Produit scalaire (suite)

$\langle\ ,\ \rangle$ ou $\langle\ |\ \rangle$ ou $\cdot$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur un espace vectoriel E de dimension finie ou infinie.

Remarque (terminologie)

On dit que E est un espace euclidien (si E est de dimension finie) ou préhilbertien sinon.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} . \vec{u}}$ norme

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|$$

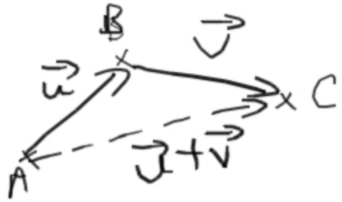
Conséquence angle non orienté θ entre 2 vecteurs $\vec{u}$ $\vec{v}$

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|} \in [-1,1]$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|}\right)$$

Inégalité triangulaire



Dans un triangle dans le plan avec le produit scalaire usuel

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

Généralisation à E

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Preuve on prend les carrés

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v} | \vec{u}+\vec{v} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

donc

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Exemple $\mathbb{R}[X] = E$

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)\,dX$$

$\vec{u} = 1$ $\qquad \vec{u}+\vec{v} = 1+X^2$

$\vec{v} = X^2$

$\|1+X^2\|$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} (1+X^2)^2\,dX}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^{1} (1+2X^2+X^4)\,dX}$$

$$= \sqrt{\left[X+\frac{2}{3}X^3+\frac{1}{5}X^5\right]_{-1}^{1}}$$

$$= \sqrt{2\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)}$$

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2\,dX}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\|X^2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (X^2)^2\,dX}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Inégalité triangulaire

$$\sqrt{2\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)} \le \sqrt{2}+\sqrt{\frac{2}{5}}$$

```
> sqrt(2*(1+2/3+1/5.0))
```

1.93218356616,
2.04666909441

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \le \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \le |\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle|$$

Exercice montrer que

$$\big|\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|\big| \le \|\vec{u}\pm\vec{v}\|$$

Identité du parallélogramme

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$$

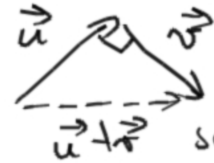
$$= 2\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|^2$$

exercice de la feuille

longueurs des diagonales d'un parallélogramme et longueur des côtés

Orthogonalité on dit que $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$

Théorème de Pythagore



$\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$$

Dém $\langle \vec{u}+\vec{v} | \vec{u}+\vec{v} \rangle$

$$= \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle$$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ équivaut à $2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$

Exemple $E = \mathbb{R}[X]$

$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$

$1 \perp X$ car $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

$\langle 1 | X \rangle$

$\|1+X\|^2 = \|1\|^2 + \|X\|^2$

Vérification

$\|1+X\|^2 = \int_{-1}^{1} (1+X)^2\,dX$

$= \int_{-1}^{1} (1+2X+X^2)\,dX$

$= \left[X + X^2 + \frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{1}$

$= \left(1 + \cancel{1} + \frac{1}{3} - \left(-1 + \cancel{1} - \frac{1}{3}\right)\right)$

$= \frac{8}{3}$

$\|1\|^2 = 2$

$\|X\|^2 = \int_{-1}^{1} X^2\,dX$

$= \left[\frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

on a bien

$\|1+X\|^2 = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \|1\|^2 + \|X\|^2$

Généralisation

Si on a une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ alors

$\|\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n\|^2$

$= \|\vec{u}_1\|^2 + \dots + \|\vec{u}_n\|^2$

Remarque une famille de vecteurs non nuls 2 à 2 orthogonaux pour un produit scalaire est une famille libre

En effet si on a

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}$

en faisant le produit scalaire avec $\vec{u}_j$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \vec{u}_i | \vec{u}_j \rangle = 0$

seul le terme $i=j$ donne un produit scalaire non nul

$\lambda_j \langle \vec{u}_j | \vec{u}_j \rangle = 0$

Si $\vec{u}_j \neq \vec{0}$ $\langle \vec{u}_j | \vec{u}_j \rangle \neq 0$

car $\langle \, | \, \rangle$ est défini positif

donc $\lambda_j = 0$

Vrai pour tout j donc la famille est libre

En dimension finie, si on a une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux et non nuls ayant dim(E) éléments sera une base de E

A partir d'une telle base orthogonale $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ on peut construire une base orthonormale $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ en posant

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|}$$

On a bien

$$\langle \vec{v}_i | \vec{v}_j \rangle = \left\langle \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|} \middle| \frac{\vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\vec{u}_i\| \, \|\vec{u}_j\|} \underbrace{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_j \rangle}_{= 0}$$

$$= 0$$

et

$$\|\vec{v}_i\| = \left\| \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|\vec{u}_i\|} \|\vec{u}_i\| = 1$$

on utilise la prop. suivante avec $\lambda = \frac{1}{\|\vec{u}_i\|}$

<u>Prop</u> $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$

Preuve avec les carrés

$$\|\lambda \vec{u}\|^2 = \langle \lambda \vec{u} | \lambda \vec{u} \rangle$$

$$= \lambda^2 \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle$$

$$= \lambda^2 \|\vec{u}\|^2$$

et on prend les racines carrées.

Exemple $E = \mathbb{R}[X]$

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x) Q(x) \, dx$$

$\mathbb{R}_2[X] \subset E$

$(1, X, X^2)$ $\qquad 1 \not\perp X^2$

Construction base $\perp$ de $\mathbb{R}_2[X]$

$$q(\underbrace{P}_{= a + bX + cX^2}) = \langle P | P \rangle$$

Matrice (q)

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$q(a,b,c) = 2a^2 + \frac{2}{3} b^2 + \frac{2}{5} c^2 + \frac{4}{3} ac$$

Gauss

$$= 2\left(a + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} b^2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) c^2$$

$$= 2\left(a + \frac{c}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} b^2 + \frac{8}{45} c^2$$

$$\begin{cases} a+\frac{c}{3}=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\begin{cases} a+\frac{c}{3}=0 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X$$

$$\begin{cases} a+\frac{c}{3}=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X^2-\frac{1}{3}$$

Base $\left(1, X, X^2-\frac{1}{3}\right)$ est orthogonale

$\|1\|=\sqrt{2}$ $\quad \|X\|=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\left\|X^2-\frac{1}{3}\right\|=\sqrt{\frac{8}{45}}$

Base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{X}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \frac{X^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}}\right)$