$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

$(A\cdot B)^{t} = {}^tB \cdot {}^tA$

$\phi : E\times E \to \mathbb{R}$

$\phi(v,w)$ linéaire par rapport à chaque argument

- Autres exemples

$E = \mathbb{R}[X]$

$\phi(A,B) = A(0)\,B(1)$

C'est bien bilinéaire en effet

$\phi(A, B_1+\lambda B_2) \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$= A(0)\,(B_1+\lambda B_2)(1)$

$= A(0)\,(B_1(1)+\lambda B_2(1))$

$= A(0)B_1(1)+\lambda\, A(0)B_2(1)$

$= \phi(A_1,B_1)+\lambda\phi(A_1,B_2)$

ϕ n'est pas symétrique ni antisymétrique

$\phi(B,A) = B(0)\,A(1)$

Contre-exemple

$A=1 \qquad B=X$

$\phi(A,B)=1 \quad \phi(B,A)=0$

$\phi(A_1+\lambda A_2, B)$

$= (A_1+\lambda A_2)(0)\,B(1)$

$= (A_1(0)+\lambda A_2(0))\,B(1)$

$= A_1(0)\,B(1)+\lambda A_2(0)\,B(1)$

$= \phi(A_1,B)+\lambda\,\phi(A_2,B)$

- $E = M_n(\mathbb{R})$

= matrices carrées de taille n à coefficients réels

$\phi(M,N) = \mathrm{trace}(M\cdot N)$

trace $(M) = \sum$ coefficients diagonaux

$$= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

ϕ bilinéaire

$\phi(M, N_1 + \lambda N_2)$

$= \text{trace}(M \cdot (N_1 + \lambda N_2))$

$= \text{trace}(M \cdot N_1 + \lambda M \cdot N_2)$

Or

$\text{trace}(M_1 + \lambda M_2)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_1 + \lambda M_2)_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_1)_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} (M_2)_{i,i}$$

$\text{trace}(M_1 + \lambda M_2)$

$= \text{trace}(M_1) + \lambda \,\text{trace}(M_2)$

$\text{trace}(MN_1) + \lambda \,\text{trace}(MN_2)$

$= \phi(M, N_1) + \lambda \phi(M, N_2)$

Vérification identique

$\phi(M_1 + \lambda M_2, N)$

$= \phi(M_1, N) + \lambda \phi(M_2, N)$

Ou on peut montrer que ϕ est symétrique

⚠ le produit de matrices n'est pas commutatif

$$M \cdot N \neq N \cdot M$$

$(M \cdot N)_{i,i}$

$$= \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} N_{j,i}$$

$\text{trace}(MN)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M \cdot N)_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} N_{j,i}$$

$$\operatorname{trace}(NM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} N_{i,j} M_{j,i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} M_{j,i} N_{i,j}$$

puis on échange les noms des variables de sommation i et j

$$= \operatorname{trace}(MN)$$

ϕ est symétrique, linéaire par rapport à l'argument de droite donc aussi de gauche

* $E = \mathbb{R}^2$ le déterminant

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x_1 y_2 - y_1 x_2$$

ϕ est antisymétrique

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x_2 y_1 - y_2 x_1 = -\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

Parenthèse $\vec{v}, \vec{w} \in E$

ϕ symétrique $\phi(\vec{v}, \vec{w}) = \phi(\vec{w}, \vec{v})$

antisym. $\phi(\vec{v}, \vec{w}) = -\phi(\vec{w}, \vec{v})$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x(y_1 + \lambda y_2) - y(x_1 + \lambda x_2)$$

$$= x y_1 - y x_1 + \lambda(x y_2 - y x_2)$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \lambda \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

Le déterminant est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque en dimension $n > 2$ le déterminant est une forme multilinéaire alternée

• $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$

$\mathcal{C}^0$ fonctions continues

$\phi(f, g)$

$$= \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \, dt$$

ϕ est symétrique

$\phi(f, g_1 + \lambda g_2)$

$$= \int_{-1}^{1} f(t) (g_1 + \lambda g_2)(t) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t) (g_1(t) + \lambda g_2(t)) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (f(t) g_1(t) + \lambda f(t) g_2(t)) \, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t) g_1(t) \, dt + \lambda \int_{-1}^{1} f(t) g_2(t) \, dt$$

$$= \phi(f, g_1) + \lambda \phi(f, g_2)$$

donc ϕ est linéaire / argument de droite

+ ϕ symétrique

$\Rightarrow$ ϕ est bilinéaire symétrique

Si ϕ est antisymétrique et linéaire par rapport à l'argument de droite montrons que ϕ est linéaire par rapport à l'argument de gauche

$\phi(v_1+\lambda v_2, w)$

$= -\phi(w, v_1+\lambda v_2)$ antisy

$= -\phi(w, v_1) - \lambda\phi(w, v_2)$ (linéarité droite)

$= \phi(v_1, w) + \lambda\phi(v_2, w)$ (antisym)

$\phi(f, g)$

$= \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$

$\phi(g, f) = \int_{-1}^{1} g(t)\, f(t)\, \circ$

Déf forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique ϕ

$q : E \to \mathbb{R}$

$v \to \phi(v, v) = q(v)$

$q(\lambda v) = \phi(\lambda v, \lambda v)$

$= \lambda\phi(v, \lambda v)$

$= \lambda\cdot\lambda\,\phi(v, v)$

$= \lambda^2\, q(v)$

$q(v_1+v_2)$

$= \phi(v_1+v_2, v_1+v_2)$

$= \phi(v_1, v_1+v_2)$ Lin gauche

$+ \phi(v_2, v_1+v_2)$

$= \phi(v_1, v_1) + \phi(v_1, v_2)$

$+ \phi(v_2, v_1) + \phi(v_2, v_2)$

$= q(v_1) + q(v_2)$

$+ 2\phi(v_1, v_2)$ car ϕ symétrique

Exemples

- $\mathbb{R}^2$ $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

$= x_1 x_2 - 3 y_1 y_2$

$= \phi\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 - 3y^2$

- $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

$= x_1 y_2 + x_2 y_1$

$= \phi\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2xy$

- $\phi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$

sur $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$

$q(f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt$

Retrouver ~~une~~ la forme bilinéaire ϕ dont q est la forme quadratique :

On a $q(v_1 + v_2)$

$= q(v_1) + q(v_2) + 2\phi(v_1, v_2)$

$$\boxed{\Rightarrow \phi(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left(q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)\right)}$$