E espace vectoriel de dim finie n avec une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

ϕ forme bilinéaire $E \times E \to \mathbb{R}$

$Mat(\phi) = (\phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$
$= M$

Prop

ϕ est symétrique si et seulement si M l'est

si ϕ est symétrique

$M_{ij} = \phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$
$= \phi(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$ car ϕ sym
$= M_{ji}$

Réciproquement

$\phi(\vec{v}, \vec{w}) = {}^t X M Y$

si X et Y sont les vecteurs colonnes de coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$\phi(\vec{w}, \vec{v}) = {}^t Y M X$
$= {}^t({}^t X \, {}^t M \, Y)$

M symétrique donc ${}^t M = M$

$= {}^t(\underbrace{{}^t X M Y}_{\text{matrice 1 ligne 1 colonne}})$

$= {}^t X M Y = \phi(\vec{v}, \vec{w})$

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ 2 bases de E $\quad P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$

M et N matrices de ϕ dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$

$N = {}^t P M P$

⚠ Ne pas confondre avec le changement de base pour ψ application linéaire de $E \to E$ de matrices A et B dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$

$B = P^{-1} A P$

φ f. on trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de la forme bilinéaire ϕ est diagonale ?

$$\begin{pmatrix} \phi(\vec{e}_1,\vec{e}_1) & & \phi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=0 \\ & \ddots & \\ & & \phi(\vec{e}_n,\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

$\phi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=0$ si $i \neq j$

<u>Déf</u> On dit que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont φ-orthogonaux si $\varphi(\vec{v},\vec{w})=0$

Not° $\vec{v} \underset{\varphi}{\perp} \vec{w}$

On souhaite que cette relation soit symétrique $\vec{w} \underset{\varphi}{\perp} \vec{v}$ soit équivalent à $\vec{v} \underset{\varphi}{\perp} \vec{w}$

→ on va s'intéresser aux formes bilinéaires <u>symétriques</u>

Dans ce cas

$$\varphi(\vec{v},\vec{w}) = 0 = \varphi(\vec{w},\vec{v})$$

<u>Remarque</u> Si ϕ est antisymétrique et si la matrice de φ dans une base est diagonale alors $\varphi = 0$

$$\phi(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = -\phi(\vec{e}_1,\vec{e}_1)$$

si ϕ antisymétrique

donc $\phi(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=0$

La diagonale de la matrice d'une forme bilinéaire antisymétrique est nulle.

Donc si la matrice est diagonale, elle est nulle donc $\phi = 0$.

⚠ Ne pas être symétrique n'est pas équivalent à être antisymétrique.

Dans toute la suite on considère des formes bilinéaires symétriques.

Exemples

* $\mathbb{R}^2$ ϕ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = M$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1er base canonique

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2e

$\phi(\vec{v}, \vec{w}) = 1$ $\vec{v} \not\perp_{\varphi} \vec{w}$

Recherche d'un vecteur φ-$\perp$ à $\vec{v}$ $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\phi(\vec{v}, \vec{w}) = 0 = {}^t\vec{v}\, M\, \vec{w}$

$= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (3 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (3x + y)$

Par exemple $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est $\perp_{\varphi}$ à $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

* $\mathbb{R}^2$ ϕ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Le 1er vecteur de base $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est φ-$\perp$ à lui-même

* $\mathbb{R}^2$ ϕ de matrice

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont φ-$\perp$ à eux-mêmes

Cherchons les vecteurs orthogonaux à $\vec{e}_1$: $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

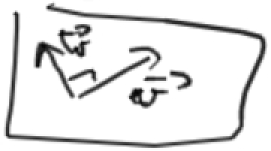
$(1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0)$

$(0 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = $ $y = 0$, x quelconque

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1)$

Impossible de construire une base φ-orthogonale contenant $\vec{e}_1$.

$\neq \mathbb{R}^2$ $\langle \cdot | \cdot \rangle$



*

$$E = \mathbb{R}_2[X]$$

$$\phi : A, B \longrightarrow \int_{-1}^{1} A(t)B(t)\,dt$$

ϕ est bilinéaire symétrique sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ donc cela reste vrai sur $E = \mathbb{R}_2[X]$

Exemple $A = 1$
$B = X$

$$\phi(1, X) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$$

Donc $1 \underset{\varphi}{\perp} X$

De même $X^2 \underset{\varphi}{\perp} X$

$$\phi(X^2, X) = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$$

↳ impaire

$[-1,1]$ symétrique/0

Plus général : si A est pair $A = a_0 X^0 + a_2 X^2$ et si B est impair $B = b_1 X$ alors $\phi(A,B) = 0$ $A \underset{\varphi}{\perp} B$

La base $(1, X, X^2)$ n'est pas φ-orthogonale parce que $\varphi(1, X^2)$

$$= \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0$$

On peut modifier X^2 en $X^2 - \alpha$, α bien choisi pour que $(1, X, X^2-\alpha)$ soit φ-orthogonale

<u>Déf</u> Orthogonal d'un sous-ensemble F de vecteurs de E

$F \subset E \quad F = \{\vec{f_1}, \dots\}$

$F^\perp = \{\vec{v} \in E \mid$ pour tout vecteur $\vec{w}$ de F on a $\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = 0\}$

<u>Exemple</u> * ϕ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$F = \{\vec{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

on a calculé $F^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{e_1})$

* ϕ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$F = \{\vec{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$F^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ car

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0)$$

$$3x + y = 0$$

donc $y = -3x$ donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> $F^\perp$ est conservé si on remplace F par $\mathrm{Vect}(F)$

En effet si $\vec{w} \in \mathrm{Vect}(F)$

$\vec{w}$ est combinaison linéaire de vecteurs de F

$\vec{w} = \lambda_1 \vec{w_1} + \dots + \lambda_n \vec{w_n}$

$\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n} \in F$

Si $\vec{v} \in F^\perp$

$\phi(\vec{v}, \vec{w})$

$= \phi(\vec{v}, \lambda_1 \vec{w_1} + \dots + \lambda_n \vec{w_n})$

$= \lambda_1 \phi(\vec{v}, \vec{w}_1)$

$+ \dots + \lambda_n \phi(\vec{v}, \vec{w}_n)$

$= \lambda_1 \times 0 + \dots + \lambda_n \times 0$

car $\vec{v} \in F^\perp$ et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in F$

$= 0$

donc $\vec{w} \in \mathrm{Vect}(F)$

Application si on cherche l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E on prend une famille génératrice G (par exemple une base) de F

et on cherche $G^\perp = F^\perp$

Exemple dans $\mathbb{R}^3$

ϕ de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ (symétrique ok)

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0 \right\}$$

$F^\perp$? base de F :

$z = -y-x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y-x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$F = \mathrm{Vect}(G)$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$G^\perp \ni \vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x-z \\ -y \end{pmatrix}$$

$= 2y = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x-z \\ -y \end{pmatrix} = 0$$

$$x - z + y = 0$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ x - z + y = 0 \end{cases}$$

$$y = 0, \ x = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

<u>Prop</u> $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

<u>Preuve</u> · $\vec{0} \in F^\perp$

$$\varphi(\vec{0}, \vec{w}) = 0$$

· si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{w} \in F$

$$\phi(\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2, \vec{w})$$

$$= \phi(\vec{v}_1, \vec{w}) + \lambda \phi(\vec{v}_2, \vec{w})$$

$$= 0 + \lambda \cdot 0 = 0$$

car $\underset{\vec{v}_2}{\vec{v}_1} \in F^\perp$, $\vec{w} \in F$

donc $\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \in F^\perp$