'est-à-dire par la relation d'inclusion sur les facettes fermées (voir par exemple [**Bro**, Chapter 1]), est un complexe simplicial.

On appelle *bord* de $\mathbb{A}$ et on note $\partial\mathbb{A}$ la sphère unité de $\mathbb{A}$, munie de la distance angulaire. On note ∂ l'application canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$ privé du vecteur nul dans $\partial\mathbb{A}$.

Le groupe de réflexions fini $\overline{W}$ induit une partition de la sphère $\partial\mathbb{A}$ par l'ensemble Σ^∞ des bords $\partial\mathbf{F}$ des facettes vectorielles $\mathbf{F}$ non réduites à $\{0\}$ de $\mathbb{A}$, qui, muni de la relation d'ordre induite par l'inclusion sur les adhérences, est un complexe simplicial (isomorphe à Σ privé de $\{0\}$ dans le cas où $\overline{W}$ est essentiel, à Σ sinon).

Notons $\Sigma_{\leq\mathbf{C}}$ (resp. $\Sigma^\infty_{\leq\mathbf{C}}$) le sous-ensemble de Σ (resp. de Σ^∞) formé par les facettes de $\mathbf{C}$ (resp. par les bords des facettes non réduites à $\{0\}$ de $\mathbf{C}$).

On appelle *facette (ouverte)* (resp. facette *fermée*) de Δ l'image F par un appartement marqué f d'une facette affine ouverte (resp. fermée) $a+\mathbf{F}$ de $\mathbb{A}$, où $a \in \mathbb{A}$ et $\mathbf{F}$ est une facette vectorielle de $\mathbb{A}$. Cette facette est dite de *sommet* x si $f(a) = x$. La facette fermée $\overline{F}$ *associée* est alors l'image par l'appartement marqué de la facette affine fermée $a+\overline{\mathbf{F}}$ associée (cela ne dépend pas du choix de l'appartement). Quitte à précomposer f par un élément de W, on peut supposer que $\mathbf{F}$ est dans l'ensemble $\Sigma_{\leq\mathbf{C}}$ des facettes de la chambre de Weyl vectorielle fondamentale $\mathbf{C}$. Alors $\mathbf{F}$, qu'on appellera le *type* de F et qu'on notera $\Theta(F)$, et la restriction à $\overline{\mathbf{F}}$ de $f(a+\cdot)$, ne dépendent que de F.

On dit qu'une facette F' de Δ *est dominée par* ou *est une facette d'*une facette F de Δ si F et F' ont même sommet et F' est incluse dans la facette fermée $\overline{F}$ associée à F.

L'ensemble des facettes de Δ de sommet un point x donné est un complexe simplicial marqué (par le type).

1.3.3. *Germes de facettes en un point.* Soient x un point de Δ et F, F' deux facettes de Δ de sommet x. On dit que F et F' ont même *germe en* x si leur intersection est un voisinage de x dans F et dans F'. C'est une relation d'équivalence sur les facettes de sommet x. La classe des facettes ayant même germe en x qu'une facette F donnée est appelée le *germe* de F en x et noté $\Sigma_x F$. On dit que le germe en x de F *domine* celui de F' si $\overline{F}$ contient un voisinage de x dans F'. L'axiome (A2) permet d'établir la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soient F et F' deux facettes de sommet x de Δ telles que $\overline{F}$ contient un voisinage de x dans F'. Alors il existe une facette de F ayant même germe en x que F'.*

Si F et F' ont même germe en x, alors elles ont même type $\mathbf{F}$. Soient f, f' deux appartements marqués et a, a' dans $\mathbb{A}$ tels que $F = f(a+\mathbf{F})$, $F' = f'(a'+\mathbf{F})$ et $f(a) = f'(a') = x$. Les restrictions à $\overline{\mathbf{F}}$ de $f(a+\cdot)$ et de $f'(a'+\cdot)$ sont alors égales sur un voisinage de 0. □

On peut donc définir le *type* d'un germe en x de facette (non réduit à la seule facette $\{x\}$) comme le bord $\partial\mathbf{F} \in \Sigma^{\infty}_{\leq\mathbf{C}}$ du type $\mathbf{F}$ d'un de ses éléments. On note $\Sigma_x\Delta$ l'ensemble des germes en x des facettes de sommet x de Δ, non réduites à $\{x\}$, partiellement ordonné par la relation de domination. C'est un complexe simplicial marqué (par le type).

Soit A un appartement de Δ passant par x. Le *germe en x de A* est le sous-complexe de $\Sigma_x\Delta$ formé par les germes en x des facettes de sommet x, non réduites à $\{x\}$, de A.

Pour que le complexe simplicial $\Sigma_x\Delta$ soit un immeuble sphérique modelé sur Σ^∞, avec les germes d'appartements pour appartements, il faut et il suffit que l'axiome (B1) de [**Ron**, IV,1 p. 76] soit vérifié (l'axiome (B2) de [**Ron**] découlant directement de l'axiome (A2)), c'est-à-dire qu'on ait la propriété suivante.

(GG): Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont dans un même appartement.

On verra que c'est bien le cas si Δ est un immeuble affine (cf. Corollaire 1.11).

1.4. Deux conséquences de l'axiome (A5'). Rappelons que Δ désigne un ensemble muni d'une famille $\mathcal{A}$ d'injections de $\mathbb{A}$ dans Δ vérifiant les axiomes (A1), (A2) et (A3) de la section 1.2.

Proposition 1.3. *Si l'axiome (A5') est vérifié, alors la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire et est donc bien une distance.*

Preuve. Soient x, y et z trois points de Δ. D'après l'axiome (A3), il existe un appartement A contenant x et y. D'après l'axiome (A5'), il existe une rétraction r de Δ sur A, diminuant d. On a donc $d(x,r(z)) \leq d(x,z)$ et $d(r(z),y) \leq d(z,y)$. Or, comme la restriction de d à A est une distance, on a $d(x,y) \leq d(x,r(z))+d(r(z),y)$. On a donc bien que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. □

On appelle *racine (resp. vectorielle, affine)* un demi-espace (resp. vectoriel, affine) fermé de $\mathbb{A}$ bordé par un mur. On appelle *demi-appartement* l'image par un appartement marqué d'une racine vectorielle $\mathbb{A}$. Dans [**Ron**], on trouve l'axiome suivant comme alternative à l'axiome (A5') :

(A5): Trois appartements tels que leurs intersections deux à deux sont des demi-appartements ont un point commun.

Proposition 1.4. *Si l'axiome (A5') est vérifié, alors l'axiome (A5) est également vérifié.*

Preuve. On peut se ramener à étudier la situation suivante (les autres cas étant évidents), illustrée par la figure 1. Soit M un mur vectoriel de $\mathbb{A}$, délimitant deux demi-espaces D^+ et D^-. Considérons trois appartements marqués f_1, f_2 et f_3 dans $\mathcal{A}$ tels que $f_2(D^+) = f_3(D^-)$, $f_1(a+D^-) = f_2(a+D^-)$, et $f_3(b+D^+) = f_1(c+D^+)$ avec $a \in D^-$, $b \in D^+$ et $c \in a+D^+$.

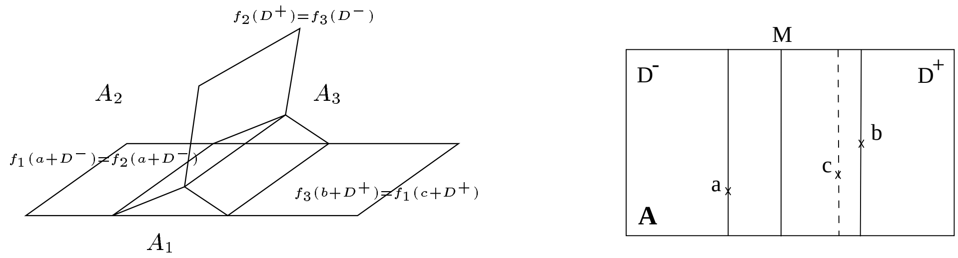


FIG. 1. *Preuve de l'axiome (A5).*

Soit $x \in f_1(\mathbb{A})$. D'après l'axiome (A5'), il existe une rétraction r de Δ sur $f_1(\mathbb{A})$, diminuant la distance d, et telle que $r^{-1}(x) = \{x\}$.

Soit g l'application de $\mathbb{A}$ dans Δ égale à f_2 sur D^- et égale à f_3 sur D^+ (bien définie car f_2 et f_3 coïncident sur M). D'après ce qui a été fait ci-dessus, l'axiome (A5') entraîne l'inégalité triangulaire pour d, donc g diminue la distance.

On considère la compactification canonique de l'espace euclidien de dimension finie $\mathbb{A}$ par la sphère des directions $\partial\mathbb{A}$, en une boule fermée.

L'application $f_1^{-1} \circ r \circ g$, de $\mathbb{A}$ dans lui-même, fixe le demi-espace $a + D^-$ point par point (car r est l'identité sur l'image de f_1, et $g = f_2$ coïncide avec f_1 sur $a + D^-$) et c'est la translation de vecteur $c - b$ en restriction au demi-espace $b + D^+$ (car $f_1^{-1} \circ f_3$ est alors la restriction d'un élément de W qui envoie $b + D^+$ sur $c + D^+$). De plus, elle diminue la distance euclidienne. On peut la prolonger continûment en une application de la boule fermée $\mathbb{A} \cup \partial\mathbb{A}$ dans elle-même, égale à l'identité sur $\partial\mathbb{A}$. Elle est donc surjective. On a donc $x \in r\,(f_2(\mathbb{A}) \cup f_3(\mathbb{A}))$, donc $x \in f_2(\mathbb{A}) \cup f_3(\mathbb{A})$. On en déduit que $f_1(\mathbb{A}) \subset f_2(\mathbb{A}) \cup f_3(\mathbb{A})$. □

1.5. L'immeuble à l'infini et les propriétés (GG) et (CO).. Dans cette section, on suppose que $(\Delta, \mathcal{A})$ vérifie, en plus des axiomes (A1), (A2) et (A3), les axiomes (A4) et (A5), et que la fonction d vérifie l'inégalité triangulaire (c'est notamment le cas pour les immeubles affines d'après ce qui précède). On montrera par la suite en 1.7 que ces hypothèses, a priori plus faibles, entraînent l'axiome (A5'), donc que Δ est un immeuble affine.

1.5.1. *L'immeuble sphérique à l'infini.* On dit que deux facettes de Δ sont *asymptotes* si elles sont à distance de Haussdorff finie pour d. C'est une relation d'équivalence car d vérifie l'inégalité triangulaire. Une classe de facettes asymptotes non réduites à un point est appelée une *facette à l'infini* de Δ. La facette à l'infini définie par une facette F (non réduite à un point) est appelée *bord* de F et notée $F(\infty)$.

Soient b et b' deux facettes à l'infini de Δ. On dit que b *domine* b' ou que b' est une facette de b et on note $b' \leq b$ si pour tout $F \in b$ et $F' \in b'$ on a $\sup_{x \in F'} d(x, F) < \infty$. L'axiome (A4) permet d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 1.5. *Soient F et F' deux facettes de Δ telles que $\sup_{x \in F'} d(x, F)$ est fini. Alors il existe une facette de F asymptote à F'.*

Si F et F' sont asymptotes, non réduites à un point, alors il existe une unique facette $\mathbf{F}$ de la chambre de Weyl fondamentale $\mathbf{C}$ et deux appartements marqués f et f' tels que $F = f(a + \mathbf{F})$, $F' = f'(a' + \mathbf{F})$ avec a, a' dans $\mathbb{A}$. Les restrictions à $\overline{\mathbf{F}}$ de $f(a + \cdot)$ et de $f'(a' + \cdot)$ sont alors à distance bornée. Le bord $\partial\mathbf{F} \in \Sigma^{\infty}_{\leq\mathbf{C}}$ de $\mathbf{F}$ est alors appelé le type *de $F(\infty)$ et notée $\Theta(F(\infty))$.* □

On appelle *sous-chambre de Weyl* d'une chambre de Weyl C de Δ une chambre de Weyl de Δ contenue dans C.

COROLLAIRE 1.6. *Deux chambres de Weyl de Δ sont asymptotes si et seulement si elles ont une sous-chambre de Weyl commune.* $\square$

L'ensemble Δ^∞ des facettes à l'infini de Δ, muni de la relation de domination, est un complexe simplicial marqué (par le type).

À chaque appartement A de Δ on associe son bord $A(\infty)$, i.e. le sous-complexe, isomorphe à Σ^∞, de Δ^∞ formé des bords des facettes (non réduites à un point) incluses dans A.

PROPRIÉTÉ 1.7. *Le complexe simplicial Δ^∞ est un immeuble sphérique modelé sur Σ^∞, appelé* immeuble à l'infini *de Δ. Ses appartements sont les bords des appartements de Δ.*

PREUVE. L'axiome (B1) de [**Ron**] découle immédiatement de (A4), il suffit de vérifier (B2"). Si une chambre à l'infini c est dans le bord à l'infini de deux appartements A et A', alors il existe deux chambres de Weyl C dans A et C' dans A' de même bord c. Les chambres de Weyl C et C' ont donc une sous-chambre de Weyl commune C''. Il existe deux appartements marqués f et f' d'images respectives A et A' tels que le changement d'appartement $f' \circ f^{-1}$ est égal à l'identité sur leur intersection, qui contient C''. L'application induite du bord à l'infini de A dans le bord à l'infini de A' est un isomorphisme fixant leur intersection. $\square$

Soient A_1 et A_2 deux appartements de Δ. S'ils ont même bord à l'infini, ils sont égaux. Si leurs bords s'intersectent suivant un demi-appartement de Δ^∞, alors $A_1 \cap A_2$ est un demi-appartement de Δ (prendre deux chambres de Weyl C_1 et C_2 communes à A_1 et A_2 dont les bords sont dans $A_1(\infty) \cap A_2(\infty)$, opposées dans le premier cas, ayant deux faces de codimension 1 opposées dans le second. L'intersection des deux appartements contient l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$, qui est l'appartement tout entier dans le premier cas, et un demi-appartement dans le second).

1.5.2. *La propriété (GG).*

PROPOSITION 1.8. *Soient $c' \in \Delta^\infty$ une chambre à l'infini et C une chambre de Weyl de sommet $x \in \Delta$. Alors il existe un appartement contenant un germe en x de C et dont le bord contient c'.*

PREUVE. Soit A un appartement contenant C. Par induction sur la longueur d'une galerie allant de $C(\infty)$ à c', il suffit de démontrer la proposition pour c' adjacente à $A(\infty)$ (et n'y étant pas incluse). Le mur m de $A(\infty)$ contenant une face de codimension 1 de c' partage $A(\infty)$ en deux demi-appartements h_1 et h_2. Comme Δ^∞ est un immeuble sphérique, il existe un demi-appartement h de Δ^∞ de bord m et contenant c', et $a_i = h_i \cup h$ est un appartement à l'infini pour $i = 1, 2$.

Soit A_i l'appartement de Δ de bord a_i. Les trois appartements A, A_1 et A_2 s'intersectent deux à deux suivant des demi-appartements. D'après l'axiome (A5), ils ont donc un point commun. L'appartement A est donc la réunion des deux demi-appartements $A \cap A_1$ et $A \cap A_2$. L'un des deux appartements A_1, A_2 contient un germe en x de C, donc convient. $\square$

COROLLAIRE 1.9. *Soit x un point de Δ. Pour toute facette F de Δ, il existe une unique facette F' de sommet x asymptote à F.* $\square$

COROLLAIRE 1.10. *Soient F une facette de Δ de sommet x et b un germe en x de facette dominant le germe $\Sigma_x F$ de F en x. Alors il existe une facette F' de sommet x ayant F pour facette et b pour germe en x.* □

COROLLAIRE 1.11. *On a la propriété*

(GG): *Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont dans un même appartement.* □

1.5.3. *La propriété (CO) pour les chambres de Weyl opposées en un point.* Remarquons que deux facettes de même sommet x sont opposées en x (i.e. de germes en x opposés dans un appartement les contenant) si et seulement si elles contiennent respectivement dans leur intérieur deux points y et z tels que $x \in [y, z]$. La notion de facettes opposées en leur sommet ne dépend donc que des trois premiers axiomes.

PROPOSITION 1.12. *On a la propriété*

(CO): *Il existe un unique appartement contenant deux chambres de Weyl données de sommet $x \in \Delta$, opposées en x.*

PREUVE. L'unicité est une conséquence directe de l'axiome (A2), montrons l'existence.

Soient C et D deux chambres de Weyl de même sommet x, opposées en x. D'après l'axiome (A4), il existe un appartement A contenant deux sous-chambres de Weyl respectives C' et D' de C et D. Soit $[y, z]$ un segment non trivial contenant x avec $y \in C$ et $z \in D$.

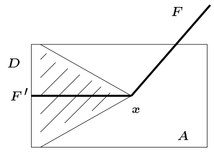
Soit $r : \mathbb{R} \longrightarrow \Delta$ tel que la restriction à $\mathbb{R}_+$ (resp. à $\mathbb{R}_-$) de r est le rayon géodésique de C (resp. de D) issu de x passant par y (resp. par z), qui rencontre nécessairement la sous-chambre de Weyl C' (resp. D') en y' (resp. z').

Montrons que le point x est sur le segment $[z', y']$, donc dans A (par l'axiome (A2)), ce qui conclut.

Soit I l'ensemble des réels t négatifs ou nuls tels que la chambre de Weyl fermée de Δ de sommet $r(t)$ asymptote à C, notée $C(t)$, contient $r([t, +\infty[)$. C'est un intervalle contenant 0. Soit $t \in I$. D'après la proposition 1.8, il existe un appartement A' contenant un germe en $r(t)$ de la sous-chambre de Weyl $D(t)$ de D de sommet $r(t)$, donc contenant $r([t - \varepsilon, t])$ avec ε strictement positif, et contenant également $C(t)$, donc $r([t, +\infty]$ car $t \in I$. Comme r minimise localement la distance, la restriction à $[t - \varepsilon, +\infty[$ de r est un rayon géodésique dans l'appartement A', passant par $r(t)$ et y. Donc son image est contenue dans $C(t - \varepsilon)$ et $t - \varepsilon \in I$.

Donc I est un intervalle ouvert de la forme $]s, 0]$ de $\mathbb{R}_-$ avec $s < 0$. Si s est fini, alors, en appliquant la proposition 1.8 à la chambre à l'infini $C(\infty)$ et au germe de chambre en $r(s)$ opposé à celui de $D(s)$, il existe ε strictement positif, qu'on peut supposer inférieur à $-s$, tel qu'il existe un appartement contenant $r(s)$ et $r(s + \varepsilon)$ (donc $r([s, s + \varepsilon])$) et $C(s + \varepsilon)$, donc $r([s + \varepsilon, +\infty[)$ car $s + \varepsilon \in I$. On a donc $s \in I$, ce qui est impossible. □

Terminons par un lemme (qui sera notamment utilisé en section 2.6) qui généralise la propriété (CO).



Lemme 1.13. *Soient A un appartement de Δ, et F une facette de Δ de sommet un point x de A. Soit F' une facette de A de sommet x opposée à F en x, et D la réunion des chambres de Weyl fermées de A de sommet x contenant F'. Il existe un unique appartement contenant D et F.*

Preuve. L'unicité est une conséquence directe de l'axiome (A2), montrons l'existence.

Soient $f' \in \mathcal{A}$ d'image A et $\mathbf{F}$ une facette de la chambre de Weyl fondamentale $\mathbf{C}$ de $\mathbb{A}$ telles que $f'(0) = x$ et $f'(\mathbf{F}) = F'$. Soient $C' = f'(\mathbf{C})$ et $B' = f'(w\mathbf{C})$ où w est le plus long élément du sous-groupe de Coxeter de $\overline{W}$ engendré par les réflexions fixant $\mathbf{F}$.

La facette F peut se prolonger en une chambre de Weyl de sommet x opposée en x à C' par le corollaire 1.10, donc il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(0) = x$, $f(\mathbf{C}) = C'$ et $f(-\mathbf{F}) = F$. Soit $B = f(w(-\mathbf{C}))$, alors l'enveloppe convexe de F' et B contient C'. Dans l'immeuble sphérique des directions en x, il existe un appartement contenant les germes de B et de B' (par (GG)), donc l'unique galerie minimale allant de $\Sigma_x F'$ à $\Sigma_x B$, qui contient le germe de C'. Les chambres de Weyl B et B' sont donc opposées en x, donc contenues dans un même appartement A' (par (CO)), qui contient l'enveloppe convexe de F' et B (par l'axiome (A2)), donc C'.

Par conséquent $A'(\infty)$ contient la réunion des galeries minimales de $C'(\infty)$ à $B'(\infty)$, qui est $D(\infty)$ (car ce sont des chambres opposées dans le complexe de Coxeter link$(F'(\infty))$ dont l'ensemble des chambres est l'ensemble $D(\infty)$ des chambres de $A(\infty)$ dominant $F'(\infty)$). On en conclut que A contient D. $\square$

1.6. L'immeuble des germes en un point et la propriété (A3'). Dans cette section, on suppose que $(\Delta, \mathcal{A})$ vérifie, en plus des axiomes (A1), (A2) et (A3), les propriétés suivantes (qui sont notamment vérifiées sous les hypothèses de la section 1.5, donc par les immeubles affines, d'après la section 1.4).

- **(GG):** Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont dans un même appartement.
- **(CO):** Deux chambres de Weyl de sommet $x \in \Delta$, opposées en x, sont dans un même appartement.

Notons que l'appartement de (CO) est nécessairement unique (par l'axiome (A2)). On montrera par la suite en sections 1.7 et 1.8 que les axiomes (A5') et (A4) sont alors vérifiés, donc que Δ est un immeuble.

La propriété (GG) entraîne la proposition suivante.

Proposition 1.14. *Le complexe simplicial $\Sigma_x\Delta$ est un immeuble sphérique modelé sur Σ^∞, appelé l'*immeuble des directions en x *de Δ. Ses appartements sont les germes des appartement de Δ passant par x.* $\square$

On a un morphisme canonique (de complexes de chambres marqués) de l'immeuble à l'infini dans l'immeuble des directions en x

$$\Sigma_x : \Delta^\infty \longrightarrow \Sigma_x\Delta$$

défini par $\Sigma_x(C(\infty)) = \Sigma_x C$ pour toute chambre de Weyl C de sommet x de Δ.

Proposition 1.15. *Soient C et C' deux chambres de Weyl de Δ de même sommet x. Il existe un appartement contenant C et un germe de C' en x.*

PREUVE. Soit A un appartement contenant des germes en x de C et C'. Soit C'' la chambre de Weyl de A de sommet x, de germe en x opposé à celui de C. Soit A' l'appartement contenant les deux chambres de Weyl C et C'' (qui sont opposées en x). Les germes en x de A et de A' sont deux appartements de l'immeuble sphérique $\Sigma_x\Delta$ qui contiennent les deux chambres opposées $\Sigma_x C$ et $\Sigma_x C''$. Ils sont donc confondus, et par conséquent A' contient un germe en x de C'. □

PROPOSITION 1.16. *On a la propriété*

(A3'): *Soient C et C' deux chambres de Weyl de Δ de sommets respectifs x et y. Alors il existe un appartement contenant un germe en x de C et un germe en y de C'.*

PREUVE. Soit $\overline{D}$ une chambre de Weyl fermée de Δ de sommet x contenant y. D'après la proposition 1.15, il existe un appartement A contenant $\overline{D}$ et un germe en x de C. Il existe une chambre de Weyl fermée $\overline{D'}$ de A de sommet y contenant un germe en x de C. En réappliquant la même proposition, on a alors un appartement A' contenant $\overline{D'}$ et un germe en y de C', qui convient. □

REMARQUE. Les germes de facettes jouent un rôle analogue pour Δ à celui des simplexes pour les immeubles combinatoires. De ce point de vue, la propriété (A3') est la transcription de l'axiome (B1) de [**Ron**].

1.7. Rétractions. Dans cette section, on suppose seulement que Δ vérifie les axiomes (A1) et (A2), que $\mathcal{A}$ est *couvrante* (i.e. que Δ est la réunion de ses appartements), et que Δ possède la propriété (A3'), qui est alors un renforcement de l'axiome (A3). Ceci est en particulier le cas sous les hypothèses de la section 1.6, donc quand Δ est un immeuble affine. On établit, suivant [**BrTi1**], l'existence de rétractions canoniques et en particulier que l'axiome (A5') est alors vérifié.

PROPOSITION 1.17. *Soient A un appartement, x un point de A et C une chambre de A de sommet x. Il existe une unique rétraction r de Δ sur A, appelée* rétraction canonique de Δ sur A de centre C, *telle que r conserve la distance en restriction à tout appartement contenant un germe en x de C. Alors r envoie une facette de sommet x isométriquement sur une facette de sommet x, et le morphisme de l'immeuble $\Sigma_x\Delta$ des directions en x induit par r est la rétraction ρ de $\Sigma_x\Delta$ sur $\Sigma_x A$ centrée en $\Sigma_x C$. De plus r diminue la distance, et conserve la distance à x (en particulier l'axiome (A5') est vérifié).*

PREUVE. Pour tout appartement A' contenant un germe de C, il existe (par l'axiome (A2)) une unique isométrie $\phi_{A'}$ de A' sur A fixant leur intersection $A \cap A'$.

Soit $y \in \Delta$. D'après la propriété (A3') et puisque $\mathcal{A}$ est couvrante, il existe un appartement A' contenant y et un germe en x de C. Alors on pose $r(y) = \phi_{A'}(y)$, qui ne dépend pas du choix de A' (contenant y et un germe en x de C).

L'application r conserve bien la distance à x, et envoie un germe de chaque chambre de Weyl de sommet x isométriquement sur un germe de chambre de Weyl de $\mathcal{A}$, donc envoie la chambre de Weyl toute entière isométriquement sur la chambre de Weyl de $\mathcal{A}$ correspondante. L'application induite sur l'immeuble des directions en x est clairement la rétraction canonique.

Il reste à voir que r diminue la distance. On utilise pour cela le lemme suivant de [**BrTi1**], dont la démonstration, incluse par souci de complétude, n'utilise que la propriété (A3').

LEMME 1.18. [**BrTi1**, Lemme 7.4.21] *Soient C une chambre de Weyl de sommet $x \in \Delta$ et y, z deux points de Δ. Le segment $[y, z]$ est inclus dans une réunion finie d'appartements contenant un germe en x de C.*

PREUVE. Pour $p \in [y, z[$ (resp. dans $]y, z]$), on considère une chambre de Weyl C_p^+ (resp. C_p^-) de sommet p contenant le segment $[p, z]$ (resp. $[p, y]$) dans son adhérence. D'après la propriété (A3'), il existe un appartement A_p^+ (resp. $\mathcal{A}_p^-$) contenant un germe en x de C et un germe en p de C_p^+ (resp. de C_p^-), donc un point p^+ (resp. p^-) du segment $]p, z]$ (resp. $]p, y]$). Soit $[y, y^+[, \ ]p_1^-, p_1^+[, \dots, \ ]p_k^-, p_k^+[, \ ]z^-, z]$ un recouvrement fini du segment $[y, z]$ extrait du recouvrement de ce segment par les segments ouverts $[y, y^+[,]z^-, z]$, et $]p^-, p^+[$ pour $p \in]y, z[$. Alors le segment $[y, z]$ est inclus dans la réunion (finie) des appartements A_y^+, $A_{p_1}^-$, $A_{p_1}^+, \dots,$ $A_{p_k}^-$, $A_{p_k}^+$, A_z^-, qui contiennent chacun un germe en x de C. □

Soient y et z deux points de Δ. D'après le lemme, la rétraction r est une isométrie en restriction à chaque sous-segment d'une subdivision finie du segment $[y, z]$. Son image est donc un chemin dans A de $r(y)$ à $r(z)$, de même longueur $d(y, z)$. La distance $d(r(y), r(z))$ est la distance dans A entre $r(y)$ et $r(z)$, donc inférieure à la longueur des chemins les joignant, donc à $d(y, z)$. □

1.8. Vérification de l'axiome (A4). On reprend les hypothèses de la section 1.6. On va montrer que l'axiome (A4) est alors vérifié. Commençons par établir la propriété suivante (déjà obtenue pour les immeubles affines en Prop. 1.8).

PROPOSITION 1.19. *Par tout germe de chambre de Weyl passe au moins un appartement contenant une sous-chambre de Weyl d'une chambre de Weyl donnée.*

PREUVE. Soient C une chambre de Weyl de Δ de sommet x et c' un germe de chambre de Weyl de sommet y. Soit A un appartement contenant C. Soient z un point de C et C_+ la sous-chambre de Weyl de C de sommet z. Considérons la rétraction canonique r de Δ sur A, centrée sur C_+ (voir Prop. 1.17). Comme r diminue la distance, l'image $r(y)$ de y par r est dans la boule B de centre x et de rayon $d(x, y)$ dans A. On peut choisir z de telle manière que la boule B soit incluse dans la chambre de Weyl ouverte C_- de A, de sommet z, opposée à C_+.

Soient A' un appartement contenant c' et un germe de C_+ en z (qui existe par la propriété (A3')), et C'_- la chambre de Weyl de A' de sommet z opposée à $\Sigma_z C_+$. Alors r envoie C'_- sur C_-. Comme $r(y) \in C_-$, on a que la chambre de Weyl ouverte C'_- contient y, donc le germe c' (car elle contient un voisinage de y dans A). Les chambres de Weyl C'_- et C_+ sont opposées en z, donc contenues dans un même appartement (par la propriété (CO)). □

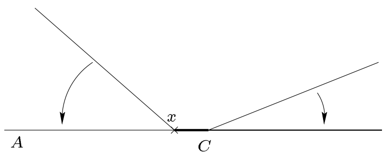
Notons que cette propriété permet de définir un autre type de rétractions canoniques.

Par définition, le *germe à l'infini* d'une chambre de Weyl C de Δ est la classe des chambres de Weyl ayant *même germe à l'infini* que C, c'est-à-dire une sous-chambre de Weyl commune avec C.

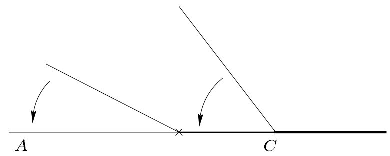
La proposition suivante se démontre de manière exactement analogue à ce qui est fait en section 1.7.

Proposition 1.20. *Soient A un appartement et C une chambre de Weyl de A. Il existe une unique rétraction r de Δ sur A, appelée* rétraction canonique de Δ sur A centrée sur le germe à l'infini de C, *telle que r conserve la distance en restriction à tout appartement contenant une sous-chambre de Weyl de C. De plus r diminue la distance.* □

Les rétractions canoniques définies dans les propositions 1.17 et 1.20 sont différentes, comme le montre par exemple le cas des arbres (voir figure 2).



Rétraction centrée en $\Sigma_x C$.



Rétraction centrée en $C(\infty)$.

Fig. 2. *Cas des arbres.*

Vérifions maintenant l'axiome (A4). Soient C et C' deux chambres de Weyl de Δ. Montrons que, quitte à passer à deux sous-chambres de Weyl, elles sont dans un même appartement.

Pour $z \in C'$, notons C_z, C'_z les chambres de Weyl de sommet z contenant des sous-chambres de Weyl respectives de C et de C' (dont l'existence est assurée par la proposition 1.19, et l'unicité par l'axiome (A2)). Notons $\delta(z)$ la longueur d'une galerie minimale allant du germe en z de C_z à celui de C'_z dans l'immeuble sphérique $\Sigma_z\Delta$ des directions en z.

Quitte à remplacer C par une chambre de Weyl de même germe à l'infini et C' par une sous-chambre de Weyl, on peut supposer qu'elles ont même sommet x et que $\delta(x)$ est maximal (car δ ne prend qu'un nombre fini de valeurs).

Soient (par la proposition 1.15) A un appartement contenant C' et un germe en x de C, et C'' la chambre de Weyl de sommet x de A opposée à $\Sigma_x C$. Par (CO), soit A' l'appartement contenant les deux chambres de Weyl C et C'' (qui sont opposées en x). L'intersection de A' et de $\overline{C'}$ est un convexe fermé de $\overline{C'}$.

Soit z un point de cette intersection. Alors les chambres de Weyl C_z et C''_z de sommet z contenant des sous-chambres de Weyl respectives de C et C'' sont dans A' par l'axiome (A2). Par hypothèse, il existe une galerie dans l'immeuble sphérique $\Sigma_z\Delta$ des directions en z allant du germe en z de C_z à celui de C'_z, de longueur inférieure ou égale à $\delta(x)$. Par ailleurs, comme C' et C'' sont dans un même appartement A, on a $\delta_z(C'_z, C''_z) = \delta_x(C', C'') = d - \delta_x(C, C') = d - \delta(x)$ où d est le diamètre combinatoire du complexe de Coxeter modèle Σ^∞. Donc $\Sigma_z C'_z$ est sur une galerie de longueur minimale de $\Sigma_z\Delta$ joignant les chambres opposées $\Sigma_z C_z$ et $\Sigma_z C''_z$, donc dans l'unique appartement de $\Sigma_z\Delta$ les contenant, qui est $\Sigma_z A'$. Donc $A' \cap \overline{C'}$ contient un germe de C'_z.

On en déduit que $A' \cap \overline{C'}$ est un convexe fermé de $\overline{C'}$ contenant x, qui est ouvert dans $\overline{C'}$, donc que la chambre de Weyl C' est incluse dans A', ce qui conclut. □

La proposition suivante résume les différentes caractérisations des immeubles affines qu'on a obtenu (la caractérisation par la propriété (A3') sera utilisée dans la partie 3).

THÉORÈME 1.21. *Soit Δ un ensemble muni d'une famille $\mathcal{A}$ d'injections de $\mathbb{A}$ dans Δ vérifiant les axiomes (A1), (A2) et (A3) de la section 1.2. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- *Δ est un immeuble affine, i.e. les axiomes (A4) et (A5') sont vérifiés.*
- *les axiomes (A4) et (A5) sont vérifiés et d vérifie l'inégalité triangulaire.*
- *L'axiome (A4) est vérifié et Δ vérifie la propriété suivante.*
  (A3'): *Deux germes de chambres de Weyl sont contenus dans un même appartement.*
- *Δ possède les propriétés suivantes.*
  (GG): *Deux germes de chambres de Weyl de même sommet sont contenus dans un même appartement.*
  (CO): *Deux chambres de Weyl de sommet $x \in \Delta$, opposées en x, sont contenues dans un même appartement.*

□

REMARQUE. Si $\mathcal{A}$ est couvrante, la propriété (A3') entraîne l'axiome (A3).

2. Décomposition et propriétés géométriques des immeubles affines.

2.1. Produits et décomposition. On dit qu'un immeuble affine $(\Delta, \mathcal{A})$ de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est *trivial* si le groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est trivial, c'est-à-dire si le groupe $\overline{W}$ est réduit à l'identité. Dans ce cas $\mathbb{A}$ n'a qu'une seule chambre de Weyl vectorielle, qui est l'espace entier, et l'axiome (A4) entraîne immédiatement que $\Delta = \mathbb{A}$ et que $\mathcal{A} = W$.

Soit $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Delta_2, \mathcal{A}_2)$ deux immeubles affines de types respectifs $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$. Le produit $\Delta_1 \times \Delta_2$ est naturellement muni d'une structure d'immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2, \overline{W}_1 \times \overline{W}_2)$ de système d'appartements $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{(f_1, f_2);\ f_i \in \mathcal{A}_i\}$. La distance canonique de Δ est alors le produit euclidien des distances canoniques des deux facteurs.

On dit qu'un immeuble est *irréductible* s'il n'est pas trivial et ne se décompose pas en produit de deux immeubles comme ci-dessus.

PROPOSITION 2.1. *Soient $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$ deux groupes de réflexions finis et $(\Delta, \mathcal{A})$ un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W}) = (\mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2, \overline{W}_1 \times \overline{W}_2)$. Il existe une unique décomposition de $(\Delta, \mathcal{A})$ en produit de deux immeubles affines $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Delta_2, \mathcal{A}_2)$ de type respectifs $(\mathbb{A}_1, \overline{W}_1)$ et $(\mathbb{A}_2, \overline{W}_2)$.*

PREUVE. Soit $i \in \{1, 2\}$. On dit que deux points x et y de Δ ont *même i-ème coordonnée* si, dans un (donc tout, car $\overline{W}$ préserve le sous-espace vectoriel $\mathbb{A}_i$) appartement marqué contenant x et y, le vecteur de x à y est orthogonal à $\mathbb{A}_i$. On note alors $x \sim_i y$. Montrons que $\sim_i$ est une relation d'équivalence. Soient x, y et z trois points de Δ tels que $x \sim_i y$ et $y \sim_i z$. Si ces trois points sont dans un même appartement, il est clair que $x \sim_i z$. Dans le cas général, par induction sur la longueur d'une subdivision finie du segment $[y, z]$ dont chaque sous-segment est dans un appartement contenant x (cf. lemme 1.18), on obtient que $x \sim_i z$.

Notons x_i la classe d'équivalence de x pour $\sim_i$. Soit Δ_i l'ensemble quotient $\Delta/_{\sim_i}$ et $p_i :\ x \mapsto x_i$ la projection canonique de Δ sur Δ_i. Soit ψ l'application canonique $x \mapsto (x_1, x_2)$ de Δ sur $\Delta_1 \times \Delta_2$. Si x et y ont mêmes coordonnées, c'est-à-dire si $x \sim_1 y$ et $x \sim_2 y$, alors le vecteur de x à y dans un appartement les contenant est orthogonal à $\mathbb{A}_1$ et à $\mathbb{A}_2$, donc nul, donc $x = y$. L'application ψ est donc injective. Soient x et y deux points de Δ et f un appartement passant par x et y. Soient $a = a_1 + a_2$ et $b = b_1 + b_2$ dans $\mathbb{A}$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Alors $\psi(f(a_1 + b_2)) = (x_1, y_2)$. L'application ψ est donc surjective. On identifie dorénavant les ensembles Δ et $\Delta_1 \times \Delta_2$ par la bijection ψ.

Si f est un appartement marqué de Δ, on note f_i l'application injective de $\mathbb{A}_i$ dans Δ_i telle que $f_i = p_i \circ f_{|\mathbb{A}_i}$. On a alors $\psi \circ f = (f_1, f_2)$.

Montrons que l'ensemble Δ_i muni du système d'appartements marqués (clairement couvrant) $\mathcal{A}_i = \{f_i,\ f \in \mathcal{A}\}$ est bien un immeuble affine de type $(\mathbb{A}_i, \overline{W}_i)$. D'après le théorème 1.21, il suffit de vérifier les axiomes (A1), (A2), (A4) et la propriété (A3').

Soit W_i le sous-groupe des isométries affines de $\mathbb{A}_i$ de partie vectorielle dans $\overline{W}_i$. Le sous-groupe W des isométries affines de $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$ de partie vectorielle dans $\overline{W} = \overline{W}_1 \times \overline{W}_2$ s'identifie au produit $W_1 \times W_2$.

L'axiome (A1) est vérifié car $\mathcal{A}$ est invariant par précomposition par le sous-groupe $W_i \times \{\mathrm{Id}\}$ de W, et on a $(f \circ w)_i = f_i \circ w_i$ pour tout f dans $\mathcal{A}$ et $w = (w_1, w_2)$ dans W.

On fixe une chambre de Weyl vectorielle $\mathbf{C}$ de $\mathbb{A}$ et les chambres de Weyl vectorielles respectives $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ de $\mathbb{A}_1$ et $\mathbb{A}_2$ telles que $\mathbf{C} = \{a_1 + a_2,\ a_i \in \mathbf{C}_i \text{ pour } i = 1, 2\}$.

Montrons que $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$ vérifie l'axiome (A2). On montre tout d'abord une partie seulement des propriétés demandées, c'est-à-dire que pour tous f et f' dans $\mathcal{A}$, le sous-ensemble $I_1 = f_1^{-1}(f_1(\mathbb{A}_1) \cap f_1'(\mathbb{A}_1))$ est une partie convexe de $\mathbb{A}_1$ et l'application ${f'}_1^{-1} \circ f_{1|I_1}$ est une isométrie de I_1 dans $\mathbb{A}_1$. Soient $a, b \in I_1$. Soient a' et b' les deux points de $\mathbb{A}_1$ tels que $f(a) \sim_1 f'(a')$ et $f(b) \sim_1 f'(b')$. Soit f'' un appartement marqué dont l'image contient les deux points $x = f(a) = f''(a)$ et $y' = f'(b') = f''(c)$ avec $c \in \mathbb{A}$. Alors le point $f''(c_1 + a_2)$ a mêmes coordonnées (y_1', x_2) que le point $y = f(b)$, donc ils sont confondus, et de même $f''(a_1 + c_2) = f'(a') = x'$. Il est alors clair que les segments $[x, y]$ et $[x', y']$ ont même longueur et même projection sur Δ_1, ce qui conclut.

Après ce préliminaire, nous pouvons montrer la propriété importante suivante.

Lemme 2.2. *Si f et f' sont deux appartements marqués quelconques de Δ, alors il existe un appartement f'' tel que $\psi \circ f'' = (f_1, f_2')$.*

On aura donc bien $\psi\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Preuve. Les deux chambres de Weyl $f(\mathbf{C})$ et $f'(\mathbf{C})$ de Δ ont, par l'axiome (A4), deux sous-chambres $f(a + \mathbf{C})$ et $f'(a + \mathbf{C})$ (avec $a \in \mathbf{C}$) dans l'image d'un même appartement marqué f_+''. En utilisant l'axiome (A2), on peut choisir f_+'' tel que $(f_+'')_1 = f_1$ en restriction à $a_1 + \mathbf{C}_1$ et $(f_+'')_2 = f_2'$ en restriction à $a_2 + \mathbf{C}_2$. On applique le même procédé à la chambre de Weyl $-\mathbf{C}$ opposée à $\mathbf{C}$ et on obtient un autre appartement marqué f_-'' tel que $(f_-'')_1 = f_1$ en restriction à $-a_1 - \mathbf{C}_1$ et $(f_-'')_2 = (f')_2$ en restriction à $-a_2 - \mathbf{C}_2$. En appliquant une dernière fois l'axiome (A4) aux deux chambres de Weyl $f_+''(a + \mathbf{C})$ et $f_-''(-a - \mathbf{C})$, on obtient un appartement marqué f'' contenant deux de leurs sous-chambres de Weyl $f_+''(a' + \mathbf{C})$ et $f_-''(-a' - \mathbf{C})$ (avec $a' \in a + \mathbf{C}$) et on peut supposer que $f'' = f_+''$ sur $a' + \mathbf{C}$. L'ensemble $I_1 = f_1^{-1}(f_1(\mathbb{A}_1) \cap f_1''(\mathbb{A}_1))$, dont on a vu précédemment que c'est une partie convexe de $\mathbb{A}_1$, contient les deux chambres de Weyl affines de direction opposées $-a_1' - \mathbf{C}_1$ et $a_1' + \mathbf{C}_1$ de $\mathbb{A}_1$, donc c'est $\mathbb{A}_1$ tout entier. On a de plus que l'application f_1'' coïncide avec l'application f_1 sur la chambre de Weyl affine

$a'_1 + \mathbf{C}_1$ de $\mathbb{A}_1$ donc l'application ${f''}_1^{-1} \circ f_1$, dont on a vu précédemment que c'est une isométrie, la fixe point par point, donc c'est l'identité. On en conclut que $f''_1 = f_1$ et, par le même raisonnement, que $f''_2 = f'_2$, comme demandé. □

On peut maintenant terminer la vérification de l'axiome (A2). Soient $f_1, f'_1 \in \mathcal{A}_1$, d'après ce qu'on vient de faire, on peut choisir des représentants f et f' dans $\mathcal{A}$ tels que $f'_2 = f_2$. Pour $a, a' \in \mathbb{A}_1$, on a alors $f_1(a) = f'_1(a')$ si et seulement si $f(a) = f'(a')$. Il est alors facile de déduire les propriétés requises des propriétés correspondantes pour f et f'.

La propriété (A3') et l'axiome (A4) sont aisément vérifiés. Soient $C_i = f_i(\mathbf{C}_i)$ et $C'_i = f'_i(\mathbf{C}_i)$, avec $f, f' \in \mathcal{A}$, deux chambres de Weyl de Δ_i. Alors par la propriété (A3') pour Δ, il existe $\varepsilon > 0$ et un appartement A'' contenant $f(\mathbf{C} \cap B(0,\varepsilon))$ et $f'(\mathbf{C} \cap B(0,\varepsilon))$. L'appartement $p_i(A'')$ de Δ_i contient donc deux germes respectifs $f_i(\mathbf{C}_i \cap B(0,\varepsilon))$ et $f'_i(\mathbf{C}_i \cap B(0,\varepsilon))$ de C_i et C'_i, ce qui conclut la vérification de la propriété (A3') pour Δ_i. Par ailleurs, par l'axiome (A4) pour Δ, il existe $a \in \mathbf{C}$ et un appartement A'' contenant les sous-chambres de Weyl $f(a + \mathbf{C})$ et $f'(a + \mathbf{C})$. L'appartement $p_i(A'')$ de Δ_i contient donc les deux sous-chambres de Weyl respectives $p_i(f(a + \mathbf{C})) = f_i(a_i + \mathbf{C}_i)$ et $f'_i(a_i + \mathbf{C}_i)$ de C_i et C'_i, ce qui conclut la vérification de l'axiome (A4) pour Δ_i.

On a donc montré l'existence de la décomposition souhaitée. L'unicité découle de la remarque suivante. Supposons que $(\Delta, \mathcal{A})$ soit le produit de deux immeubles affines $(\Delta_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Delta_2, \mathcal{A}_2)$. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux points de $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. Alors, pour $i = 1, 2$, pour la relation d'équivalence $\sim_i$ définie au début de la preuve, on a $x \sim_i y$ si et seulement si $x_i = y_i$. En effet, en prenant par exemple $i = 1$, si on prend un appartement marqué $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ contenant x et y dans son image, et un point $a = a_1 + a_2$ de $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2$, tels que $x = f(a)$, alors $x \sim_1 y$ si et seulement si y appartient à $f(a + \mathbb{A}_2) = \{f_1(a_1)\} \times f_2(a_2 + \mathbb{A}_2) = f(\mathbb{A}) \cap \{x_1\} \times \Delta_2$. Il est alors clair que la décomposition de Δ en produit de deux immeubles construite dans cette preuve est égale à la décomposition initiale. □

Corollaire 2.3. *Un immeuble affine Δ de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est irréductible si et seulement si le groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ l'est.* □

Corollaire 2.4. *Pour tout immeuble affine Δ, il existe une unique (modulo permutation des indices $\{1, \ldots, m\}$) décomposition $\Delta = \Delta_0 \times \prod_{i=1}^m \Delta_i$ de Δ en produit d'immeubles affines Δ_i, où Δ_0 est trivial et Δ_i irréductible pour $i > 1$.* □

2.2. Automorphismes et isométries.

Définition 2.5. Un *automorphisme* d'un immeuble affine Δ est une bijection $g : \Delta \longrightarrow \Delta$ tel que le système $\mathcal{A}$ des appartements marqués est invariant par composition par g, i.e. pour tout appartement marqué $f \in \mathcal{A}$, les applications $g \circ f$ et $g^{-1} \circ f$ sont dans $\mathcal{A}$.

Les différentes propriétés énoncées dans les propositions suivantes sont immédiates.

Proposition 2.6. *Soit g un automorphisme d'immeuble de Δ. Alors g est une isométrie de Δ et g conserve le type des segments.*

L'isométrie de Δ^∞ induite par g est un automorphisme d'immeuble sphérique. Si g fixe un point $x \in \Delta$, l'isométrie de $\Sigma_x\Delta$ induite par g est un automorphisme d'immeuble sphérique. □

PROPOSITION 2.7. *Soit g une isométrie de Δ conservant le type des segments. Si Δ est un immeuble trivial, alors $\Delta = \mathbb{A}$ et g est une translation de $\mathbb{A}$. Si Δ se décompose en produit $\prod_{i=0}^{k} \Delta_i$ d'immeubles affines, alors g est de la forme $(g_0, \dots, g_k)$ où g_i est une isométrie de Δ_i conservant le type des segments pour tout i. Si g est un automorphisme d'immeuble de Δ, alors g_i est un automorphisme d'immeuble de Δ_i pour tout i.* □

Nous aurons besoin en section 4 de la propriété suivante.

PROPOSITION 2.8. *Soit g une isométrie de Δ préservant les chambres de Weyl. Si $\Delta = \Delta_0 \times \Delta'$ est la décomposition canonique de Δ en produit d'un immeuble affine trivial Δ_0 et d'un immeuble affine sans facteur trivial Δ', alors g est de la forme (g_0, g') où g_0 est une isométrie de Δ_0, et g' est une isométrie de Δ' préservant les chambres de Weyl.*

PREUVE. Une chambre de Weyl de Δ de sommet $x = (x_0, x')$ est de la forme $C = \Delta_0 \times C'$ où C' est une chambre de Weyl de Δ' de sommet x'. Le facteur trivial $\Delta_0 \times \{x'\}$ est égal à l'intersection des faces de codimension 1 de C, et $\{x_0\} \times C'$ est son orthogonal en x, donc cette décomposition est préservé par g. On en déduit le résultat souhaité. □

2.3. Géométrie CAT(0)**.** Dans cette section nous rappelons quelques conséquences du fait qu'un immeuble affine est un espace métrique CAT(0). On trouvera par exemple dans [**BrHa**] les démonstrations des quelques définitions et résultats relatifs à cette notion rappelés ci-dessous.

Soient X un espace métrique géodésique et x, y, z trois points de X. Un *triangle de comparaison* euclidien est un triplet $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ de points du plan euclidien tel que $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(x, y)$ et de même par permutations de x, y, z. L'*angle de comparaison* $\widetilde{\sphericalangle}_x(y, z)$ en x entre y et z est par définition l'angle euclidien $\sphericalangle_{\overline{x}}(\overline{y}, \overline{z})$ en $\overline{x}$ entre $\overline{y}$ et $\overline{z}$.

DÉFINITION 2.9. Un espace métrique géodésique X est dit CAT(0) si ses triangles sont plus fins que les triangles euclidiens correspondants dans le sens précis suivant. Soient x, y, z trois points de X, et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ un triangle de comparaison. Alors, pour tout point p de toute géodésique entre x et y, on a $d(p, z) \leq d(\overline{p}, \overline{z})$ où $\overline{p}$ est le point du segment $[\overline{x}, \overline{y}]$ tel que $d(\overline{x}, \overline{p}) = d(x, p)$.

PROPOSITION 2.10. *(F. Bruhat-J.Tits) Un immeuble affine Δ est un espace métrique* CAT(0) *(voir par exemple* [**Pau**, Prop. 3.3]*).*

PREUVE. Soient x, y, z trois points de Δ. Soit $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ un triangle de comparaison. Soient p un point d'une géodésique entre x et y, et $\overline{p}$ le point du segment $[\overline{x}, \overline{y}]$ tel que $d(\overline{x}, \overline{p}) = d(x, p)$. Soit A un appartement contenant x et y. Soit p' le point du segment $[x, y]$ tel que $d(x, p') = d(x, p)$ et $d(y, p') = d(y, p)$. Soit r une rétraction de Δ sur A, diminuant la distance, conservant la distance à p' (cf. Prop. 1.17).

Montrons dans un premier temps que $p = p'$. On a $d(x, p) + d(p, y) = d(x, y)$ donc $d(x, r(p)) + d(r(p), y)$ est inférieur ou égal à $d(x, y)$, donc $r(p) = p'$. Par conséquent on a $p = p'$ car r conserve la distance à p'.

Les trois points x, y, $r(z)$ forment un triangle euclidien dans A avec $d(x, y) = d(\overline{x}, \overline{y})$, $d(x, r(z)) \leq d(\overline{x}, \overline{z})$ et $d(y, r(z)) \leq d(\overline{y}, \overline{z})$. On en déduit que $d(p, r(z)) \leq d(\overline{p}, \overline{z})$. Comme $d(p, z)$ est égal à $d(p, r(z))$, on a bien l'inégalité $d(p, z) \leq d(\overline{p}, \overline{z})$. □

Soit X un espace métrique CAT(0). Soient x, y, z trois points de X. Si y' et z' sont deux points respectifs des segments $[x, y]$ et $[x, z]$, alors l'angle de comparaison $\widetilde{\sphericalangle}_x(y', z')$ est inférieur à l'angle de comparaison $\widetilde{\sphericalangle}_x(y, z)$. Sa limite quand y' et z' tendent vers x est appelé *angle* en x entre y et z et notée $\sphericalangle_x(y, z)$. L'espace des classes d'équivalence de segments géodésiques issus de x formant un angle nul en x est appelé l'*espace des directions en* x de X et noté $\delta_x X$. Il est muni de la distance angulaire induite par l'angle en x. Si Δ est un immeuble affine de type vectoriel $(\mathbb{A}, \overline{W})$ essentiel, alors $\delta_x \Delta$ est la réalisation géométrique de l'immeuble sphérique combinatoire $\Sigma_x \Delta$.

L'espace des classes d'équivalence de rayons géodésiques *asymptotes* (i.e. à distance de Haussdorff finie) est appelé le *bord* de X et noté $\partial_\infty X$.

La distance d est une fonction convexe, c'est-à-dire que si σ et σ' sont deux géodésiques de X alors $d(\sigma(t), \sigma'(t))$ est une fonction convexe de t.

Si r et r' sont deux rayons géodésiques asymptotes, alors $d(r(t), r'(t))$ est une fonction décroissante de t. Par conséquent, l'énoncé suivant est un corollaire de la proposition 1.5.

Corollaire 2.11. *Soient $\overline{C}$ de sommet q et $\overline{C'}$ de sommet q' deux chambres de Weyl fermées asymptotes, alors pour tous $x \in \overline{C}$ et $x' \in \overline{C'}$ tels que les segments $[q, x]$ et $[q', x']$ sont de même type, la distance $d(x, x')$ est inférieure ou égale à la distance $d(q, q')$ entre les sommets des deux chambres de Weyl.* □

On utilisera dans la partie 4 le fait bien connu suivant.

Proposition 2.12. *Dans un espace* CAT(0) *complet, une intersection décroissante de convexes fermés bornés non vides est non vide.*

Preuve. Soit X un espace CAT(0) complet. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties convexes fermées bornées non vides de X. Soient x un point de X et y_n sa projection orthogonale sur B_n pour tout entier n (voir par exemple [**BrHa**] pour la définition et les propriétés de la projection orthogonale sur un convexe fermé non vide). On va montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente car X est supposé complet, ce qui conclut, car sa limite est dans chaque B_n, donc dans leur intersection.

La distance de x à y_n est croissante, majorée, donc convergente de limite R, qu'on peut supposer non nulle car sinon $x \in B_n$ pour tout n et on a fini. Soient ε non nul, inférieur à R et N un entier tel que pour $n \geq N$, la distance $d(x, y_n)$ est comprise entre $R - \varepsilon$ et R. Soient $p \geq n \geq N$, alors $d(y_n, y_p) \leq \sqrt{R^2 - (R - \varepsilon)^2}$, car sinon il existe un point du segment $[y_n, y_p]$ plus proche de x que y_n (comme on le voit sur un triangle de comparaison), ce qui est impossible car le segment $[y_n, y_p]$ est inclus dans le convexe fermé B_n et y_n est le point de B_n à distance minimale de x. La suite (y_n) est donc une suite de Cauchy. □

2.4. Enveloppe convexe de Weyl de deux points.

Définition 2.13. On appelle *polyèdre de Weyl* de $\mathbb{A}$ une intersection de racines affines de $\mathbb{A}$. L'*enveloppe convexe de Weyl* d'une partie B de $\mathbb{A}$, notée $\Diamond(B)$ est le polyèdre de Weyl formé par l'intersection des racines affines de $\mathbb{A}$ contenant B.

Remarque. Dans [**BrTi1**], les intersections de racines affines sont appelées des parties *closes*, et $\Diamond(B)$ est appelé *enclos* de B et noté $\mathrm{cl}(B)$.

PROPOSITION 2.14. *Soient x et y deux points de Δ et A un appartement les contenant. L'enveloppe convexe de Weyl $\Diamond(x,y)$ de $\{x,y\}$ dans A ne dépend pas du choix de l'appartement A contenant x et y. On l'appelle l'*enveloppe convexe de Weyl *de $\{x,y\}$. Elle est contenue dans tout appartement contenant x et y.*

PREUVE. Soient f un appartement marqué et $a,b \in \mathbb{A}$ tels que $f(a) = x$, $f(b) = y$ et $b - a \in \overline{\mathbf{C}}$. Soit $\mathbf{F}$ la facette vectorielle ouverte de $\mathbb{A}$ contenant $b - a$. Alors on a $\Diamond(a,b) = (a+\overline{\mathbf{F}}) \cap (b-\overline{\mathbf{F}})$. Soit f' un autre appartement marqué tel que $f'(a) = x$ et $f'(b) = y$. Alors les facettes $f(b-\mathbf{F})$ et $f'(b+\mathbf{F})$ sont de germes opposés en y car elles contiennent respectivement les extrémités $x = f'(a)$ et $z = f'(2b-a)$ d'un segment contenant y. Elles sont donc contenues dans un même appartement f'' par le lemme 1.13, avec $f''(a) = x$ et $f''(b) = y$. L'appartement marqué f'' coïncide avec f' en a et sur $b + \overline{\mathbf{F}}$, donc sur $a + \overline{\mathbf{F}}$ et avec f sur $b - \overline{\mathbf{F}}$. Donc f et f' coïncident sur $\Diamond(a,b) = (a + \overline{\mathbf{F}}) \cap (b - \overline{\mathbf{F}})$. □

2.5. Isométries préservant le type des segments.

LEMME 2.15. *Soit g une application d'une partie B de $\mathbb{A}$ dans Δ isométrique, préservant le type des segments. Alors pour tous points a, b dans B, l'application g coïncide sur (l'intersection avec B de) l'enveloppe convexe de Weyl de $\{a,b\}$ avec tout appartement marqué f tel que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.*

PREUVE. Supposons pour simplifier que le vecteur $b - a$ est dans la chambre de Weyl fermée fondamentale $\overline{\mathbf{C}}$ et soit $\mathbf{F}$ la facette vectorielle ouverte de $\overline{\mathbf{C}}$ le contenant. Soit c un point de B dans $\Diamond(a,b)$, c'est-à-dire tel que les vecteurs $c - a$ et $b - c$ sont dans $\overline{\mathbf{F}}$. Notons x, y et z les images de a, b et c par g. D'après le lemme 1.18, le segment $[y,z]$ admet une subdivision finie $y_0 = y, y_1, \ldots, y_m = z$ dont chaque sous-segment est inclus dans un appartement contenant x. On suppose m minimal.

Soit f un appartement marqué tel que $x = f(a)$, $y = f(b)$ et $y_1 = f(b_1)$ avec $b_1 \in \mathbb{A}$. On a $\Theta[y,y_1] = \lambda\Theta[y,z]$ avec $\lambda \in]0,1]$, donc le segment $[b,b_1]$ est de type $\lambda\Theta[b,c]$. De plus $\sphericalangle_b(a,b_1) = \sphericalangle_y(x,z) \leq \widetilde{\sphericalangle}_y(x,z) = \sphericalangle_b(a,c)$.

Or pour tous vecteurs u,v de $\mathbf{F}$, il n'est pas difficile de voir que v est l'unique vecteur de $\overline{W}v$ tel que $\sphericalangle(u,v)$ est minimal.

On a donc nécessairement que $b_1 - b = \lambda(c - b)$ et donc que b_1 est le point correspondant à y_1 sur le triangle de comparaison a,b,c pour le triangle x,y,z de Δ.

Si $m > 1$, en appliquant ce même raisonnement à un appartement marqué f' tel que $x = f'(a)$, $y_1 = f'(b)$ et $y_2 = f'(b_2)$ avec $b_2 \in \mathbb{A}$, on obtient que $b_2 - b_1 = \lambda_2(c - b_1)$ avec $\lambda_2 \in]0,1]$, donc que $b_2 \in \Diamond(a,b_1)$. Donc, comme f et f' coïncident sur $\Diamond(a,b_1)$, on a $f(b_2) = y_2$, ce qui contredit la minimalité de m. On a donc $m = 1$, $y_1 = z$, $\lambda = 1$ et $b_1 = c$, d'où $f(c) = z$, ce qui conclut. □

COROLLAIRE 2.16. *Une application g de $\mathbb{A}$ dans Δ est une isométrie préservant le type des segments si et seulement si g est une* limite inductive d'appartements marqués*, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec un appartement marqué sur toute partie bornée de $\mathbb{A}$.*

PREUVE. Soit B une partie bornée de $\mathbb{A}$. Il existe a et b dans $\mathbb{A}$ tels que leur enveloppe convexe de Weyl $\Diamond(a,b)$ contient B. Si g est une isométrie préservant le type des segments, elle coïncide avec un appartement marqué sur $\Diamond(a,b)$ par la proposition ci-dessus, donc sur B. □

2.6. Le système maximal d'appartements.

PROPOSITION 2.17. *Soit* $(\Delta, \mathcal{A})$ *un immeuble affine modelé sur* $(\mathbb{A}, W)$. *Il existe un unique système d'appartements* $\overline{\mathcal{A}}$ *contenant* $\mathcal{A}$ *et maximal pour l'inclusion. Il est formé de toutes les applications* g *de* $\mathbb{A}$ *dans* Δ *qui sont des isométries préservant le type des segments, ou, de manière équivalente, des limites inductives d'éléments de* $\mathcal{A}$.

PREUVE. Il est clair que tout système d'appartements contenant $\mathcal{A}$ est formé d'isométries de $\mathbb{A}$ dans Δ préservant le type des segments, donc inclus dans $\overline{\mathcal{A}}$. Montrons que $(\Delta, \overline{\mathcal{A}})$ est bien un immeuble affine. Les axiomes (A1) et (A2) et les propriétés (A3') et (GG) sont aisément vérifiés, car les éléments de $\overline{\mathcal{A}}$ sont des limites inductives d'éléments de $\mathcal{A}$, donc par définition coïncident avec un élément de $\mathcal{A}$ dans tout borné de Δ. Montrons la propriété (CO), ce qui conclut d'après le théorème 1.21.

Soient C et C' deux chambres de Weyl de $(\Delta, \overline{\mathcal{A}})$, de même sommet x, opposées en x. Soient f et f' dans $\overline{\mathcal{A}}$ tels que $C = f(a+\mathbf{C})$, $C' = f'(a-\mathbf{C})$ et $f(a) = f'(a) = x$ avec $a \in \mathbb{A}$. Soient b dans $\mathbf{C}$ et n un entier. Soit g_n dans $\mathcal{A}$ tel que $g_n(a+nb) = f(a+nb) = y_n$ et $g_n(a-nb) = f'(a-nb) = y'_n$. Comme C et C' sont opposées en x, le point x est le milieu du segment joignant y_n à y'_n, donc, par l'axiome (A2), $g_n(a) = x$. Comme f et f' sont des isométries préservant le type des segments, par le lemme 2.15, on a que g_n coïncide avec f sur $\Diamond(a, a+nb)$ et avec f' sur $\Diamond(a-nb, a)$. De plus, pour tout $p \geq n$, on a que g_n coïncide avec g_p sur $B_n = \Diamond(a-nb, a+nb)$. Toute partie bornée de $\mathbb{A}$ est incluse dans B_n pour n assez grand, donc la suite (g_n) admet une limite inductive $g \in \overline{\mathcal{A}}$ qui coïncide avec f sur $a+\mathbf{C}$ et avec f' sur $a-\mathbf{C}$, ce qui conclut. □

PROPOSITION 2.18. *Le système d'appartement est maximal si et seulement si tout rayon géodésique et toute géodésique est contenu dans un appartement.*

PREUVE. Soit $\mathcal{A}'$ un système d'appartements contenant $\mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{A}'$. Soit $v \in \mathbf{C}$. Si la géodésique $t \mapsto f(tv)$ est contenue dans l'image d'un appartement marqué g de $\mathcal{A}$, qu'on peut choisir égal à f sur $\mathbb{R}v$ par les axiomes (A1) et (A2) pour $\mathcal{A}'$, alors f et g coïncident sur $\Diamond(-tv, tv)$ pour tout t (par la proposition 2.14), donc sur $\mathbb{A}$, et $f \in \mathcal{A}$, ce qui prouve une des deux implications.

Supposons que le système d'appartements est maximal. Comme deux chambres de Weyl opposées en un point sont contenues dans un même appartement, il suffit de le montrer pour un rayon géodésique $r : [0, +\infty[\longrightarrow \Delta$. Notons $x = r(0)$, et pour tout n entier $y_n = r(n)$. Soient a dans $\mathbb{A}$ et $b = \Theta[x, y_1]$ dans une facette ouverte $\mathbf{F}$ de la chambre de Weyl fondamentale $\mathbf{C}$. Alors, pour tout n, il existe un appartement marqué f_n tel que $f_n(a+nb) = y_n$ et $f_n(a) = x$. Par le lemme 1.13, on peut même choisir f_n coïncidant avec f_1 sur $a - \mathbf{D}$, où $\mathbf{D}$ est la réunion des chambres de Weyl vectorielles fermées de $\mathbb{A}$ contenant la facette $-\mathbf{F}$.

Pour tout $p \geq n$, on a alors que f_p coïncide avec f_n sur l'enveloppe convexe B_n de $a+nb$ et $a-\mathbf{D}$ dans $\mathbb{A}$. Toute partie bornée de $\mathbb{A}$ est incluse dans B_n pour n assez grand, donc la suite (f_n) admet une limite inductive f, qui est un appartement marqué car le système d'appartements est clos par limite inductive. L'image de f contient x et y_n pour tout n, donc le rayon r. □

Rappelons que le bord $\partial\mathbb{A}$ de $\mathbb{A}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{A}$, munie de la distance angulaire (qui s'identifie au bord de $\mathbb{A}$ comme espace métrique CAT(0)), et ∂ l'application canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$ privé du vecteur nul dans $\partial\mathbb{A}$. Rappelons également que le complexe simplicial Δ^∞ est marqué par le type Θ : $\Delta^\infty \longrightarrow \Sigma^\infty_{\leq \mathbf{C}}$, où $\Sigma^\infty_{\leq \mathbf{C}}$ est l'ensemble des bords $\partial\mathbf{F}$ des facettes $\mathbf{F}$ non réduites à $\{0\}$ de la chambre de Weyl vectorielle fondamentale $\mathbf{C}$.

La *réalisation géométrique modelée sur* $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ de l'immeuble sphérique combinatoire abstrait Δ^∞ est l'ensemble $X = \{(f,x);\ f \in \Delta^\infty,\ x \in \Theta(f)\}$, muni de l'unique distance faisant des injections canoniques $\partial\mathbb{A} \longrightarrow X$ induites par les appartements de Δ^∞ des isométries.

On notera que cette réalisation géométrique est la même que la réalisation géométrique standard du complexe simplicial Δ^∞ (voir par exemple [**Ron**]) si et seulement si $(\mathbb{A}, \overline{W})$ est essentiel (n'a pas de facteur trivial). Dans le cas contraire, on prendra garde que les chambres de cette réalisation géométrique ne sont pas des simplexes sphériques, mais leur joint sphérique avec la sphère bordant le facteur trivial de $\mathbb{A}$, la réalisation géométrique elle-même étant alors le joint sphérique de cette sphère triviale et de la réalisation géométrique standard.

L'axiome (A4) et la proposition ci-dessus entraînent le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.19. *Soit* $(\Delta, \mathcal{A})$ *un immeuble affine modelé sur* $(\mathbb{A}, W)$. *Notons* $\partial_\infty\Delta$ *le bord de* Δ *comme espace métrique* CAT(0) *(voir paragraphe 2.3). La réalisation géométrique modelée sur* $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ *de l'immeuble sphérique* Δ^∞ *à l'infini de* Δ *est isométrique au sous-espace (convexe) de* $\partial_\infty\Delta$ *, formé par les extrémités des rayons contenus dans un appartement, muni de la distance induite par la distance de Tits (voir par exemple* [**BrHa**] *pour sa définition) sur* $\partial_\infty\Delta$.

Dans le cas où le système d'appartements est maximal, le bord de Δ *comme espace métrique* CAT(0) *est donc la réalisation géométrique modelée sur* $(\partial\mathbb{A}, \overline{W})$ *de l'immeuble sphérique* Δ^∞. $\square$

2.7. La définition de Kleiner-Leeb. B. Kleiner et B. Leeb ont développé dans [**KlLe**] une définition géométrique des immeubles affines complets. On donne ci-dessous leur définition, légèrement modifiée pour englober le cas non complet.

DÉFINITION 2.20. Soit Δ un espace métrique CAT(0) vérifiant la propriété suivante : de tout point est issu un rayon géodésique asymptote à un rayon donné. Soit $\mathcal{A}$ une collection invariante par précomposition par W d'isométries de $\mathbb{A}$ dans Δ appelées *cartes*, dont les images sont appelées *appartements*. On dit que $(\Delta, \mathcal{A})$ est un immeuble affine *au sens de Kleiner-Leeb* modelé sur $(\mathbb{A}, W)$ si les propriétés suivantes sont vérifiées.

(EB3): Tout segment, rayon géodésique et géodésique est contenu dans un appartement.

(EB4): Les changements de cartes sont induits par des éléments de W.

En particulier $(\Delta, \mathcal{A})$ vérifie donc les axiomes (A1),(A2) et (A3) de la section 1.2, et le type Θ des segment est bien défini (cf. paragraphe 1.3.1). On requiert pour tous x, y, z dans Δ que

(EB2) Rigidité des angles.: L'angle $\sphericalangle_x(y,z)$ est dans l'ensemble fini, noté $D(\Theta[x,y], \Theta[x,z])$, des valeurs prises par l'angle entre un vecteur de $\mathbb{A}$ de même type que le segment $[x,y]$ et un vecteur de $\mathbb{A}$ de même type que le segment $[x,z]$.

PROPOSITION 2.21. *La paire* $(\Delta, \mathcal{A})$ *est un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb si et seulement si c'est un immeuble affine au sens de Tits avec* $\mathcal{A}$ *maximal.*

Preuve. Soit $(\Delta, \mathcal{A})$ un immeuble affine, avec $\mathcal{A}$ maximal. Alors par définition de la métrique canonique d sur Δ (voir 1.2), les appartements marqués sont des isométries et Δ est alors un espace métrique CAT(0) (cf. Prop. 2.10). Montrons que de tout point y est issu un rayon géodésique asymptote à un rayon r donné. Par la proposition 2.18, le rayon r est inclus dans un appartement donc de la forme $t \mapsto f(a+tv)$ avec $f \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{A}$ et v dans une facette $\mathbf{F}$ de $\mathbf{C}$. Par le corollaire 1.9, il existe une facette de sommet y asymptote à la facette $f(a+\mathbf{F})$, donc (voir Prop. 1.5) $f' \in \mathcal{A}$ et $a' \in \mathbb{A}$ tels que la distance entre $f(a+\cdot)$ et $f'(a'+\cdot)$ est bornée sur $\mathbf{F}$. Le rayon $t \mapsto f'(a'+tv)$ est donc asymptote à r, donc convient.

Comme deux segments issus de x ont des sous-segments issus de x contenus dans un même appartement (par la propriété (GG)), l'axiome (EB2) est clair, et l'axiome (EB3) est vérifié d'après l'axiome (A3) et la proposition 2.18.

Donc Δ est bien un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb.

Si Δ est un immeuble affine au sens de Kleiner-Leeb, on a les axiomes (A1), (A2) (car les appartements sont des convexes fermés de Δ) et (A3). Si $(\Delta, \mathcal{A})$ est un immeuble affine au sens de Tits, alors $\mathcal{A}$ est nécessairement maximal d'après la proposition 2.18.

D'après le théorème 1.21, il suffit de voir que les propriétés (CO) et (GG) sont vérifiées. Cela découle des lemmes suivants de [**KlLe**], dont les démonstrations n'utilisent que les propriétés énoncées dans la définition ci-dessus.

Lemme 2.22. [**KlLe**, Lemma 4.1.2] *Deux segments issus d'un point x ont des sous-segments non triviaux issus de x bordant un triangle plat (si ces deux segments sont opposés, ce triangle est dégénéré) .* □

L'espace $\delta_x\Delta$ des directions en x de Δ comme espace métrique CAT(0) (voir section 2.3), muni de la distance angulaire $\sphericalangle_x$, est donc égal à l'espace des germes de segments issus de x. On a une application canonique $\delta_x : \Delta - \{x\} \longrightarrow \delta_x\Delta$ qui à y associe le germe du segment $\overline{xy}$.

Lemme 2.23. [**KlLe**, Lemmas 3.4.1, 3.4.2] *Si C est une chambre de Weyl ouverte de Δ de sommet x, alors son image par δ_x est un ouvert de $\delta_x\Delta$.*

Deux chambres de Weyl C et C' de même sommet x ont leurs images par δ_x disjointes ou égales . □

Notons que, comme une chambre de Weyl est l'enveloppe convexe de ses facettes de dimension 1, qui sont des rayons géodésiques, en nombre fini, deux chambres de Weyl de sommet x qui ont même image par δ_x ont même germe en x (i.e. coïncident sur un voisinage de x).

Montrons maintenant que la propriété (CO) est vérifiée. Soient C et C' deux chambres de Weyl de sommet x, opposées en x. Soit ρ une géodésique telle que $\rho(0) = x$, $\rho(\mathbb{R}^+) \subset C$ et $\rho(\mathbb{R}^-) \subset C'$. D'après (EB3), il existe un appartement A contenant ρ. D'après le lemme suivant, A contient nécessairement C et C', ce qui conclut.

Lemme 2.24. *Deux chambres de Weyl ouvertes C et C' de même sommet x, contenant un même rayon géodésique r issu de x, coïncident.*

Preuve. L'intersection $\overline{C'} \cap \overline{C}$ est convexe et fermée dans $\overline{C}$ et contient r. Pour tout y dans cette intersection, notons C_y et C'_y les sous-chambres de Weyl respectives de C et C' de sommet y et r_y le rayon de C parallèle à r issu de y, qui est inclus dans $\overline{C} \cap \overline{C'}$ par convexité. D'après le lemme 2.23 ci-dessus, les chambres de

Weyl ouvertes C_y et C'_y, qui contiennent r_y, ont même germe, donc coïncident sur un voisinage de y. Par conséquent $\overline{C'} \cap \overline{C}$ contient un voisinage de y par convexité, donc c'est un ouvert. On en conclut que $\overline{C} = \overline{C'}$. □

Montrons enfin que la propriété (GG) est vérifiée (on reprend les arguments de la démonstration de [**KlLe**, Prop. 3.5.1]). Soient C et C' deux chambres de Weyl ouvertes de sommet x, et y et z deux points respectifs de C et C'. D'après le lemme 2.22, on peut supposer que le triangle x, y, z est plat. On peut supposer que $\sphericalangle_x(y,z) < \pi$ (quitte à changer z). L'image par δ_x du segment $[y,z]$ est alors un segment géodésique σ de $\delta_x\Delta$ pour la distance angulaire $\sphericalangle_x$.

Comme le germe de chambre $\delta_x C'$ est un ouvert (par le lemme 2.23), il contient σ au voisinage de $\delta_x z$. On peut donc prolonger σ dans un germe d'appartement contenant $\delta_x C'$ en une géodésique, jusqu'à un point $\delta_x y'$ tel que $\sphericalangle_x(y,y') = \pi$. Soit A un appartement contenant le segment $[y,y']$. D'après le lemme 2.23 ci-dessus, l'appartement A contient un germe de C. Comme $\delta_x C$ est un ouvert de $\delta_x\Delta$, il contient $\delta_x z'$ pour $z' \in]y,z]$ suffisamment proche de y. Donc $\delta_x A$ contient la géodésique $\delta_x([z',y'])$ qui contient $\delta_x z$ par unicité de la géodésique entre deux points de $\delta_x\Delta$ à distance angulaire strictement inférieure à π.

Donc A contient $\delta_x C'$ par le lemme 2.23, ce qui conclut. □

On suppose désormais que le système d'appartements de Δ est maximal. La proposition suivante et le principe de sa démonstration sont extraits de [**KlLe**].

PROPOSITION 2.25. [**KlLe**, Prop. 4.6.1, Corollary 4.6.2] *Tout sous-espace E totalement géodésique, euclidien, de Δ est inclus dans un appartement. Les appartements sont donc les sous-espaces totalement géodésiques euclidiens de dimension maximale. Une isométrie de Δ envoie donc un appartement sur un appartement.*

PREUVE. Soient x un point de E et c une géodésique de E d'origine x telle que, si $u \in \overline{\mathbf{C}}$ est le type du segment $[c(0), c(1)]$, la dimension de la facette vectorielle ouverte $\mathbf{F}$ de $\mathbb{A}$ contenant u est maximale. Soit ε l'angle minimal dans $\mathbb{A}$ entre le vecteur u et la réunion des facettes vectorielles fermées de $\mathbb{A}$ de dimension inférieure ou égale à celle de $\mathbf{F}$, différentes de $\mathbf{F}$. On a $\varepsilon > 0$.

Soit A un appartement contenant c. L'intersection de A et de E est un convexe fermé dans A et dans E. Soit r un rayon de E issu de x tel que l'angle en x entre r et c est strictement inférieur à ε. Montrons que r est inclus dans A.

Supposons qu'au contraire, l'ensemble des réels positifs t tels que $r(t)$ est dans A, qui est un intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, est de la forme $[0,s]$ avec s fini (éventuellement nul). Soit c' la géodésique de E parallèle à c, issue de $r(s)$. Comme c' est incluse dans l'enveloppe convexe fermée de $r(s)$ et c dans l'espace euclidien E, elle est également incluse dans A. On en déduit que le type dans $\overline{\mathbf{C}}$ du segment $[c'(0), c'(1)]$ est u. Comme E est euclidien, l'angle en $r(s)$ entre r et c' est égal à l'angle en x entre r et c, donc strictement inférieur à ε. Les rayons r et c' sont initialement contenus dans un appartement. Il existe donc un appartement marqué f, un vecteur v unitaire de $\mathbb{A}$ et un réel strictement positif η, tels que $f(0) = r(s)$, $f(\eta u) = c'(\eta)$ et $f(\eta v) = r(s+\eta)$. Soit $\mathbf{F}'$ la facette vectorielle de $\mathbb{A}$ contenant v. Comme v est de même type dans $\overline{\mathbf{C}}$ que le segment $[r(0), r(1)]$, la dimension de $\mathbf{F}'$ est inférieure ou égale à celle de $\mathbf{F}$ d'après l'hypothèse faite sur c. Or l'angle dans $\mathbb{A}$ entre u et v est strictement inférieur à ε. On en déduit que $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, par définition de ε, donc que ηv appartient à $\mathbf{F}$. Or l'enveloppe convexe de Weyl de la droite $\mathbb{R}u$ de $\mathbb{A}$ est égale au sous-espace vectoriel engendré par $\mathbf{F}$. Par conséquent l'image de ηv par f, qui est $r(s+\eta)$, appartient à tout appartement contenant c' (par la proposition 2.14), donc dans A, ce qui est impossible.

Nous avons donc obtenu que A contient la géodésique c et le cône ouvert de E de sommet x, centré sur le rayon $c(\mathbb{R}_+)$ et d'angle $\varepsilon > 0$, donc A contient E tout entier par convexité. $\square$

Rappelons qu'un immeuble combinatoire est dit *épais* si chacune de ses facettes de codimension 1 borde au moins 3 chambres distinctes.

Une géodésique de Δ est dite *régulière* (resp. *singulière*) si son type de direction est dans l'intérieur (resp. dans le bord) de la chambre de Weyl vectorielle fermée fondamentale $\overline{\mathbf{C}}$ de $\mathbb{A}$. Une géodésique régulière est contenue dans un unique appartement de Δ (cela résulte de la proposition 2.14). Si Δ^∞ est épais, la réciproque est vraie, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.26. *L'immeuble sphérique à l'infini Δ^∞ est épais si et seulement si les géodésiques régulières sont exactement celles qui sont contenues dans un unique appartement de Δ.*

Preuve. Si toute géodésique singulière est contenue dans au moins deux appartements distincts de Δ, alors tout mur de Δ^∞ est contenu dans au moins deux appartements distincts de Δ^∞, donc borde au moins 3 demi-appartements distincts, ce qui entraîne que Δ^∞ est épais.

Réciproquement, supposons l'immeuble sphérique à l'infini Δ^∞ épais. Toute géodésique singulière r est contenue dans un mur M de Δ contenu dans un appartement A. Le bord à l'infini $M(\infty)$ de M est un mur de l'immeuble sphérique épais Δ^∞, donc il existe un demi-appartement à l'infini h bordé par $M(\infty)$ non inclus dans l'appartement à l'infini $A(\infty)$. Soient a_1 et a_2 les deux demi-appartements de $A(\infty)$ bordés par $M(\infty)$. Pour $i = 1, 2$, soit A_i l'appartement de Δ de bord à l'infini l'appartement $a_i \cup h$ de Δ^∞. L'axiome (A5) entraîne que l'un des deux appartements A_1, A_2 (distincts de A) contient le mur M, donc la géodésique r. $\square$

Proposition 2.27. *Supposons l'immeuble sphérique à l'infini Δ^∞ épais. Alors toute isométrie de Δ préserve les chambres de Weyl.*

Preuve. Soit g une isométrie de Δ. D'après la proposition 2.25, l'image d'un appartement par g est un appartement. Par conséquent, comme Δ^∞ est épais, la proposition 2.26 entraîne que g préserve les géodésiques singulières.

Soit A un appartement de Δ. Les chambres de Weyl de A de sommet un point x donné sont les composantes connexes du complémentaire dans A de la réunion des géodésiques singulières de A passant par x. On en déduit que l'image par g d'une chambre de Weyl de A est une chambre de Weyl de l'appartement $g(A)$. $\square$

3. Construction de l'immeuble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

La lettre $\mathbb{F}$ désigne un corps muni d'une valuation $v : \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On note $|.| = \exp(-v(.))$ la valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{F}$ associée à v et Λ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ formé par les valeurs prises par la valuation. Le corps $\mathbb{F}$ est muni de la topologie induite par la valeur absolue. On note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{F}$, défini par $\mathcal{O} = \{a \in \mathbb{F},\ |a| \leq 1\}$. On note V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ de dimension finie n, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{F}$. On note $\mathbb{P}V$ l'espace projectif de V. On note Σ_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

3.1. Normes ultramétriques. Dans cette section, après avoir donné les définitions de base autour des normes ultramétriques, nous montrerons quelques résultats techniques sur ces normes qui serviront à vérifier les axiomes pour l'immeuble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Définition 3.1. On dit qu'une application $\eta : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une *norme ultramétrique* sur V si elle vérifie

- $\eta(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.
- $\eta(av) = |a|\,\eta(v)$ pour tous $a \in \mathbb{F}$ et $v \in V$.
- $\eta(u+v) \leq \max(\eta(u), \eta(v))$ pour tous $u, v \in V$.

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes ultramétriques sur V. On définit un ordre partiel sur les normes ultramétriques par

$$\eta \leq \eta' \text{ si et seulement si } \eta(v) \leq \eta'(v) \text{ pour tous } v \in V.$$

Le groupe $G = \mathrm{GL}(V)$ agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des normes ultramétriques par précomposition, avec $g.\eta = \eta \circ g^{-1}$ pour tout g dans G et pour toute norme ultramétrique η.

Soit $\mathcal{F} = (V_1, \ldots, V_m)$ une *décomposition* de V, c'est-à-dire une suite de sous-espaces vectoriels non nuls de V telle que $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$. On dit qu'une norme ultramétrique η est *adaptée* à la décomposition $\mathcal{F}$ de V si $\eta(v_1 + \cdots + v_m) = \sup_{i=1\ldots m} \eta(v_i)$ pour tous $v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m$. Dans ce cas η est bien sûr également adaptée à toute permutation de la décomposition $\mathcal{F}$, et pour toute norme ultramétrique η', on a alors $\eta' \leq \eta$ si et seulement si $\eta' \leq \eta$ en restriction à chaque V_i pour tout entier i compris entre 1 et m. Si η_i est une norme ultramétrique sur V_i pour $i = 1, \ldots, n$, alors il existe une unique norme ultramétrique η sur V adaptée à la décomposition $\mathcal{F}$ coïncidant avec η_i sur V_i pour tout entier i compris entre 1 et m.

Si $m = n$, alors $\mathcal{F}$ est un simplexe de $\mathbb{P}V$ (n points en position générale) et on dit que $\mathcal{F}$ est une *croix* de V. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Si $\mathcal{F} = (\mathbb{F}e_1, \ldots, \mathbb{F}e_n)$, on dit que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est la croix *associée* à $\mathcal{E}$. On dit que la base $\mathcal{E}$ est *adaptée* à une norme ultramétrique η si la croix associée à $\mathcal{E}$ l'est, c'est-à-dire quand pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ on a

$$\eta(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sup_{i=1\ldots n} |a_i|\,\eta(e_i).$$

Pour toute norme ultramétrique η', on a alors $\eta' \leq \eta$ si et seulement si

$$\eta'(e_i) \leq \eta(e_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

On dit qu'une norme ultramétrique η est *adaptable* s'il existe une base de V adaptée à η. Dans le cas où le corps $\mathbb{F}$ est localement compact, toutes les normes ultramétriques sont adaptables (voir [**GoIw**]).

Remarque. Le vocabulaire utilisé est légèrement différent de celui de [**BrTi2**]. Les normes de [**BrTi2**] correspondent aux logarithmes de nos normes ultramétriques, et nos termes “adaptée”, “adaptable” correspondent aux termes “scindée”, “scindable” de [**BrTi2**].

Lemme 3.2. *Soient η une norme ultramétrique adaptable, et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V adaptée à η. Soit $g \in G$ de matrice $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dans la base $\mathcal{E}$. Alors* *on a*

$$|g_{ij}| \leq \frac{\eta(ge_j)}{\eta(e_i)} \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \tag{1}$$

et

$$|\det g| \prod_{i=1}^{n} \eta(e_i) \leq \prod_{j=1}^{n} \eta(ge_j). \tag{2}$$

Preuve. Comme η admet $e_1,\dots,e_n$ pour base adaptée, on a

$$\eta(ge_j) = \eta(\sum_{i=1}^{n} g_{ij}e_i) = \sup_{i=1\dots n} |g_{ij}|\,\eta(e_i) \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\}$$

d'où (1). Alors pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_n$, on a

$$\prod_{j=1}^{n} \left|g_{\sigma(j)j}\right| \leq \frac{\prod_{j=1}^{n}\eta(ge_j)}{\prod_{i=1}^{n}\eta(e_i)}$$

d'où (2), car $\det g = \sum\limits_{\sigma\in\Sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod\limits_{j=1}^{n} g_{\sigma(j)j}$ et donc

$$|\det g| \leq \sup_{\sigma\in\Sigma_n} \prod_{j=1}^{n} \left|g_{\sigma(j)j}\right| \leq \frac{\prod_{j=1}^{n}\eta(ge_j)}{\prod_{i=1}^{n}\eta(e_i)}. \tag{3}$$

□

Corollaire 3.3 (Changement de base adaptée.). *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de V et $g \in G$ tel que $g\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Alors il existe une permutation σ dans Σ_n telle que pour toute norme ultramétrique η adaptée à la fois à $\mathcal{E}$ et à $\mathcal{E}'$ on a*

$$\prod_{i=1}^{n} \eta(e_i') = |\det g| \prod_{i=1}^{n} \eta(e_i) \tag{4}$$

et

$$\eta(e_j') = \left|g_{\sigma(j)j}\right| \eta(e_{\sigma(j)}) \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}. \tag{5}$$

Preuve. Soit η une norme ultramétrique adaptée à $\mathcal{E}$ et à $\mathcal{E}'$. On applique le lemme 3.2 à $\mathcal{E}$ et g puis à $\mathcal{E}'$ et g^{-1}, et on obtient (4). Par conséquent, les inégalités de (3) sont des égalités, en particulier on a $|\det g| = \sup\limits_{\sigma\in\Sigma_n} \left|\Pi_j g_{\sigma(j)j}\right|$, et il existe donc une permutation σ telle que

$$\prod_{j=1}^{n} \left|g_{\sigma(j)j}\right| = |\det g| = \prod_{j=1}^{n} \frac{\eta(e_j')}{\eta(e_{\sigma(j)})} \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\}.$$

Or d'après (1), on a $\left|g_{\sigma(j)j}\right| \leq \frac{\eta(e_j')}{\eta(e_{\sigma(j)})}$ pour tout j, d'où l'égalité pour chaque j, c'est-à-dire (5). □

Corollaire 3.4 (Stabilisateur d'une norme ultramétrique). *Soit η une norme ultramétrique adaptée à une base $\mathcal{E}$ de V. Un élément g de G fixe η si et seulement si*

$$\max\left\{|g_{ij}|, \left|g^{ij}\right|\right\} \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)} \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

ou, de manière équivalente

$$|\det g| = 1 \text{ et } |g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)} \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$$

où (g_{ij}) *et* (g^{ij}) *sont les matrices respectivement de* g *et de* g^{-1} *dans la base* $\mathcal{E}$*.*

Preuve. Comme $\mathcal{E}$ est adaptée à η, on a $\eta \leq g.\eta$ si et seulement si $g^{-1}.\eta \leq \eta$ si et seulement si $\eta(ge_j) \leq \eta(e_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n. Or $\eta(ge_j) = \sup_{i=1\dots n} |g_{ij}|\,\eta(e_i)$ pour tout entier j compris entre 1 et n, donc $\eta \leq g.\eta$ si et seulement si

$$|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)} \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

De plus, si g conserve η, alors $|\det g| = 1$ d'après (4) appliqué à $\mathcal{E}' = g\mathcal{E}$. Enfin, supposons que $|\det g| = 1$ et que pour tous i,j on a $|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$. Soient i et j deux entiers compris entre 1 et n. Alors, comme g^{ij} est égal, au signe près, au déterminant de la matrice extraite de la matrice $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ obtenue en supprimant la ligne j et la colonne i, on a $\left|g^{ij}\right| \leq \frac{\prod_{k\neq i}\eta(e_k)}{\prod_{k\neq j}\eta(e_k)} = \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$. □

3.2. Définition de l'immeuble de $\mathrm{GL}(V)$**.** On dira que deux normes ultramétriques η et η' sont *homothétiques* s'il existe un réel strictement positif r tel que $\eta' = r\eta$. On appelle *classe (d'homothétie)* de η et on note $[\eta]$ l'ensemble des normes ultramétriques homothétiques à η.

Normalisation : On fixe un déterminant det sur V^n (i.e. une forme n-linéaire alternée non nulle sur V). Remarquons que pour toute base $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ de V, la base $\left(\frac{1}{\det \mathcal{E}}e_1,\dots,e_n\right)$ est de déterminant 1. Soit η une norme ultramétrique adaptable. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base adaptée à η, de déterminant 1. D'après l'égalité (4) du corollaire 3.3, la quantité

$$\mathrm{vol}(\eta) = \textstyle\prod_{i=1}^n \eta(e_i)$$

qu'on appellera le *volume* de η, est indépendante du choix de la base $(e_1,\dots,e_n)$ de déterminant 1 adaptée à η (car la matrice de passage d'une telle base à une autre est de déterminant 1). On a $\mathrm{vol}(r\eta) = r^n\mathrm{vol}(\eta)$ pour tout réel strictement positif r. Donc pour toute norme ultramétrique adaptable η, il existe une unique norme ultramétrique homothétique à η de volume 1. On a également $\mathrm{vol}(g.\eta) = |\det g|^{-1}\,\mathrm{vol}(\eta)$ pour tout $g \in G$.

3.2.1. *Points et action de* G*.* On considère l'ensemble Δ des classes d'homothétie des normes ultramétriques adaptables sur V, qu'on peut représenter par l'ensemble des normes ultramétriques adaptables de volume 1.

On appelle norme ultramétrique *associée* à une base $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ de V, et on note $\eta_{\mathcal{E}}$, l'unique norme ultramétrique sur V adaptée à la base $\mathcal{E}$ et valant 1 sur $\mathcal{E}$ (i.e. on a $\eta_{\mathcal{E}}(\sum_{i=1}^n a_ie_i) = \sup_{i=1\cdots n}|a_i|$ pour tous $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$). Remarquons que ces normes ultramétriques sont exactement les normes ultramétriques adaptables à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de la valeur absolue sur le corps de base $\mathbb{F}$. Les classes d'homothéties de ces normes ultramétriques sont appelées *sommets* de Δ. Si la valuation n'est pas surjective, il existe des points dans Δ qui ne sont pas des sommets.

L'action naturelle du groupe $G = \mathrm{GL}(V)$ sur l'ensemble des normes ultramétriques induit une action de G sur l'ensemble Δ. Le centre $Z(G) = \{a\mathrm{Id},\ a \in \mathbb{F}^*\}$ de G

agit trivialement sur Δ, donc l'action se factorise à travers la projection canonique $p : G \longrightarrow \mathbb{P}G = \mathrm{PGL}(V) = G/Z(G)$.

On a $g.\eta_{\mathcal{E}} = \eta_{g\mathcal{E}}$ pour tout g dans G. Le groupe G agit donc transitivement sur l'ensemble des sommets de Δ (car transitivement sur les bases de V).

Un élément g de G de déterminant de valeur absolue 1 fixe un point $[\eta]$ de Δ si et seulement s'il fixe la norme ultramétrique η (car g conserve le volume des normes ultramétriques) ou, de manière équivalente, si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ on a $|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$, où $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$ (cf. Corollaire 3.4). En particulier, l'élément g fixe le sommet $[\eta_{\mathcal{E}}]$ associée à la base $\mathcal{E}$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. Si un élément g de G, de déterminant quelconque, fixe le sommet $[\eta_{\mathcal{E}}]$, alors il existe a dans $\mathbb{F}^*$ tel que $\eta_{\mathcal{E}} \circ g^{-1} = |a|\, \eta_{\mathcal{E}}$ (car $\eta_{\mathcal{E}}$ est à valeurs dans l'ensemble des valeurs possibles de la valeur absolue sur $\mathbb{F}$). On a alors que ag conserve $\eta_{\mathcal{E}}$, donc ag appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. On a donc que $\mathrm{Stab}_{\mathbb{P}G}[\eta_{\mathcal{E}}] = \mathrm{PGL}_n(\mathcal{O})$

3.2.2. *Appartements.* Soit η une norme ultramétrique adaptée à une croix $\mathcal{F} = (V_1, \ldots, V_n)$. On considère l'application $\phi_{\eta,\mathcal{F}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans l'ensemble des normes ultramétriques qui à un n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ associe l'unique norme ultramétrique η' adaptée à la croix $\mathcal{F}$ telle que $\eta' = e^{-\alpha_i}\eta$ sur V_i pour $i = 1 \ldots n$. L'application $\phi_{\eta,\mathcal{F}}$ est injective et passe au quotient en une application injective $f_{[\eta],\mathcal{F}}$ de $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}(1,\ldots,1)}$ dans Δ, ne dépendant que de la classe de η, appelée *appartement marqué* passant par $x = [\eta]$ associé à la croix $\mathcal{F}$. L'image de $f_{[\eta],\mathcal{F}}$ dans Δ est l'ensemble des classes des normes ultramétriques adaptées à $\mathcal{F}$. Elle est appelée *appartement* associé à la croix $\mathcal{F}$ et notée $A_{\mathcal{F}}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des appartements marqués.

Pour tout élément g de G, on a $g.f_{[\eta],\mathcal{F}} = f_{[g.\eta],g\mathcal{F}}$ donc G conserve le système d'appartements marqués et agit transitivement sur les appartements (non marqués) (car G agit transitivement sur les croix de V). Si g permute les sous-espaces vectoriels d'une croix $\mathcal{F}$, alors g stabilise l'appartement associé.

Si $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, on note $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = (\mathbb{F}e_1, \ldots, \mathbb{F}e_n)$ la croix associée à $\mathcal{E}$. On note $\phi_{\mathcal{E}} = \phi_{\eta_{\mathcal{E}},\mathcal{F}_{\mathcal{E}}}$ et $f_{\mathcal{E}}$ l'appartement marqué $f_{\eta_{\mathcal{E}},\mathcal{F}_{\mathcal{E}}}$ induit, dit associé à $\mathcal{E}$. Notons que si $a \in G$ a pour matrice dans la base $\mathcal{E}$ la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$, alors $a.\eta_{\mathcal{E}} = \phi_{\mathcal{E}}(\log|a_1|, \ldots, \log|a_n|)$. On a $g.f_{\mathcal{E}} = f_{g\mathcal{E}}$ pour tout g dans G, donc G agit transitivement sur les appartements marqués associés aux bases de V (qui sont exactement les appartements marqués passant en l'origine par les sommets de Δ).

Les sommets de Δ qui sont dans l'appartement associé à une croix $\mathcal{F}$ sont exactement les images par l'appartement marqué associé à une base $\mathcal{E}$ de la croix $\mathcal{F}$ des points de $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}(1,\ldots,1)}$ provenant de Λ^n, où Λ est le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ formé par les valeurs prises par la valuation de $\mathbb{F}$. Si la valuation est discrète (resp. dense), l'ensemble des sommets est discret dans chaque appartement (resp. dense). Si elle est surjective, alors tout point de Δ est un sommet, et en particulier G agit alors transitivement sur Δ.

3.2.3. *Points fixes dans un appartement.*

Proposition 3.5. *Soit g un élément de G tel que $|\det g| = 1$. Soit $\mathcal{E}$ une base de V. L'ensemble des points fixes de g dans l'appartement associé à $\mathcal{E}$ est l'image par $f_{\mathcal{E}}$ du polyèdre de Weyl de $\mathbb{A}$ suivant,*

$$\{\alpha \in \mathbb{A} |\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ \alpha_j - \alpha_i \leq v(g_{ij})\} \tag{6}$$

où $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$.

PREUVE. Soit $\alpha \in \mathbb{A}$. On a $g.f_{\mathcal{E}}(\alpha) = f_{\mathcal{E}}(\alpha)$ si et seulement si $g.\phi_{\mathcal{E}}(\alpha) = \phi_{\mathcal{E}}(\alpha)$ (car g conserve le volume des normes ultramétriques) si et seulement si

$$\alpha_j - \alpha_i \leq v(g_{ij}) \qquad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

d'après le corollaire 3.4. □

On peut en déduire en particulier qu'un élément g de G de déterminant 1 fixe l'appartement associé à une croix $\mathcal{F}$ de V point par point si et seulement si la matrice de g dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ est diagonale.

Comme une partie de $\mathbb{A}$ de la forme $\{\alpha \in \mathbb{A} |\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ \alpha_j - \alpha_i \leq \lambda_{ij}\}$, non vide, avec λ_{ij} dans $\Lambda = v(\mathbb{F}^*)$ ou $\lambda_{ij} = +\infty$, contient nécessairement un élément de $[\Lambda^n]$, nous pouvons déduire de cette proposition qu'un élément (et même un sous-groupe de type fini) de G de déterminant de valeur absolue 1 qui fixe un point fixe nécessairement aussi un sommet, et, dans une base de V, sa matrice appartient donc à $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.

3.2.4. *La structure modèle.* L'espace $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}(1,\dots,1)}$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel euclidien. On l'identifiera à l'orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ de la droite $\mathbb{R}(1, \dots, 1)$, c'est-à-dire le sous-espace formé des $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\sum \alpha_i = 0$. Les restrictions à $\mathbb{A}$ des permutations de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ forment un sous-groupe fini d'isométries vectorielles de $\mathbb{A}$, qui est engendré par des réflexions (les restrictions des transpositions). On le note $\overline{W}$, il est irréductible. Soit W le groupe de toutes les isométries affines de $\mathbb{A}$ de partie vectorielle dans $\overline{W}$.

Nous allons montrer que la paire $(\Delta, \mathcal{A})$ vérifie les axiomes (A1), (A2) et (A4) de la section 1.2 et la propriété (A3') définie en section 1.6, avec $(\mathbb{A}, W)$ comme ci-dessus. D'après le théorème 1.21, l'ensemble Δ, muni du système d'appartements marqués $\mathcal{A}$ (qui est clairement couvrant), est alors un immeuble affine modelé sur $(\mathbb{A}, W)$.

REMARQUE. En se restreignant aux appartements marqués associés à une base, on peut prendre plus précisément le groupe W engendré par $\overline{W}$ et le sous-groupe des translations de $\mathbb{A}$ de vecteur dans $\Lambda^n/_{\mathbb{R}(1,\dots,1)}$.

3.3. Vérification de l'axiome (A1). Montrons que le système d'appartements marqués $\mathcal{A}$ est invariant par précomposition par W. Ceci découle du lemme suivant.

LEMME 3.6. *Soit η une norme ultramétrique sur V adaptée à une croix $\mathcal{F} = (V_1, \dots, V_n)$. Soit w un élément de W.*

Si w est une translation de $\mathbb{A}$ de vecteur α, alors l'application $f_{[\eta],\mathcal{F}} \circ w$ est l'appartement marqué passant en l'origine par $f_{[\eta],\mathcal{F}}(\alpha)$ associé à la croix $\mathcal{F}$.

Si w fixe 0, alors l'application $f_{[\eta],\mathcal{F}} \circ w$ est l'appartement marqué passant par $[\eta]$ associé à la croix $\mathcal{F}' = \sigma\mathcal{F} = \big(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(n)}\big)$ obtenue par permutation de la croix $\mathcal{F}$, où σ est la permutation de $\{1, \dots, n\}$ telle que $w : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \big(\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)}\big)$.

PREUVE. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans $\mathbb{A}$. On note ν la norme ultramétrique $\phi_{\eta,\mathcal{F}}(w(\lambda))$, qui est adaptée à $\mathcal{F}$.

Dans le premier cas $w(\lambda) = \lambda + \alpha$ et on note η' la norme $\phi_{\eta,\mathcal{F}}(\alpha)$. Pour tout i, en restriction à V_i on a

$$\nu = e^{-(\lambda_i + \alpha_i)}\eta = e^{-\lambda_i}e^{-\alpha_i}\eta = e^{-\lambda_i}\eta' = \phi_{\eta',\mathcal{F}}(\lambda).$$

Donc les normes ultramétriques ν et $\phi_{\eta',\mathcal{F}}(\lambda)$, égales en restriction à chaque sous-espace V_i d'une croix adaptée commune $\mathcal{F}$, sont égales.

Dans le deuxième cas, pour tout i, en restriction à $V_{\sigma(i)}$, on a

$$\nu = e^{-w(\lambda)_{\sigma(i)}}\eta = e^{-\lambda_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}}\eta = e^{-\lambda_i}\eta = \phi_{\eta,\mathcal{F}'}(\lambda).$$

La norme ultramétrique ν étant adaptée à $\mathcal{F}'$, car adaptée à $\mathcal{F}$, les normes ultramétriques ν et $\phi_{\eta,\mathcal{F}'}(\lambda)$, égales en restriction à chaque sous-espace d'une croix adaptée commune $\mathcal{F}'$, sont égales. □

3.4. Vérification de l'axiome (A2). Montrons que $(\Delta, \mathcal{A})$ vérifie l'axiome (A2). Soient f et f' deux appartements marqués dont les images ont au moins un point commun. On considère l'ensemble $I = f'^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A}))$. Montrons que I est un polyèdre de Weyl de $\mathbb{A}$, donc en particulier un convexe fermé, et que $f^{-1} \circ f'_{|I}$ est la restriction d'un élément de W.

Quitte à précomposer f et f' par des éléments de W, on peut supposer que $f = f_{\mathcal{E}}$ et $f' = f_{\mathcal{E}'}$ où $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de V. Soit $g \in G$ tel que $g\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. D'après le corollaire 3.3, il existe une permutation σ telle que pour toute norme ultramétrique η adaptée à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, on a pour tout j

$$\eta(e'_j) = \left|g_{\sigma(j)j}\right| \eta(e_{\sigma(j)}).$$

Quitte à permuter les éléments de $\mathcal{E}'$ et à diviser e_i par g_{ii} (ce qui revient à précomposer f et f' par des éléments de W), on peut supposer que $\sigma = \mathrm{Id}$ et que $g_{ii} = 1$ pour tout i. Soit η une norme ultramétrique adaptée à $\mathcal{E}$. Alors η est adaptée à $\mathcal{E}'$ si et seulement si $g.\eta = \eta$. En effet, si η est adaptée à $\mathcal{E}'$, i.e. si $g^{-1}.\eta$ est adaptée à $\mathcal{E}$, alors comme $g^{-1}.\eta(e_j) = \eta(e_j)$ pour tout j, les normes ultramétriques $g^{-1}.\eta$ et η, adaptées à une même base et coïncidant sur les vecteurs de cette base, sont égales.

Donc $f(I) = f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A})$ est exactement l'ensemble des classes des normes ultramétriques adaptées à $\mathcal{E}$ et fixées par g. En utilisant (6) appliqué à $f = f_{\mathcal{E}}$, on en déduit que I est un polyèdre de Weyl de $\mathbb{A}$. On a $f'^{-1} \circ f_{|I} = f^{-1}g^{-1}f_{|I} = \mathrm{Id}$, car g vaut l'identité sur $f(I)$.

Ceci conclut la vérification de l'axiome (A2). □

3.5. Vérification de l'axiome (A4). Par définition, une chambre de Weyl de Δ de sommet x est l'image par un appartement marqué $f_{[\eta],\mathcal{F}}$ avec $[\eta] = x$ d'une chambre de Weyl vectorielle de $\mathbb{A}$, qu'on peut supposer être $\mathbb{A}^+ = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{A} |\ \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n\}$. On notera cette chambre de Weyl $C_{[\eta],\mathcal{F}}$. On notera $C_{\mathcal{E}}$ la chambre de Weyl $f_{\mathcal{E}}(\mathbb{A}^+)$, dite associée à la base $\mathcal{E}$. On a $g(C_{\mathcal{E}}) = C_{g\mathcal{E}}$ pour tout g de G, donc G agit transitivement sur les chambres de Weyl de la forme $C_{\mathcal{E}}$, qui sont exactement les chambres de Weyl de Δ de sommet un sommet. Il est facile de déduire de la proposition 3.5 la proposition suivante.

PROPOSITION 3.7 (Fixateur d'une chambre de Weyl). *Un élément g de déterminant de valeur absolue 1 de G fixe point par point la chambre de Weyl $C_{[\eta],\mathcal{F}}$ si et seulement si la matrice de g dans une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ est triangulaire supérieure et vérifie de plus $|g_{ij}| \leq \frac{\eta(e_j)}{\eta(e_i)}$ pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$.*

En particulier, si $\eta = \eta_{\mathcal{E}}$, l'élément g fixe point par point la chambre de Weyl $C_{\mathcal{E}}$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est triangulaire supérieure, à cœfficients de valeur absolue inférieur ou égale à 1. □

Un *drapeau* de V est une suite croissante de sous-espaces vectoriels. On note $D(\mathcal{F})$ le drapeau $\{0\} \subset V_1 \subset V_1 \oplus V_2 \subset \cdots \subset V_1 \oplus \ldots \oplus V_m = V$ de V *associé* à une décomposition $\mathcal{F} = V_1, \ldots, V_m$ de V.

PROPOSITION 3.8. *Deux chambres de Weyl $C_{x,\mathcal{F}}$ et $C_{x',\mathcal{F}'}$ de Δ ont une sous-chambre de Weyl commune si et seulement si les deux croix $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont même drapeau associé.*

PREUVE. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux croix de V, et x et x' deux points dans leurs appartements associés respectifs. On choisit une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{F}$ et une base $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathcal{F}'$. Soient $g \in G$ tel que $\mathcal{E}' = g\mathcal{E}$ et $P = (g_{ij})$ sa matrice dans la base $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont même drapeau associé, alors P est triangulaire supérieure et, quitte à diviser e'_i par g_{ii}, on peut supposer que $g_{ii} = 1$ pour tout i. Soit $b = g_{ij}$ un cœfficient de valeur absolue maximale. On a

$$b^{-j}e'_j = \sum_i g_{ij} b^{i-j} b^{-i} e_i$$

avec

$$\left|g_{ij} b^{i-j}\right| \leq |b| \, |b|^{i-j} \leq 1 \text{ pour tout } i < j.$$

Donc, quitte à diviser e'_j et e_j par b^j pour tout j, on peut supposer de plus que P est à cœfficients de valeur absolue inférieure ou égale à 1. On a alors que g (qui est de déterminant 1 car à cœfficients diagonaux égaux à 1) fixe la chambre de Weyl $C_{[\eta\varepsilon],\mathcal{F}}$ point par point (voir proposition 3.7), or $gC_{[\eta\varepsilon],\mathcal{F}} = C_{[g\eta\varepsilon],g\mathcal{F}}$ donc $C_{[\eta\varepsilon],\mathcal{F}} = C_{[\eta\varepsilon],\mathcal{F}'}$. Les chambres de Weyl $C_{x,\mathcal{F}}$ et $C_{x',\mathcal{F}'}$ contiennent respectivement les chambres de Weyl $C_{x,\mathcal{F}} \cap C_{[\eta\varepsilon],\mathcal{F}}$ et $C_{x',\mathcal{F}'} \cap C_{[\eta\varepsilon],\mathcal{F}'}$, qui sont incluses dans une même chambre de Weyl, donc ont une sous-chambre de Weyl commune.

Réciproquement, si les chambres de Weyl $C_{x,\mathcal{F}}$ et $C_{x',\mathcal{F}'}$ ont une sous-chambre de Weyl commune, montrons que les drapeaux associés aux croix $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont égaux. Quitte à passer à une sous-chambre et à changer de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, on peut supposer que $x = x' = [\eta\varepsilon]$ et $C_{x,\mathcal{F}} = C_{x,\mathcal{F}'}$ donc que $f_{\mathcal{E}} = f_{\mathcal{E}'} = g \circ f_{\mathcal{E}}$ en restriction à $\mathbb{A}^+$. D'après la proposition 3.7, la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$ est alors triangulaire supérieure, donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$ ont même drapeau associé. □

Montrons maintenant (A4) : Soient $C = C_{[\eta],\mathcal{F}}$ et $C' = C_{[\eta'],\mathcal{F}'}$ deux chambres de Weyl. Considérons les drapeaux maximaux D et D' associés à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

Il est bien connu (voir par exemple [**Bro**, IV.2 exercise 2]) que pour tous drapeaux maximaux D et D' de V, il existe une croix $\mathcal{F}''$ de V et une permutation σ (dite permutation de Jordan-Hölder) telles que D est le drapeau maximal associé à la croix $\mathcal{F}''$ et D' celui associé à la croix $\sigma\mathcal{F}''$. D'après la proposition 3.8, il en résulte que C (resp. C') a une sous-chambre de Weyl commune avec $C_{x'',\mathcal{F}''}$ (resp. avec $C_{x'',\sigma\mathcal{F}''}$), avec $x'' \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}''}$ quelconque. Ces deux sous-chambres de Weyl sont incluses dans un même appartement, car $A_{\mathcal{F}''} = A_{\sigma\mathcal{F}''}$. □

3.6. Vérification de la propriété (A3'). On notera $c_{[\eta],\mathcal{F}}$ le germe en x de la chambre de Weyl $C_{[\eta],\mathcal{F}}$. Le stabilisateur G_c du germe c en x d'une chambre de Weyl C de sommet x est l'ensemble des éléments g de G qui envoient C sur une chambre de Weyl de même germe en x. Il est inclus dans le stabilisateur G_x de x.

Notons G'_α le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ formé des matrices (g_{ij}) telles que

$$|g_{ij}| \, e^{\alpha_j - \alpha_i} \leq 1 \text{ pour } i \leq j \text{ et } |g_{ij}| \, e^{\alpha_j - \alpha_i} < 1 \text{ pour } i > j.$$

LEMME 3.9 (Stabilisateur d'un germe de chambre). *Soient η une norme ultramétrique adaptable et $\mathcal{F}$ une croix adaptée à η. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{F}$. Soit $\alpha_i = \log \eta(e_i)$ pour tout i et $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{A}$. Alors un élément g de G de déterminant de valeur absolue 1 stabilise le germe $c_{[\eta],\mathcal{F}}$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ appartient au sous-groupe G'_α.*

PREUVE. Il est facile de voir que $C_{[\eta],\mathcal{F}} = f_{\mathcal{E}}(\alpha + \mathbb{A}^+)$. Donc l'élément g de G stabilise $c_{[\eta],\mathcal{F}}$ si et seulement si g fixe les images par $f_{\mathcal{E}}$ de α et d'un point $\alpha + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{A}^+$. D'après la proposition 3.5, l'ensemble des points fixes de g dans $A_{\mathcal{F}}$ est l'image par $f_{\mathcal{E}}$ du polyèdre de Weyl

$$I = \{\lambda \in \mathbb{A};\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_j - \lambda_i \le v(g_{ij})\}.$$

Celui-ci contient α si et seulement si $v(g_{ij}) + \alpha_i - \alpha_j \ge 0$ pour tous i, j. Dans ce cas, s'il contient $\alpha + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{A}^+$ alors $v(g_{ij}) + \alpha_i - \alpha_j \ge \beta_j - \beta_i > 0$ pour $i > j$, et réciproquement, si $\varepsilon = \min_{i>j} v(g_{ij}) + \alpha_i - \alpha_j > 0$, alors en prenant par exemple $\beta = \frac{1}{n}(n\varepsilon, \dots, \varepsilon)$ on a bien $\alpha + \beta \in I$. □

On établit maintenant un analogue de la décomposition de Bruhat (c.f. [**BrTi1**, Thm. 7.3.4]).

PROPOSITION 3.10. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = G'_\alpha T G'_\beta$, où T est le sous-groupe des matrices monomiales (ayant un seul cœfficient non nul par ligne et par colonne).*

PREUVE. Soit $g = (g_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. On veut se ramener à une matrice monomiale par des opérations de pivot sur les lignes et les colonnes correspondant à la multiplication à gauche par des éléments de G'_α et à droite par des éléments de G'_β. On peut donc

- ajouter à la ligne k de g, notée L_k, la ligne i multipliée par a_{ki}, à condition que $|a_{ki}| \le e^{\alpha_k - \alpha_i}$, et même que $|a_{ki}| < e^{\alpha_k - \alpha_i}$ si $k > i$.
- ajouter à la colonne l de g, notée C_l, la colonne j multipliée par b_{jl}, à condition que $|b_{jl}| \le e^{\beta_j - \beta_l}$, et même que $|b_{jl}| < e^{\beta_j - \beta_l}$ si $j > l$.

Posons $m_{ij} = e^{\beta_j - \alpha_i} |g_{ij}|$ pour $1 \le i, j \le n$. Soit $m = \max_{k,l} m_{kl}$. Soit i le plus grand des entiers k tels qu'il existe l avec $m_{kl} = m$ et j le plus petit des entiers l tels que $m_{il} = m$.

Pour tout $k \neq i$, on ajoute la ligne L_i multipliée par $a_{ki} = -\frac{g_{kj}}{g_{ij}}$ à la ligne L_k (on a g_{ij} non nul car m_{ij} est maximal, donc non nul). On a bien

$$|a_{ki}| = \frac{|g_{kj}|}{|g_{ij}|} \le e^{\alpha_k - \alpha_i},$$

car

$$e^{\beta_j - \alpha_k} |g_{kj}| = m_{kj} \le m = m_{ij} = e^{\beta_j - \alpha_i} |g_{ij}|,$$

l'inégalité étant stricte si $k > i$. La nouvelle matrice a un seul cœfficient non nul sur la colonne j qui est g_{ij}.

De même, pour tout $l \neq j$, on ajoute la colonne C_j multipliée par $b_{jl} = -\frac{g_{il}}{g_{ij}}$ à la colonne C_l. On a bien

$$|b_{jl}| = \frac{|g_{il}|}{|g_{ij}|} \le e^{\beta_j - \beta_l},$$

car

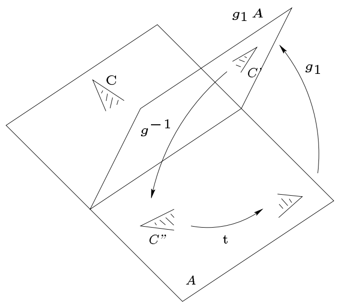
$$e^{\beta_l - \alpha_i} |g_{il}| = m_{il} \le m = m_{ij} = e^{\beta_j - \alpha_i} |g_{ij}|,$$

l'inégalité étant stricte si $l < j$. La nouvelle matrice a un seul cœfficient non nul sur la ligne i et sur la colonne j (qui n'a pas bougé), qui est g_{ij}.

On reprend toutes ces opérations en supprimant la ligne i et la colonne j. $\square$

COROLLAIRE 3.11 (**A3'**). *Deux germes de chambre de Weyl de Δ sont contenus dans un même appartement.*

PREUVE. Soient $C = C_{[\eta],\mathcal{F}}$ et $C' = C_{[\eta'],\mathcal{F}'}$ deux chambres de Weyl. Soit $g \in G$ tel que $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$. Alors $\eta'' = g^{-1}.\eta'$ est adaptée à $\mathcal{F}$ et $C'' = g^{-1}C' = C_{[\eta''],\mathcal{F}}$. Soient $\mathcal{E}$ une base de $\mathcal{F}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ tels que $\eta = f_{\mathcal{E}}(\alpha)$ et $\eta'' = f_{\mathcal{E}}(\beta)$.
D'après la proposition 3.10, on a $g = g_1 t g_2$ où les matrices de g_1, g_2 et t dans $\mathcal{E}$ sont respectivement dans G'_α, G'_β et T, donc g_1 stabilise le germe de la chambre de Weyl C, et g_2 celui de C'', et t stabilise l'appartement A associé à $\mathcal{F}$. Alors l'appartement g_1A contient la chambre de Weyl g_1C de même germe que C et, comme $g_1A = g_1tA = gg_2^{-1}A$, il contient aussi la chambre de Weyl $gg_2^{-1}C''$ de même germe en $g.[\eta''] = [\eta']$ que $gC'' = C'$. $\square$



On a donc montré que $(\Delta, \mathcal{A})$ est un immeuble affine. Son immeuble à l'infini est bien l'immeuble sphérique associé à $\mathrm{GL}(V)$, dont l'ensemble des chambres est l'ensemble des drapeaux maximaux de V. En effet, la proposition 3.8 permet de vérifier que ses chambres à l'infini correspondent aux drapeaux maximaux de V, et on vérifie facilement (dans un appartement) que les relations d'adjacence correspondent.

3.7. Distance et complété. Dans ce paragraphe, on assimile Δ à l'ensemble des normes ultramétriques sur V qui sont adaptables et de volume 1, inclus dans l'ensemble $\mathcal{N}$ de toutes les normes ultramétriques sur V. Notons d_Δ la distance dans l'immeuble affine Δ définie comme en section 1.2.

Notons d_∞ la distance *uniforme* sur $\mathcal{N}$, définie par $d_\infty(\eta, \eta') = \sup_{v \in V^*} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(v)\right|$ pour tous $\eta, \eta' \in \mathcal{N}$ (c'est la distance considérée dans [**GoIw**]).

PROPOSITION 3.12. *La distance d_Δ est équivalente à la distance sur Δ induite par d_∞. Plus précisément, en restriction à Δ, on a*

$$d_\infty \leq d_\Delta \leq \sqrt{n}\, d_\infty.$$

PREUVE. Soient η et η' deux normes ultramétriques dans Δ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base adaptée commune. Vérifions tout d'abord que

$$d_\infty(\eta, \eta') = \sup_{i=1\cdots n} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(e_i)\right|. \tag{7}$$

En effet, pour tous $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{F}$, on a $\eta'\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sup_{i=1\cdots n} |a_i|\, \eta'(e_i)$, qui est inférieur ou égal à $\left(\sup_{i=1\cdots n} \frac{\eta'(e_i)}{\eta(e_i)}\right) \times \left(\sup_{i=1\cdots n} |a_i|\, \eta(e_i)\right)$. Or $\sup_{i=1\cdots n} |a_i|\, \eta(e_i) = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right)$, donc $\sup_{v \in V^*} \log \frac{\eta'}{\eta}(v) \leq \sup_{i=1\cdots n} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(e_i)\right|$, et, en échangeant η et η', on obtient $d_\infty(\eta,\eta') \leq \sup\limits_{i=1\cdots n} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(e_i)\right|$, ce qui donne le résultat désiré car l'autre inégalité est évidente.

Par ailleurs, on a

$$d_\Delta(\eta,\eta') = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(e_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

donc

$$\sup_{i=1\cdots n} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(e_i)\right| \leq d_\Delta(\eta,\eta') \leq \sqrt{n}\ \sup_{i=1\cdots n} \left|\log \frac{\eta'}{\eta}(e_i)\right|,$$

ce qui conclut. □

Or l'espace $\mathcal{N}$ des normes ultramétriques sur V est complet pour la distance uniforme, donc l'adhérence $\overline{\Delta}$ dans $\mathcal{N}$ de Δ est le complété de Δ.

Soit $\eta \in \mathcal{N}$. Notons N_η la norme d'endomorphisme sur $G = \mathrm{GL}(V)$ associée à la norme η, définie par $N_\eta(g) = \sup_{v\in V^*} \frac{\eta(gv)}{\eta(v)}$ pour tout g dans G. Si η est la norme ultramétrique associée à une base $\mathcal{E}$ de V, alors on note $N_\mathcal{E} = N_{\eta_\mathcal{E}}$ la norme d'endomorphisme associée à $\mathcal{E}$, et on a $N_\mathcal{E}(g) = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |g_{ij}|$ pour tout g dans G, où $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$.

Corollaire 3.13. *Soient $\eta \in \overline{\Delta}$ et g dans G de déterminant de valeur absolue 1. On a*

$$\max\left(\log N_\eta(g),\ \log N_\eta(g^{-1})\right) \leq d_\Delta(\eta, g.\eta) \leq \sqrt{n}\ \max\left(\log N_\eta(g),\ \log N_\eta(g^{-1})\right).$$

Preuve. On a $d_\infty(\eta, g.\eta) = \sup\limits_{v\in V^*} \max\left(\log \frac{\eta\circ g^{-1}}{\eta}(v),\ \log \frac{\eta\circ g}{\eta}(g^{-1}v)\right)$ donc

$$d_\infty(\eta, g.\eta) = \max\left(\log N_\eta(g^{-1}),\ \log N_\eta(g)\right), \tag{9}$$

et l'encadrement souhaité se déduit alors immédiatement de la proposition 3.12 ci-dessus. □

On en déduit qu'un sous-groupe de G à éléments de déterminant de valeur absolue 1 est borné (pour toute norme $N_\mathcal{E}$ associée à une base E) si et seulement s'il est à orbites bornées dans $\overline{\Delta}$.

4. Classification des isométries.

4.1. Énoncés. Rappelons (voir par exemple [**BrHa**]) que si X est un espace métrique CAT(0) et g une isométrie de X, on appelle *longueur minimale de translation* de g et on note $\ell(g)$ le réel positif ou nul $\ell(g) = \inf_{x\in X} d(x, gx)$. La fonction $d_g : x \in \Delta \mapsto d(x, gx)$ est convexe. On appelle *ensemble de déplacement minimal* de g et on note $\mathrm{Min}(g)$ le convexe fermé (éventuellement vide) formé des points x de X tels que $d(x, gx) = \ell(g)$. On dit que g est *semi-simple* si $\mathrm{Min}(g)$ est non vide. Dans ce cas, g fixe un point si $\ell(g) = 0$ ou translate une géodésique si $\ell(g) > 0$.

Soit $(\mathbb{A}, \overline{W})$ un groupe de réflexions fini. Soit ψ une isométrie d'une chambre de Weyl vectorielle fermée $\overline{\mathbf{C}}$ de $\mathbb{A}$ dans une autre chambre de Weyl vectorielle de $\mathbb{A}$. Soit $J \subset \overline{\mathbf{C}}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\overline{\mathbf{C}}$ orthogonaux à tout vecteur de $\overline{\mathbf{C}}$ fixé par ψ. On remarquera que si ψ ne fixe pas de vecteur non nul, alors $J = \partial\overline{\mathbf{C}}$ tout entier. Notons que si $\overline{W}$ est irréductible, alors J est non vide si et seulement si ψ ne fixe pas de vecteur non nul, car $\overline{\mathbf{C}}$ est alors un cône sur un simplexe sphérique de diamètre strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ (cela découle par exemple de [**Bou**, Chap. V, §3, Lemme 6 et Prop. 7]), donc ne contient pas deux vecteurs non nuls orthogonaux, et J est alors égal à $\partial\overline{\mathbf{C}}$ tout entier.

Supposons que J est non vide (cette hypothèse est notamment vérifiée, par la remarque précédente, pour $\psi = -\mathrm{Id}$, qui ne fixe pas de vecteur non nul). L'angle entre un vecteur u de J et son image par ψ est une fonction continue sur J compact, non nulle, donc son minimum $\alpha_0(\psi)$ est non nul. On note $\alpha_0(\overline{W})$ le minimum de $\alpha_0(\psi)$ pour ψ comme ci-dessus (avec J non vide). Si $\overline{W}$ est essentiel, les chambres de Weyl vectorielles de $\mathbb{A}$, qui sont en nombre fini, sont des cônes simpliciaux, donc il n'y a qu'un nombre fini d'isométries ψ d'une chambre de Weyl vectorielle de $\mathbb{A}$ dans une autre chambre de Weyl vectorielle de $\mathbb{A}$, et par conséquent $\alpha_0(\overline{W})$ est non nul.

Par exemple, si $\mathbb{A}$ est de dimension 1, et $\overline{W} = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$, alors on a clairement $\alpha_0(\overline{W}) = \pi$. Si $\mathbb{A}$ est de dimension 2, et $\overline{W}$ est engendré par deux réflexions par rapport à deux droites formant un angle de $\frac{\pi}{p}$, avec p entier au moins égal à 2, alors il est facile de voir que $\alpha_0(\overline{W}) = \frac{\pi}{p}$.

Dans cette section, on démontre le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit $(\mathbb{A}, \overline{W})$ un groupe de réflexions fini essentiel, et $\alpha_0 = \alpha_0(\overline{W})$. Soit Δ un immeuble affine de type $(\mathbb{A}, \overline{W})$. Soit g une isométrie de Δ préservant les chambres de Weyl. Alors g induit une isométrie semi-simple du complété $\overline{\Delta}$ de l'espace métrique Δ, plus précisément, pour tout point p de Δ, il existe, à distance inférieure ou égale à $\frac{d(p,gp)+\ell(g)}{2\sin(\alpha_0/2)} \leq \frac{1}{\sin(\alpha_0/2)} d(p, gp)$ de p, soit un point de $\overline{\Delta}$ fixé par g, soit une géodésique de $\overline{\Delta}$ translatée par g.*

Corollaire 4.2. *Soit Δ est un immeuble affine complet. Alors toute isométrie de Δ préservant les chambres de Weyl est semi-simple, i.e. fixe un point ou translate une géodésique.*

Remarque 4.3. Tout automorphisme d'un immeuble affine préserve les chambres de Weyl, ainsi que (quitte à prendre le système d'appartements maximal, ce qui ne change rien aux résultats étudiés ici) toute isométrie préservant le type des segments.

Si l'immeuble sphérique à l'infini de Δ est épais, alors (pour le système d'appartements maximal) toute isométrie de Δ préserve les chambres de Weyl (cf. Prop 2.27).

Preuve de 4.2. Le groupe de réflexions fini $(\mathbb{A}, \overline{W})$ se décompose en produit d'un groupe de réflexions fini trivial $(\mathbb{A}_0, \overline{W}_0 = \{\mathrm{Id}\})$ et d'un groupe de réflexions fini essentiel $(\mathbb{A}', \overline{W}')$. L'immeuble affine complet Δ se décompose parallèlement (voir le corollaire 2.4) en produit d'un immeuble affine Δ_0 trivial et d'un immeuble affine complet Δ' de type $(\mathbb{A}', \overline{W}')$. Une isométrie g de Δ préservant les chambres de Weyl est alors de forme (g_0, g') où g_0 est une isométrie de Δ_0, et g' est une isométrie de Δ' préservant les chambres de Weyl (voir Prop. 2.8). On a $\mathrm{Min}_\Delta(g) = \mathrm{Min}_{\Delta_0}(g_0) \times \mathrm{Min}_{\Delta'}(g')$. D'après le théorème 4.1 appliqué à Δ' et g', l'ensemble minimal $\mathrm{Min}_{\Delta'}(g')$ de g' est non vide. D'autre part, une isométrie d'un espace euclidien est semisimple, donc $\mathrm{Min}_{\Delta_0}(g_0)$ est non vide. On en conclut que $\mathrm{Min}_\Delta(g)$ est non vide. □

4.2. Démonstration du théorème 4.1. Soit g une isométrie Δ conservant les chambres de Weyl. Soit $p \in \Delta$. Supposons que p n'appartient pas à $\mathrm{Min}(g)$. Soit

a un réel tel que $\ell(g) < a < d(p, gp)$. Alors le convexe fermé non vide $B = \{x \in \Delta / \ d(x, gx) \leq a\}$ ne contient pas p.

Soit A un appartement passant par p, rencontrant B. L'intersection de B et de A est un convexe fermé non vide de A. Soit q la projection orthogonale de p sur $B \cap A$ (dans l'espace euclidien A). Soit $\overline{C}$ une chambre de Weyl fermée de A de sommet q, contenant p (voir la figure 3).

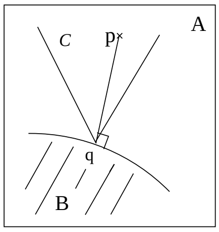
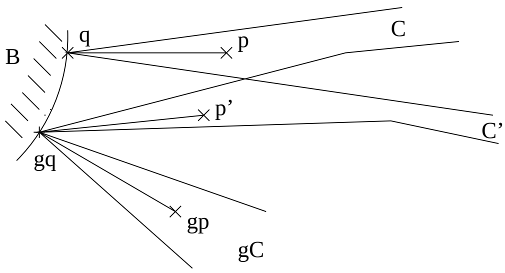


FIG. 3.

Notons $\overline{C'}$ l'unique chambre de Weyl fermée de sommet gq asymptote à $\overline{C}$ et ϕ l'unique isométrie envoyant $\overline{C}$ sur $\overline{C'}$ en préservant le type des segments. Soit p' le point de $\overline{C'}$ tel que $p' = \phi(p)$. Comme $\overline{C}$ et $\overline{C'}$ sont asymptotes, on a alors $d(p, p') \leq d(q, gq) \leq a$ d'après le corollaire 2.11. D'où $d(p', gp) \leq d(p, gp) + a$ par inégalité triangulaire. Soit $\alpha = \sphericalangle_{gq}(p', gp)$. Alors $2d(q, p) \sin \frac{\alpha}{2} \leq d(p', gp)$ par les propriétés CAT(0).

Si $\alpha \geq \alpha_0$, ce que nous allons montrer ci-dessous, on a $\sin \frac{\alpha}{2} \geq \sin \frac{\alpha_0}{2}$, car α et α_0 sont dans $[0, \pi]$ et la fonction sinus est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc pour tout $a > \ell(g)$ on a alors

$$d(p, B) \leq \frac{d(p, gp) + a}{2 \sin{(\alpha_0/2)}}$$



Montrons que $\alpha \geq \alpha_0$. Il existe, par la propriété (GG) (voir prop. 1.11), un appartement A' passant par gq contenant des des germes en gq des chambres de Weyl $g\overline{C}$ et $\overline{C'}$ (voir la figure 4). On identifie A' à $\mathbb{A}$ par un appartement marqué f avec $f(0) = gq$. Soient u le vecteur unitaire de $\mathbb{A}$ tel que $f(\varepsilon u))$ est sur le segment joignant gq à p', pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et ψ l'isométrie induite par $g \circ \phi^{-1}$ de la chambre de Weyl vectorielle $\overline{\mathbf{C}}$ de $\mathbb{A}$ correspondant au germe de $\overline{C'}$, dans la chambre de Weyl vectorielle de $\mathbb{A}$ correspondant au germe de $g\overline{C}$. Soit v un vecteur de $\mathbb{A}$ fixé par ψ, montrons que v est orthogonal à u.

En effet, si v est non nul (sinon il est clairement orthogonal à u), quitte à multiplier v par $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $x' = f(v)$ est dans $\overline{C'}$ et si x est le point

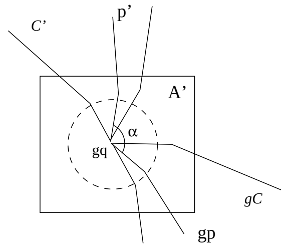


FIG. 4.

de $\overline{C}$ tel que $\phi(x) = x'$, on a $gx = x'$. Or, comme les chambres de Weyl $\overline{C}$ et $\overline{C'}$ sont asymptotes et les segments $[q, x]$ et $[gq, x']$ de même type, on a $d(x, x') \leq d(q, gq) \leq a$ par le corollaire 2.11, donc $d(x, gx) \leq a$ et $x \in B$. On a donc $\sphericalangle_q(x, p) \geq \frac{\pi}{2}$ par les propriétés de la projection orthogonale dans l'appartement A. Rappelons que, pour un groupe de réflexions fini essentiel, une chambre de Weyl est un cône sur un simplexe sphérique de diamètre inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (voir [**Bou**, Chap. V, §3, Lemme 6 et Prop. 7]). Donc $\sphericalangle_q(x, p) = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\sphericalangle_{gq}(x', p') = \frac{\pi}{2}$, donc v est orthogonal à u. On en déduit que u appartient à l'ensemble J des vecteurs unitaires de $\overline{\mathbf{C}}$ orthogonaux à tout vecteur de $\overline{\mathbf{C}}$ fixé par ψ.

L'angle $\alpha = \sphericalangle_{gq}(p', gp)$ est égal à l'angle dans $\mathbb{A}$ entre le vecteur u et son image par ψ, donc il est supérieur ou égal à α_0 par définition de α_0.

Le complété $\overline{\Delta}$ de Δ est CAT(0) pour la métrique induite, et g s'étend naturellement en une isométrie de $\overline{\Delta}$ et on a $\inf_{x\in\overline{\Delta}} d(x, gx) = \ell(g)$. Si on note $\overline{B}_g(a) = \{x \in \overline{\Delta} /\ d(x, gx) \leq a\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, la famille $\{\overline{B}_g(a);\ a > \ell(g)\}$ est une famille décroissante de convexes fermés non vides de $\overline{\Delta}$, d'intersection l'ensemble $\mathrm{Min}_{\overline{\Delta}}(g) = \{x \in \overline{\Delta} /\ d(x, gx) = \ell(g))$.

Dans un espace CAT(0) complet, une intersection décroissante de convexes fermés bornés non vides est non vide (voir la proposition 2.12).

Or on vient de montrer que pour tout $a > \ell(g)$, la distance de p à $\overline{B}_g(a)$ est inférieure à $\frac{d(p,gp)+a}{2\sin(\alpha_0/2)}$ (car $\overline{B}_g(a)$ contient B). Qui plus est, comme pour $a' \leq a$, on a $\overline{B}_g(a') \subset \overline{B}_g(a)$, la distance de p à $\overline{B}_g(a)$ est inférieure à celle de p à $\overline{B}_g(a')$, donc, en prenant la borne inférieure sur a',

$$d(p, \overline{B}_g(a)) \leq \frac{d(p, gp) + \ell(g)}{2\sin(\alpha_0/2)}.$$

Alors pour tout $a > \ell(g)$, l'intersection de $\overline{B}_g(a)$ avec la boule fermée de centre p et de rayon $\frac{d(p,gp)+\ell(g)}{2\sin(\alpha_0/2)}$, qui est un convexe fermé borné de $\overline{\Delta}$, est non vide. Donc l'intersection de cette famille décroissante de convexes fermés bornés est non vide et

$$d(p, \mathrm{Min}_{\overline{\Delta}}(g)) \leq \frac{d(p, gp) + \ell(g)}{2\sin(\alpha_0/2)}. \qquad \square$$

Références

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4 à 6, Hermann, Paris, 1971.

[Bri] M.R. Bridson, *On the semisimplicity of polyhedral isometries*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2143-2146.

[BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.

[Bro] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, 1989.

[BrTi1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[BrTi2] F. Bruhat, J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. Fr. **112** (1984), 259-301.

[CaKe] D. Carter, G. Keller, *Elementary expressions for unimodular matrices*, Comm. Alg. **12** (1984), 379-389.

[Ger] P. Gérardin, *Immeubles des groupes linéaires généraux.* Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980), Lect. Notes in Math. **880**, Springer (1981), 138–178.

[GoIw] O. Goldman, N. Iwahori, *The space of p-adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137-177.

[KlLe] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), 115-197.

[LMR] A. Lubotzky, S. Mozes, Raghunathan, *The word and Riemannian metric on lattices of semisimple Lie groups*, preprint.

[MoSh] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, Ann. of Math. **122** (1985), 398-476.

[Pau] F. Paulin, *De la géométrie et la dynamique des groupes discrets*, Mémoire d'habilitation, ENS Lyon (Juin 1995).

[Ron] M.A. Ronan, *Lectures on buildings*, Persp. Math. **7**, Academic Press, 1989.

[Rou] G. Rousseau, *Exercices métriques immobiliers*, Prépublication, Univ. Nancy (1999).

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).

[Ste] T. Steger, *Local fields and buildings*, Contemp. Math. **206**, Amer. Math. Soc. (1997), 79-107.

[Tit] J. Tits, *Immeubles de type affine*, dans "Buildings and the geometry of diagrams", Proc. CIME Como 1984, L. Rosati ed., Lect. Notes **1181**, Springer Verlag (1986), 159-190.

Laboratoire de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail address: Anne.Parreau@math.u-psud.fr