Objectif construire une base φ-orthogonale

Théorème Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dim finie n, il existe une base φ-orthogonale pour E

Preuve par récurrence sur $n \geq 1$

Pour $n=1$ base avec 1 seul élément

Il n'y a pas de paire $i \neq j$ pour lesquelles on veut que $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$

Hérédité on suppose qu'on sait faire jusqu'en dimension $n-1$, on va montrer qu'on peut alors le faire en dim. n.

Choix d'un vecteur dans cette base $\vec{e}_1$

Les autres vecteurs de la base doivent être dans $\vec{e}_1^{\perp}$
$= \{\vec{e}_1\}^{\perp}$

On souhaite que $\vec{e}_1^{\perp}$ soit de dimension $n-1$ pour appliquer l'hypothèse de récurrence, et il faut aussi que $\vec{e}_1 \notin \vec{e}_1^{\perp}$ ce qui permettra de compléter la base φ-$\perp$ obtenue par récurrence avec $\vec{e}_1$ (qui est bien $\perp_{\varphi}$ à tous les vecteurs de cette base)

Remarque : on peut éliminer le cas où $\varphi = 0$ (n'importe quelle base est alors φ-orthogonale)

On suppose donc $\varphi \neq 0$

On va choisir $\vec{e}_1$ tel que $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$

Un tel $\vec{e}_1$ existe, sinon $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ pour tout $\vec{v} \in E$

$$\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{2}\left(\varphi(\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}) - \varphi(\vec{v}, \vec{v}) - \varphi(\vec{w}, \vec{w})\right) = 0$$

donc φ serait nulle

Soit

$$\psi : \begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ \vec{v} &\to \phi(\vec{e}_1, \vec{v}) \end{aligned}$$

ψ est une application linéaire (car ϕ est linéaire à droite)

$$\underset{n}{\underset{\shortparallel}{\dim E}} = \dim \operatorname{Ker} \psi + \dim \operatorname{Im} \psi$$

$\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0 \quad \operatorname{Im} \psi = \mathbb{R}$

$\dim \operatorname{Ker} \psi = n - 1$ avec

$\operatorname{Ker} \psi = \vec{e}_1^{\perp}$

On prend une base φ-$\perp$ dans $\operatorname{Ker} \psi$ et on ajoute $\vec{e}_1$

$\to$ base φ-$\perp$ dans E

Corollaire Dans une base φ-orthogonale la matrice de φ est diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

$\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$ est quelconque (il peut être nul)

Déf base φ-orthonormale

Si on peut choisir la base telle que $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1$

(**Déf** base φ-orthogonale $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ si $i \neq j$,
$\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$ est quelconque nul ou pas nul)

Déf noyau d'une forme bilinéaire φ définie sur E

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = E^{\perp}$$

Exemple 1

$\mathbb{R}^2$ $\mathrm{mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = M$

(base canonique de E)$^{\perp}$

$$(1\ 0) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 0$$

$$(0\ 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x + 4y = 0$$

Système de matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Seule solution $x = y = 0$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\vec{0}\}$$

Observation $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est (**Prop**) le même sous-espace vectoriel que $\mathrm{Ker}\,\psi$ où ψ est l'application <u>linéaire</u> de $E \to E$ de même matrice que φ (avec la même base)

Observation qui reste vraie en dimension quelconque

Exemple 2

$\mathbb{R}^3$ $\mathrm{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^{3\perp}$ système de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$y=0$

$x-z=0 \Rightarrow x=z$

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ 0\\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = E^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

est ici de dimension 1

⚠ $\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\psi$ n'ont rien à voir

<u>Déf</u> $\mathrm{rang}(\varphi)$ pour φ forme bilinéaire symétrique

$\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(E) - \dim \mathrm{Ker}(\varphi)$

Thm du rang pour ψ

$$\dim \mathrm{Im}(\psi) = \dim(E) - \dim \underbrace{\mathrm{Ker}(\psi)}_{\mathrm{Ker}(\varphi)}$$

$$= \mathrm{rang}(\varphi)$$

$\mathrm{rang}(\varphi)$ c'est le rang de la matrice de φ, ne dépend pas de la base choisie.

On peut le vérifier avec la formule de changement de base $N = {}^tP\,M\,P$ en multipliant une matrice à droite ou à gauche par une matrice inversible P on ne change pas son rang.

<u>Remarque</u> si on a une base φ-orthogonale, dans cette base φ a une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\vec{e}_n,\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Si $\varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_i) \neq 0$ alors pour $\vec{v}\,(x_1, , x_n) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

on a $x_i = 0$

$\left(\varphi(\vec{e_i}, \vec{e_i}) x_i = 0 \text{ équation} \right)$

Si $\varphi(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = 0$ alors x_i est quelconque

Donc rang(φ) = nombre de coefficients diagonaux $\neq 0$ de la matrice de φ dans une base φ-orthogonale

En pratique pour construire des bases φ-orthogonales on utilise la forme quadratique associée à φ $q(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{v})$

On travaille sur l'expression de $q(\vec{v})$ en fonction des coordonnées de $\vec{v}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$${}^tXMX = q(\vec{v})$$