Forme quadratique q sur un espace vect. de dim n

$\downarrow$ Algorithme de Gauss

base q-orthogonale $\mathcal{B}_2$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Thm (Sylvester)

Le nombre de coefficients diagonaux strictement positifs et le nombre de coefficients diagonaux strictement négatifs ne dépend pas de la base q-$\perp$

Les 2 nombres (notés habituellement r et s) sont la signature de la forme quadratique.

La somme $r+s$ est le rang de la forme bilinéaire symétrique associée à q.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ il peut être soit

>0

$=0$

<0

1ère remarque : on peut regrouper les coefficients strictement positifs ensemble, de même pour les strictement négatifs en échangeant l'ordre des vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$.

Exemple en dimension 2

$q = (x+2y)^2 - 4y^2 = q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

base $\mathcal{B}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} \right\}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Si on échange le 1er et le 2è vecteur de la base

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3 = (\vec{e}_2, \vec{e}_1)$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{array} \end{array}$$

$${}^tP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= {}^tP \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(q) = \begin{pmatrix} \varphi(e_2, e_2) & 0 \\ 0 & \varphi(e_1, e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut toujours se ramener à

$$\mathrm{Mat} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s} < 0$

Rang (Mat) = nombre de coefficients non nuls
$= r + s$

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une autre base q-orthogonale ordonnée de la même façon

$$\mathrm{Mat}_{(f_1, \dots, f_n)} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \oplus & \\ & & \mu_{r'} & & & \\ & & & \mu_{r'+1} & \ominus & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_{r'+s'} \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de montrer que
$r = r'$
et $s = s'$
(on sait déjà que $r+s = r'+s'$
$= \mathrm{rang}$)

Propriété : dans $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$
ou dans $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{r'})$

$q(\vec{v}) \geq 0$
et $q(\vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$.

On dit que q est positive sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ $(q(\vec{v}) \geq 0)$

La propriété $q(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ se dit " q est définie positive "

Preuve

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{r} v_i \vec{e}_i$$

$q(\vec{v}) = ?$ $\quad \mathrm{Mat}_{\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$

avec $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_r > 0$

$$q(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{r} v_i^2 \lambda_i$$

Exemple $r = 2$

$\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$q\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot v_1^2 + 3 \cdot v_2^2$$

On a bien $q(\vec{v}) \geq 0$
Et si $q(\vec{v}) = 0$
alors $v_i^2 \lambda_i = 0$ pour tout i
comme $\lambda_i > 0$ alors $v_i = 0$
Finalement $\vec{v} = \vec{0}$

q

Sur $\mathrm{Vect}_{\vec{v}\in}(\vec{e}_{r+1}, \vec{e}_{r+s}, \vec{e}_n)$

q est négative (mais pas forcément définie négative)

$q(\vec{v}) \leq 0$

mais il peut y avoir des vecteurs $\vec{v}$ non nuls tels que $q(\vec{v}) = 0$.

$\vec{v} = v_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \dots + v_{r+s}\vec{e}_{r+s} + \dots + v_n \vec{e}_n$

$q(\vec{v}) = v_{r+1}^2 \underbrace{\lambda_{r+1}}_{<0} + \dots + v_{r+s}^2 \underbrace{\lambda_{r+s}}_{<0}$

≤ 0

On considère la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{f}_{r'+1}, \vec{f}_{r'+s'}, \vec{f}_n)$

Montrons que c'est une famille libre. Si

$\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_{r'+1}\vec{f}_{r'+1} + \dots + \beta_n\vec{f}_n = \vec{0}$

alors

$\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_r\vec{e}_r = -\beta_{r'+1}\vec{f}_{r'+1} - \dots - \beta_n\vec{f}_n$

donc

$q(\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_r\vec{e}_r) = q(-\beta_{r'+1}\vec{f}_{r'+1} - \dots - \beta_n\vec{f}_n)$

$q(\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_r\vec{e}_r) \geq 0$

$q(-\beta_{r'+1}\vec{f}_{r'+1} - \dots - \beta_n\vec{f}_n) \leq 0$

donc $= 0$

Donc $\alpha_1\vec{e}_1 + \dots + \alpha_r\vec{e}_r = \vec{0}$

$= -\beta_{r'+1}\vec{f}_{r'+1} - \dots - \beta_n\vec{f}_n$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_n)$ base donc $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ famille libre

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

De même pour les β

Donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_r, \vec{f}_{r'+1}, \vec{f}_n)$ est libre $\Rightarrow$ son nombre d'éléments est $\leq n$

$r + (\cancel{n} - r') \leq \cancel{n}$

$r \leq r'$

En échangeant le rôle de $(\vec{e}_1, \vec{e}_n)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_n)$ on a de même $r' \leq r$

Finalement $r = r'$

Comme $r+s = r'+s'$ on a $s = s'$.