Matrice symétrique et antisymétrique et transposition

Matrice M, transposée ${}^tM$ en faisant la symétrie par rapport à la diagonale pour les coefficients

Si M est une matrice carrée ${}^tM$ est aussi une matrice carrée de même taille

$E = M_n(\mathbb{R})$ = espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n

La transposition est une application linéaire de E dans E

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$$

L'ensemble des matrices symétriques est

$$\{M \in E \mid {}^tM = M\}$$

$$= \{M \in E \mid (\mathrm{id} - {}^t)(M) = 0\}$$

$$= \mathrm{Ker}(\phi)$$

$$\phi : E \to E$$
$$M \to M - {}^tM$$

C'est un espace vectoriel

L'ensemble des matrices antisymétriques

$$\{M \in E \mid {}^tM = -M\}$$

$$= \{M \in E \mid (\mathrm{id} + {}^t)(M) = 0\}$$

$$= \mathrm{Ker}\, \psi$$

$$\psi : E \to E$$
$$M \to M + {}^tM$$

C'est aussi un espace vectoriel

Exercice 3 feuille 2 TD

On montre que

$$Ker(\Phi) \oplus Ker(\Psi) = E$$

Somme direct

ce qui revient à dire qu'une matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique (de manière unique)

2ème chapitre

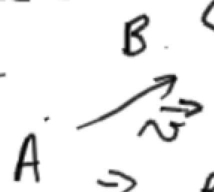
Formes bilinéaires (principalement symétriques)

Motivation généraliser la notion de produit scalaire

$\mathbb{R}^n \quad \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w}$

caractérise l'orthogonalité

distance



$\sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$

$\vec{v} = B - A$

angle $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}$

Propriétés du produit scalaire

se comporte comme un produit vis-à-vis de l'addition de 2 vecteurs

$\vec{v} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$

$= \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \vec{v} \cdot \vec{w}_2$

$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w}_1$

$= \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1$

$\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$= \lambda (\vec{v} \cdot \vec{w})$

bi-linéarité

En plus pour le produit scalaire

- symétrie
  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

- $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$
  et n'est nul que si
  $\vec{v} = \vec{0}$

Déf. d'une forme bilinéaire

E un espace vectoriel

$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad \vec{v}, \vec{w} \longrightarrow \phi(\vec{v}, \vec{w})$
2 vecteurs $\qquad$ réel

On demande que

* $\phi(\vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2)$
  $= \phi(\vec{v}, \vec{w}_1) + \phi(\vec{v}, \vec{w}_2)$
  linéarité / 2ème argument
  (à droite)

* $\phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w})$
  $= \phi(\vec{v}_1, \vec{w}) + \phi(\vec{v}_2, \vec{w})$

* $\phi(\vec{v}, \lambda \vec{w})$
  $= \phi(\lambda \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \phi(\vec{v}, \vec{w})$

Forme bilinéaire symétrique
si $\phi(\vec{v}, \vec{w}) = \phi(\vec{w}, \vec{v})$
pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in E$

Forme bilinéaire antisymétrique
si $\phi(\vec{v}, \vec{w}) = -\phi(\vec{w}, \vec{v})$

<u>Remarque</u> si ϕ est symétrique ou antisymétrique il suffit de vérifier la linéarité à droite pour avoir la linéarité à gauche

Exemples

- Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ ..
- $\mathbb{R}^3$

$$\phi\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\vec{w}}\right)$$

$$= xx' + xy' + 2x'y + zz'$$

forme bilinéaire ?

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ y_1' + y_2' \\ z_1' + z_2' \end{pmatrix}\right)$$

$$= x(x_1' + x_2') + x(y_1' + y_2') + 2(x_1' + x_2')y + z(z_1' + z_2')$$

$$= xx_1' + xy_1' + 2x_1'y + zz_1' + xx_2' + xy_2' + 2x_2'y + zz_2'$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{pmatrix}\right)$$

$$\phi\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, \underbrace{\lambda\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\lambda\vec{w}}\right)$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \\ \lambda z' \end{pmatrix}\right)$$

$$= x \cdot \lambda x' + x \cdot \lambda y' + 2\lambda x' \cdot y + z \cdot \lambda z'$$

$$= \lambda(xx' + xy' + 2x'y + zz')$$

$$= \lambda\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)$$

linéarité à gauche exercice

Exemple non bilinéaire

$\mathbb{R}^2 = E$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$$

$$= xy + x'y'$$

$$(x_1' + x_2')(y_1' + y_2')$$

$$\neq x_1' y_1' + x_2' y_2'$$

en général

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\neq \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \quad ?$$

$$0 + 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\neq 0 + 4$$