

$\phi$  application linéaire  $V \rightarrow W$   
 $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ -ev

$$\text{Im}(\phi) = \{ \vec{w} \in W \text{ tel qu'il existe } \vec{v} \in V / \vec{w} = \phi(\vec{v}) \}$$

Prop  $\text{Im}(\phi)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$

$$\vec{0} \in \text{Im}(\phi) \quad \vec{0} = \phi(\vec{0})$$

$$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(\phi)$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \phi(\vec{v}_1) \quad \phi(\vec{v}_2) \end{array}$$

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \phi(\vec{v}_1) + \phi(\vec{v}_2)$$

$$\uparrow \\ \text{Im}(\phi) = \phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$\cdot \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \quad \vec{w} \in \text{Im}(\phi) \\ \parallel \\ \phi(\vec{v})$$

$$\lambda \vec{w} = \lambda \phi(\vec{v})$$

$$\uparrow \\ \text{Im}(\phi) = \phi(\lambda \vec{v})$$

Exemples 1

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x - z \end{pmatrix}$$

$$W = \mathbb{R}^2 = \text{Im}(\phi)$$

si  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{w} \in W$  on peut trouver

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tels que } \begin{cases} x + 2y + z = \alpha \\ 3x - z = \beta \end{cases}$$

par exemple  $z = 0 \quad x = \frac{\beta}{3}$

$$\frac{\beta}{3} + 2y = \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha - \beta/3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \phi\left(\begin{pmatrix} \beta/3 \\ (\alpha - \beta/3)/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Exemple 3

$$\phi: M \rightarrow {}^t M$$

$$\text{Im}(\phi) = W$$

$$N \in W \quad N = {}^t \begin{pmatrix} {}^t N \end{pmatrix}$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} {}^t N \\ \uparrow \\ v \end{pmatrix}\right)$$

Exemple 4

$$\phi: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^0 = W \\ f \rightarrow 3f'$$

Si  $g$  est une fonction continue  
( $E \rightarrow W$ ) a-t-on  $g = \phi(f)$   
 $= \exists f'$

$$\frac{g}{3} = f'$$

on peut prendre n'importe  
quelle primitive de  $\frac{g}{3}$  pour  $f$   
(infinité de solutions, qui  
diffèrent par une constante)

Rq si on définit  $W$   
 $\phi: C^1 \rightarrow$  fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
continue dérivable (pas forcément  
continues)

$$\text{Im}(\phi) \neq W$$

Cas où l'espace de départ  $V$   
est de dimension finie

$\phi$  est alors déterminée par  
 $\phi(\vec{v}_1), \dots, \phi(\vec{v}_n)$  si

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  est une base de  $V$

Si  $\phi$  et  $\psi$  coïncident sur  
 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

$$(\phi - \psi)(\vec{v}_j) = \vec{0} = \phi(\vec{v}_j) - \psi(\vec{v}_j)$$

pour  $j = 1, \dots, n$   
si  $\vec{v} \in V, \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$

$$\begin{aligned} & (\phi - \psi)(\vec{v}) \\ &= (\phi - \psi)(\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n) \\ &= \lambda_1 (\phi - \psi)(\vec{v}_1) \\ &+ \dots + \lambda_n (\phi - \psi)(\vec{v}_n) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$(\phi - \psi)(\vec{v}) = \vec{0}$  pour tout  $\vec{v} \in V$   
donc  $\phi - \psi = \vec{0}$  donc  $\phi = \psi$

$\Delta W$  n'est pas forcément  
de dimension finie  
Par contre  $\text{Im}(\phi)$  l'est

$$\text{Im}(\phi) = \text{Vect}(\phi(\vec{v}_1), \dots, \phi(\vec{v}_n))$$

donc on peut se ramener au cas où  $W$  est de dimension finie.

Soit  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$  une base de  $W$

On peut définir la matrice de  $\phi$  dans les bases  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de  $V$  et  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$  de  $W$

$$\text{Mat}(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(\vec{v}_1) & \dots & \phi(\vec{v}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{w}_1 & & \vec{w}_m \end{pmatrix}$$

Exemple 1

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3x-z \end{pmatrix}$$

$$\text{base de } V \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{base de } W \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \phi(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème du rang

Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie, alors

$$\dim(V) = \dim \text{Ker}(\phi)$$

$$+ \dim \text{Im}(\phi)$$

Idée de preuve: calcul simultané de  $\text{Ker}(\phi)$  et  $\text{Im}(\phi)$  à partir de la matrice de  $\phi$  dans une base de  $V$  et une base de  $W$  (ou de  $\text{Im}(\phi)$  si  $W$  n'est pas de dimension finie)

On travaille sur  $\mathbb{R}^M$   
sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi(\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_2) \\ \phi(\vec{v}_3) \end{matrix}$$

en général on travaille sur  
la matrice dont les lignes  
sont les coordonnées de  
 $\phi(\vec{v}_1)$  à  $\phi(\vec{v}_n)$

$$\begin{matrix} \phi(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ \phi(\vec{v}_n) \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$$

$$\phi(3(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) - 2(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1))$$

Algorithme du pivot de Gauss  
→ forme triangulaire

Une combinaison linéaire  
de lignes revient à une  
combinaison linéaire de  
vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi(\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi(\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1) \\ 3L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$\text{Im}(\phi) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Ker}(\phi) = \text{Vect} (3\vec{v}_3 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_1)$$

A la fin de Gauss  
les lignes non nulles ce  
sont les coordonnées d'une  
base de  $\text{Im}(\phi)$

les lignes nulles correspondent  
à des vecteurs formant une  
base de  $\text{Ker}(\phi)$

Le nombre total de lignes  
 $= \dim(V) = \dim \text{Im}(\phi) + \dim \text{Ker}(\phi)$

En pratique pour trouver  $\text{Ker}(\phi)$  il est plus simple de résoudre  $\phi(\vec{v}) = \vec{0}$

ce système a pour matrice

la matrice de  $\phi$  (non transposée)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver  $\text{Im}(\phi)$

on cherche sa dimension

si  $= \dim(W)$  alors  $\text{Im} \phi = W$

sinon on fait Gauss sur

${}^t \text{Mat}(\phi)$

Si les coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  c'est le vecteur colonne  $X$

alors les coordonnées de  $\phi(\vec{v})$

dans la base  $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$

sont obtenues par le

produit de matrice

$$\text{Mat}(\phi) \cdot X$$