Exercice 1. Algorithme d'Euclide pour les entiers. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le plus petit commun diviseur (PGCD) de 1430 et 1105 et deux entiers u et v satisfaisant l'identité de Bezout,

$$PGCD(1430, 1105) = 1430\, u + 1105\, v\ .$$

Combien d'itérations sont-elles nécessaires ?

Exercice 2. Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Montrer que les polynômes $R_0(X) = X^3+X^2+1$ et $R_1(X) = X^2-1$ sont premiers entre eux. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide des polynômes U et V tels que $UR_0 + VR_1 = 1$.

Exercice 3. Primitive/séries entières.

1. Soit $P(X) = X^2-1$ et $Q(X) = X+2$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux et déterminer des polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.
2. Montrer que $P(X)$ et $P'(X)$ sont premiers entre eux et déterminer des polynômes W et Z tels que $WP + ZP' = 1$.
3. Déduire des questions 1. et 2. la décomposition en éléments simples de
$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2(x+2)}$$
4. Déterminer une primitive de f.
5. Déterminer le développement en série entière en 0 de $f(x)$.

Exercice 4. Calcul approché des racines d'un polynôme. Peut-on appliquer la méthode de Newton pour déterminer des valeurs approchées des racines des polynômes suivants ?

1. $R(X) = X^2 + 10^{-8}$
2. $P_\lambda(X) = X^3 - 3X + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $Q(X) = X^3$.

Si oui, donner pour chaque racine un domaine de valeurs initiales u_0 telles que la suite itérée de Newton $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la racine cherchée (pour P_λ, discuter les différents cas de figure suivant les valeurs de λ).

Exercice 5. Racine complexe Soit $P = x^3 + x + 1$ et $r = \frac{1}{3} + \frac{7}{6}i$. Déterminer un disque du plan complexe de centre r contenant au moins une racine de P. Améliorer la précision en effectuant une itération de la méthode de Newton. Discuter les avantages/inconvénients à utiliser des rationnels vs des nombres flottants approchés. Que peut-on dire des autres racines de P ?

Exercice 6. Racines multiples Soit $P = x^6+5x^5+6x^4+x^3+6x^2+5x+1$. En utilisant le pgcd de P et sa dérivée, déterminer un polynôme ayant les mêmes racines que P mais toutes de multiplicité 1. Appliquer la méthode de Newton pour trouver les racines réelles de P.

Exercice 7. Algorithme de Sturm. Déterminer à l'aide de l'algorithme de Sturm le nombre de racines réelles de $P(X) = X^3 - 3X$ dans les intervalles suivants : $I_1 = [-2, -1]$, $I_2 = [-1, 1]$ et $I_3 = [1, 2]$.

Exercice 8. Systèmes d'équations non linéaires

1. Soit P et Q deux polynômes. Montrer que le système

$$\begin{cases} P(x) & = 0 \\ Q(x) & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

est équivalent à $PGCD(P,Q)(x) = 0$. En déduire que (1) admet une solution si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Dans ce cas, comment sont reliés le nombre de solutions et le degré de $PGCD(P,Q)$?

2. Soit $P(X) = X^3 + \gamma$ et $Q(X) = X^2 + \alpha$ avec α et $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\alpha^3 + \gamma^2 \neq 0$.
Indication : utiliser l'identité de Bezout $PGCD(P,Q) = UP + VQ$ avec $U(X) = aX + b$ et $V(X) = cX^2 + dX + e$, puis écrire un système linéaire à 5 équations pour a, b, c, d et e.

3. En déduire que (1) admet une solution (dans $\mathbb{C}$) si et seulement si $\alpha^3 + \gamma^2 = 0$. Déterminer dans ce cas les solutions.

Exercice 9. Polynômes d'interpolation : formes de Lagrange et de Newton. Soit $M_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, des points de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. On pose

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ .$$

1. Montrer que le polynôme de degré n défini par

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(X) \tag{2}$$

satisfait

$$P_n(x_i) = y_i \ \text{ pour tout } i = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n satisfaisant (3). Un tel polynôme est appelé le *polynôme interpolateur* de $(M_0, \cdots M_n)$.

3. On cherche à présent P_n sous la forme :

$$P_n(X) = y_0 + y_{0,1}(X - x_0) + y_{0,1,2}(X - x_0)(X - x_1) + \cdots + y_{0,1,\cdots,n} \prod_{j=0}^{n-1}(X - x_j) \ , \tag{4}$$

où les constantes $y_{0,1}, y_{0,1,2}, \cdots, y_{0,1,\cdots,n}$ sont à déterminer. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$y_{0,1,\cdots,n} = \frac{y_{1,2\cdots,n} - y_{0,1,\cdots,n-1}}{x_n - x_0} \ ,$$

où $y_{0,1\cdots,n-1}$ et $y_{1,2,\cdots,n}$ sont respectivement les coefficients de plus haut degré des polynômes interpolateurs P_{n-1} de $(M_0, \cdots M_{n-1})$ et Q_n de $(M_1, \cdots M_n)$. Quel est l'avantage de la forme de Newton (4) par rapport à la forme de Lagrange (2) ?
Indication : On pourra d'abord montrer que, en vertu de (3) et de l'unicité de P_n,

$$P_n(X) = \frac{X - x_n}{x_0 - x_n} P_{n-1}(X) + \frac{X - x_0}{x_n - x_0} Q_{n-1}(X) \ ,$$

puis on identifiera les coefficients de plus haut degré des membres de gauche et de droite.

Exercice 10. Calcul approché d'une intégrale. Calculer les sommes finies

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} i^3$$

(on pourra utiliser la formule de somme d'Euler-MacLaurin). En déduire une approximation de l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$$

en utilisant

1. la méthode des rectangles à gauche
2. la méthode du point milieu

pour un pas $h = 1/N$. Comparer la valeur approchée avec la valeur exacte dans les deux cas. Quelle est la méthode la plus précise ?

Exercice 11. Précision de la méthode des trapèzes. Soit f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ qui s'annule en dehors d'un intervalle borné $[a, b]$. Montrer que la méthode des trapèzes permet de calculer l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

avec une précision d'ordre $1/N^2$.
Indication : utiliser la formule de somme d'Euler-MacLaurin.

Exercice 12. Méthodes de Newton-Cotes. La méthode de Newton-Cotes d'ordre n et de pas $h = b - a$ consiste à évaluer l'intégrale (5) en remplaçant f par son polynôme interpolateur de Lagrange (2) aux points $x_i = a + hi/n$, $i = 0, \cdots, n$. On obtient ainsi une valeur approchée

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\omega_i^{(n)}$$

de $I(f)$. Calculer les coefficients $\omega_i^{(n)}$ pour $n = 2$ et pour $n = 3$.
Indication : Au lieu de calculer les intégrales $\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x$, on pourra remarquer que $I(f) = I_n(f)$ si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n (dans ce cas, f est égal à son polynôme interpolateur).

Exercice 13. Procédé de Richardson-Romberg. Soit f une fonction de classe $C^5(\mathbb{R})$ dont on ne connaît les valeurs qu'en un nombre fini de points $x_0, \cdots, x_n$ (autrement dit, on ne dispose pas d'une formule explicite pour f mais seulement d'un tableau de ses valeurs $y_i = f(x_i)$ aux points x_i, $i = 0, \cdots, n$). Pour estimer la dérivée de f en x_i, on utilise la formule approchée

$$f'(x_i) \simeq (Df)_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \,.$$

1. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|f'''(x)| \leq M \;\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que si les points x_i sont régulièrement espacés, c'est-à-dire, si $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \cdots, n-1$, avec $h > 0$ fixé, alors $|f'(x_i) - (Df)_i| \leq Mh^2/3$.
2. Appliquer le procédé d'accélération de la convergence de Richardson-Romberg pour obtenir une approximation de $f'(x_i)$ avec une précision d'ordre h^4.