3) Applications linéaires

V, W 2 espaces vectoriels

ϕ application : $V \to W$

<u>Déf.</u> ϕ est linéaire si elle est compatible avec l'addition et la multiplication par un réel (si V et W $\mathbb{R}$-ev) ou un complexe (si V et W $\mathbb{C}$-ev)

$$\phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \phi(\vec{v}_1) + \phi(\vec{v}_2)$$

$$\phi(\lambda \vec{v}) = \lambda \phi(\vec{v})$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}$

<u>Exemple</u>

$V = \mathbb{R}^3 \quad W = \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}$-ev

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

est bien linéaire

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (x + x') + 2(y + y') + (z + z') \\ 3(x + x') - (z + z') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' + 2y' + z' \\ 3x' - z' \end{pmatrix}$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\phi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x + 2\lambda y + \lambda z \\ 3\lambda x - \lambda z \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - z \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

<u>ok</u>

Contre-exemple
$V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+1 \\ 3x-z \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$\phi\left(0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 3

$V = \{$matrices $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ 2 lignes 3 colonnes$\}$

$W = \{$matrices $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ 3 lignes 2 colonnes$\}$

à coef. complexes $\mathbb{C}$-ev

$\phi(M) = {}^tM$ transposée de M

Exercice vérifier que

$$\phi(M+N) = \phi(M) + \phi(N)$$

$$\phi(\lambda M) = \lambda\phi(M),\ \lambda \in \mathbb{C}$$

(se traduit par

$${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$$

$${}^t(\lambda M) = \lambda\, {}^tM\ )$$

Exemple 4 $\mathbb{R}$-ev

$V = \{$fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continument dérivable$\}$

$W = \{$fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues$\}$

$$\underset{\substack{\cap \\ V}}{\phi(f)} = 3f'$$

ϕ est bien définie (f est dérivable et sa dérivée est continue donc $3f' \in W$)

ϕ est linéaire

$$\phi(f_1+f_2) = 3(f_1+f_2)' = 3(f_1'+f_2') = 3f_1' + 3f_2' = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ constante

$$\begin{aligned}\phi(\lambda f) &= 3(\lambda f)' \\ &= 3\lambda f' \\ &= \lambda(3f') \\ &= \lambda\phi(f)\end{aligned}$$

ok