2) Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de $V$ espace vectoriel

$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = W$

$= \{ \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \}$

Choix entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ dépend du fait que $V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$W$ est un sous-espace vectoriel de $V$

- $\vec{0} \in W \quad \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$
- $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$
  $\vec{w} = \mu_1 \vec{v}_1 + ... + \mu_n \vec{v}_n$
  $\vec{v} + \vec{w} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v}_1 + ... + (\lambda_n + \mu_n)\vec{v}_n \in W$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
  $\lambda \vec{v} = \lambda \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda \lambda_n \vec{v}_n \in W$

On dit que $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ est une famille génératrice de $W$

A-t-on besoin de tous les vecteurs $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ pour former une partie génératrice de $W$ ?

Par exemple si $\vec{v}_n \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1})$ on peut s'en passer

$\lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$

$= \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_{n-1} \vec{v}_{n-1} + \lambda_n (\underbrace{\mu_1 \vec{v}_1 + ... + \mu_{n-1} \vec{v}_{n-1}}_{\vec{v}_n})$

$= (\lambda_1 + \lambda_n \mu_1) \vec{v}_1 + ... + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \mu_{n-1}) \vec{v}_{n-1}$

$\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1})$ si $\vec{v}_n \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1})$

Famille libre c'est une famille où on ne peut pas exprimer un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres. Cela revient à vérifier que si on a

$$\boxed{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \text{ alors } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}$$

En effet si on a

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$ avec

un des $\lambda_j$ non nul

$$\lambda_j \vec{v}_j = -\sum_{i \neq j} \lambda_i \vec{v}_i$$

$$\lambda_j \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \vec{v}_i$$

Base : famille génératrice

on va extraire une famille génératrice minimal qui sera libre.

<u>Déf</u> On dit qu'un espace vectoriel $V$ est de dimension finie s'il admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments

$$V = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

<u>Exemple</u> $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}$

$\{$polynômes à coeffs réels de degré $\leq n\} = \mathbb{R}_n[X]$

Famille génératrice

$$\{1, X, \dots, X^n\}$$

$$P \in \mathbb{R}_n[X]$$

$$P = a_0 1 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

Construction d'une base à partir d'une famille génératrice $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

Si $\vec{v}_1 = \vec{0}$ on l'enlève

$\neq 0$ on le garde

Si $\vec{v}_2 \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1)$ on l'enlève

$\notin$ on le garde

etc..

Si $\vec{v}_k \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1})$ on l'enlève

$\notin$ on le garde

**Prop 2** Si $V$ est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les bases de $V$ ont le même nombre d'éléments qu'on appelle $\dim(V)$.

Conséquence du résultat suivant

**Prop 1** Si on a une base de $V$ ayant $n$ éléments, alors une famille libre de $V$ possède au plus $n$ éléments

Soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ cette base de $V$

$\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ famille libre de $W$

$$\vec{w}_j = w_{j,1}\vec{v}_1 + w_{j,2}\vec{v}_2 + \dots + w_{j,n}\vec{v}_n$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{w}_j = \vec{0}$$

Si $m > n$, on peut trouver une solution à ce système dont les $\lambda_j$ ne sont pas tous nuls

Système ayant $n$ équations
$m$ inconnues

+ d'inconnues que d'équations

Matrice

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \updownarrow n \text{ équations}$$

$\longleftrightarrow$ $m$ inconnues

pivot Gauss

$$\begin{pmatrix} x & ? & \cdots & ? \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & x & ? \end{pmatrix}$$

$\dots \leftarrow \lambda_{m-1} \leftarrow \lambda_m = 1$

$$\begin{pmatrix} x & ? & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \leftarrow \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = \dots = \lambda_m = 0$

Prop 1 $\Rightarrow$ Prop 2

car une autre base de $V$ est une famille libre de $V$ donc aura au plus $n$ éléments

On échange le rôle des 2 bases

$\rightarrow$ égalité.

Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie et bases correspondantes

$\mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{R}^n$ base canonique $\mathbb{C}^n$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{C}^2$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{C}$-ev $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $x, y \in \mathbb{C}$

$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}_n[X]$ / $\mathbb{C}_n[X]$

$\{1, X, \dots, X^n\}$ est une base

$a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = 0$

$\Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n$

Autre base

$\{1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+\dots+X^n\}$

Ensemble des matrices ayant $\ell$ lignes et $c$ colonnes

$M^{\ell,c}_{i,j}$ = matrice ayant des $0$ partout sauf un $1$ en ligne $i$ colonne $j$

$$\ell \updownarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} i$$

$$\underleftrightarrow{\quad c \quad}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & - & a_{1,c} \\ | & & \\ a_{\ell,1} & - & a_{\ell,c} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{c} a_{i,j} M_{i,j}$$

- L'ensemble $E$ des solutions de l'équation différentielle

$$f'' = 4f \quad (*)$$

$C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = espace vectoriel des fonctions 2 fois continument dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$

$E$ est un sev (sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

- $0 \in E$, $0$ vérifie $(*)$
- $f_1, f_2 \in E$

$(f_1+f_2)'' = f_1'' + f_2''$

$= 4f_1 + 4f_2$

$= 4(f_1+f_2)$

$f_1+f_2$ vérifie $(*)$

$f_1+f_2 \in E$

- $\lambda f_1$ pour $f_1 \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda f_1)'' = \lambda f_1''$

$= \lambda(4f_1)$ $\quad \lambda f_1$ $(*)$

$= 4(\lambda f_1)$ $\quad \lambda f_1 \in E$

$f(t) = e^{rt}$

$r^2 = 4 \quad r = \pm 2$

$f_2(t) = e^{2t} \quad f_{-2}(t) = e^{-2t}$

On montre que $\{f_2, f_{-2}\}$ est une base de $E$.

($\dim(E) = 2 \Leftarrow$ Cauchy Lipschitz)

$f = f_2 g$, on remplace dans $(*)$

$f' = f_2' g + f_2 g'$

$f'' = \cancel{f_2'' g} + 2f_2' g' + f_2 g''$

$= \cancel{4 f_2 g}$

$h = g'$

$2 \cdot 2e^{2t} h + e^{2t} h' = 0$

$4h + h' = 0$

$h' = -4h \quad h(t) = Ce^{-4t}$

$= g'$

$g = \int Ce^{-4t}\,dt$

$= \frac{C}{-4} e^{-4t} + \tilde{C}$

$f = e^{2t}\left(\frac{C}{-4} e^{-4t} + \tilde{C}\right)$

$= \frac{C}{-4} f_{-2} + \tilde{C} f_2$

$f \in \mathrm{Vect}(f_{-2}, f_2)$

génératrice

$\{f_2, f_{-2}\}$ libre ?

Soit $\lambda f_2 + \mu f_{-2} = 0$

$\overset{?}{\Rightarrow} \lambda = \mu = 0$

$t \to +\infty$ $f_{-2}(t) = e^{-2t} \to 0$

$\lambda f_2(t) = \lambda e^{2t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

donc $\lambda = 0$

$t \to -\infty$ $\mu = 0$