UJF 2012-13 Mat237 Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Montrer que la courbe plane d'équation polaire $r(\theta) = \cos 2\theta$, admet pour tangentes à l'origine les droites d'angles polaires $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$. Tracer la courbe.

Exercice 2. Déterminer les propriétés de symétrie d'une courbe plane satisfaisant $r(-\theta) = \varepsilon r(\theta)$, pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Exercice 3. Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre $f(t)$ pour les courbes paramétrées planes suivantes :

(i) $f(t) = (4t+1, 3t)$ (droite), (ii) $f(t) = (2\cos t, 2\sin t + 1)$ (cercle), (iii) $f(t) = (t, \sin t)$ (graphe du sinus).

Exercice 4. Soit C la spirale logarithmique d'équation polaire $r(\theta) = e^{-\theta}$. On notera $M(\theta)$ le point de C d'angle polaire θ.

1) Calculer la longueur de l'arc entre les points de paramètre 0 et α. En déduire un paramétrage de C par longueur d'arc.

2) Déterminer le repère de Frenet de C au point $M(\theta)$.

3) Calculer la courbure signée $\kappa(\theta)$ et le centre de courbure $O(\theta)$ en $M(\theta)$.

4) Tracer le cercle osculateur Γ en $\theta = 0$ et sa position relative par rapport à la courbe C.

Exercice 5. Soit la parabole P paramétrée par $x(t) = t$, $y(t) = t^2$.

Calculer la longueur de l'arc entre $t = 0$ et $t = \alpha$. En déduire un paramétrage par longueur d'arc de P.

Exercice 6. Calculer la courbure de la branche de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ et $x > 0$. En quel(s) point(s) est-elle maximale ?

Exercice 7. Montrer que le rayon de courbure de la parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ est $\frac{1}{\cos^3\theta(x)}$ où $\theta(x)$ désigne l'angle de la tangente pour le paramètre x. Trouver l'équation du cercle osculateur de plus petit rayon.

Exercice 8. Trouver le(s) sommet(s) de la courbe plane (i.e. les points de courbure maximale ou minimale) $y = e^x$.

Exercice 9. Soit la courbe Γ paramétrée par $x(t) = (\cos^2 t + 3)\sin t$, $y(t) = (\sin^2 t - 2)\cos t$.

a) Calculer la longueur d'arc $s(t)$ entre les points de paramètre 0 et t.

b) Calculer la courbure $\kappa(t)$ au point de paramètre t.

c) En déduire les sommets de la courbe Γ et les valeurs de la courbure $\kappa(t)$ en ces points.

d) En déduire bien que ressemblant grossièrement à une ellipse (faire un tracé rapide), Γ n'est pas une ellipse !

e) En déduire une paramétrisation $t \mapsto O(t)$ de la développée D de Γ. Que reconnait-on ? Conclusion ?

Exercice 10. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ pour les données suivantes :

i) $\omega = \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ et γ est le carré de centre O et de coté $2a$ orienté dans le sens direct.

ii) $\omega = (e^x \cos y + xy^2)dx + (x^2 y - e^x \sin y)dy$ et γ est l'arc de lemniscate $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $\theta \in [0, \pi/4]$.

iii) $\omega = y^2 dx + x^2 dy$ et γ est le cercle unité paramétré dans le sens direct.

Corrigé de l'exercice Exercice 5 TD 2 2012

Calculs préliminaires des dérivées. On a :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2+t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{(1-t)(1+t)}{(1+t^2)^2} \\ y' = \dfrac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(1+t^2)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{t(t^2+t+4)}{t+1} = -t^2-4+\dfrac{4}{t+1} \\ \left(\dfrac{y'}{x'}\right)' = -2t - \dfrac{4}{(t+1)^2} = -2\dfrac{t^3+2t^2+t+2}{(t+1)^2} = -2\dfrac{(t^2+1)(t+2)}{(t+1)^2} \end{cases}$$

a) Points singuliers $x' = y' = 0 \iff t = 1$ et donc le seul point singulier est $f(1) = (x(1), y(1) = (1/2, 3/2)$. Pour étudier la nature de ce point singulier, on pose $t = u+1$ et on fait le développement limité de $x(t) - x(1)$ et $y(t) - y(1)$ au voisinage de $u = 0$ à l'ordre 3, ce qui évite des calculs fastidieux de dérivées secondes et troisièmes et s'obtient comme suit :

$$\begin{cases} x(t) - x(1) = \dfrac{u+1}{u^2+2u+2} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{u^2}{4(u^2/2+u+1)} = -\dfrac{u^2}{4}(1+o(u)) \\ y(t) - y(1) = \dfrac{2+(u+1)^3}{u^2+2u+2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2u^3+3u^2}{4(u^2/2+u+1)} = \dfrac{2u^3+3u^2}{4}(1+o(u)) \end{cases}$$

D'où $f''(1) = (x''(1), y''(1) = (-1/2, 3/2) \neq 0$ donc en ce point singulier $p = 2$ et la tangente est de pente -3 et $f'''(1) = (x'''(1), y'''(1) = (0, 3)$ linéairement indépendant de $f''(1)$, donc $q = 3$. Le point singulier $f(1)$ est donc un point de rebroussement de 1ère espèce.

b) Branches infinies Si $t \to \pm\infty$, on a $x \to 0^{\pm}$ et $y \to \pm\infty$, il y a donc une asymptote verticale $x = 0$ et on sait de quel côté est située la courbe par rapport à cette asymptote.

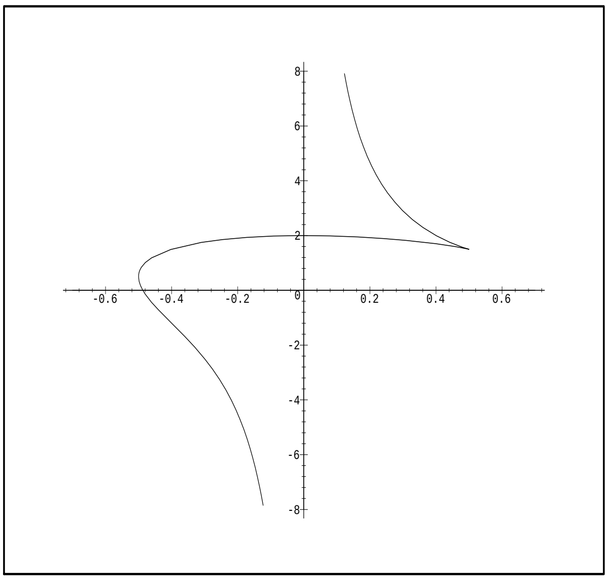
c) Convexité On étudie les variations de la pente $g(t) = y'(t)/x'(t)$ de la tangente aux points réguliers. Sa dérivée $g'(t) = -2\dfrac{(t^2+1)(t+2)}{(t+1)^2}$ est du signe de $-(t+2)$ qui change de signe en $t = -2$ ce qui donne le point d'inflexion $f(-2) = (-2/5, -6/5)$.

c) Courbure La courbure $\kappa(t) = (x'y'' - x''y')/(x'^2 + y'^2)^{3/2}$ est une expression trop compliquée dans cet exemple qu'on ne cherche pas à écrire sachant seulement qu'elle change de signe comme $g'(t)$.

d) Tableau de variation

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
x'		$-$	$-3/25$	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
x	0^-	$\searrow$	$-2/5$	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0^+
y'		$+$	$+$	$+$	2	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\nearrow$	$-6/5$	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$	$+\infty$

e) Tracé



Contrôle continu du 2 novembre 2011 de 10h45 à 12h45

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (5pts) Soit la spirale d'Archimède C d'équation polaire $r(\theta) = \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

On note $h(\theta) = \theta e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ l'affixe du point $P(\theta)$ de C de paramètre θ.

1) Calculer $h'(\theta)$ puis la longueur de C entre les points $P(0)$ et $P(1)$ [changement de variable $\theta = \operatorname{sh} x$ conseillé].

2) Déterminer l'angle φ entre $\overrightarrow{OP}(\theta)$ et $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(\theta)$.

3) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{t}(\theta), \vec{n}(\theta))$ de C au point $P(\theta)$. Donner une construction géométrique du repère $(\vec{t}(1), \vec{n}(1))$.

***

Exercice 2 (14pts) Soit la courbe Γ paramétrée $t \in [-\pi, \pi] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = (4\cos^2 t + 5)\sin t \\ y(t) = (4\sin^2 t - 1)\cos t \end{cases}$$

On notera $f(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ l'affixe du point $M(t)$.

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Vérifier que $f'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)e^{it}$.

2) En déduire la longueur d'arc L entre les points de paramètre 0 et $\pi/4$.

3) Déterminer les paramètres des points singuliers de la courbe Γ.

4) Calculer $f''(t) = x''(t) + iy''(t)$. En déduire la courbure signée $\kappa(t)$ en un point non singulier de paramètre t.

5) Indiquer les symétries de la courbe Γ qui permettent de ramener son tracé à celui de l'arc Γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$.

6) Vérifier que le point $f(\pi/3)$ est le seul point singulier de l'arc Γ'. Déterminer la tangente à la courbe en ce point. Montrer que $f'''(\pi/3)$ est linéairement indépendant de $f''(\pi/3)$, en déduire la nature du point singulier $f(\pi/3)$.

7) Dresser un tableau de variation pour $t \in [0, \pi/2]$. En déduire un tracé de Γ' puis de Γ grâce à ses symétries.

8) Déterminer une paramétrisation $t \in [-\pi, \pi] \to O(t)$ de la développée D de Γ. Que reconnaît-on ?

***

Exercice 3 (6pts) Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $\omega = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dy$.

1) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

2) Calculer l'intégrale curviligne $I_1 = \int_{\gamma_1} \omega$ où γ_1 est le quart de cercle paramétré par $t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $I_2 = \int_{\gamma_2} \omega$ où γ_2 est le segment paramétré par $t \in [0, 1] \mapsto (1-t, t)$.

[on pourra remarquer que $\dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1} = \dfrac{2}{(2t-1)^2 + 1}$]

4) Comparer les résultats. Que retrouve-t-on ?

5) Que représente la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ pour la forme ω ?

***

Corrigé du contrôle continu du 2 novembre 2011

Exercice 1.

1) $h'(\theta) = e^{i\theta} + \theta i e^{i\theta}$. Comme les vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ d'affixes $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$ sont orthogonaux et unitaires, on a $||P'(\theta)|| = \sqrt{1+\theta^2}$ et donc la longueur L de C entre les points $P(0)$ et $P(1)$ est avec $a = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\theta^2}d\theta = \int_0^a \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\operatorname{ch} x dx = \int_0^a \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)du = \Big[\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2}\Big]_0^a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

[changement de variable $\theta = \operatorname{sh} x$].

2) Toujours dans le repère orthonormé $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, la pente du vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}(\theta)$ est $\tan\varphi = \theta$ et donc $\varphi = \arctan\theta$.

3) Le vecteur $\vec{t}(\theta)$ est d'affixe $h'(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$ et $\vec{n}(\theta)$ celui d'affixe $ih'(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$. Construction géométrique du repère $(\vec{t}(1), \vec{n}(1))$: il s'obtient du repère $(\vec{u}(1), \vec{v}(1))$ en tournant de $\varphi = \arctan 1 = \pi/4$.

Exercice 2.

1) On a $x(t) = (4\cos^2 t + 5)\sin t$ et $y(t) = (4\sin^2 t - 1)\cos t$.

Le calcul donne $x'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)\cos t$ et $y'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)\sin t$ et donc

$$f'(t) = x'(t) + iy'(t) = 3(4\cos^2 t - 1)e^{it}.$$

2) $L = \int_0^{\pi/4} 3(4\cos^2 t - 1)dt = \int_0^{\pi/4} 3(2\cos 2t + 1)dt = \Big[3\sin 2t + 3t\Big]_0^{\pi/4} = 3(1+\pi/4)$.

3) Les paramètres t des points singuliers de la courbe Γ sont ceux qui vérifient
$4\cos^2 t - 1 = (2\cos t - 1)(2\cos t + 1) = 0$ c'est-à-dire $t = \pm\pi/3$ ou $t = \pm 2\pi/3$.

4) On a

$$f''(t) = (f'(t))' = -24(\sin t\cos t)e^{it} + 3(4\cos^2 t - 1)ie^{it}$$

et donc la courbure signée $\kappa(t) = \det(f'(t), f''(t))/|f'(t)|^3 = (3(4\cos^2 t - 1))^2/|3(4\cos^2 t - 1)|^3 = 1/|3(4\cos^2 t - 1)|$ en un point non singulier de paramètre t.

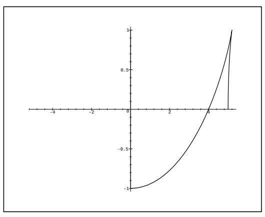
5) Le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Oy et $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Ox. Pour tracer la courbe Γ, il suffit donc de tracer l'arc Γ' des points de paramètres $t \in [0, \pi/2]$. En ajoutant à Γ' le symétrique de Γ' par rapport à l'axe Ox, on obtient l'arc Γ'' des points de paramètres $t \in [0, \pi]$ et en ajoutant le symétrique de Γ'' par rapport à l'axe Oy, on obtient la courbe Γ tout entière.

6) Le point $f(\pi/3)$ est le seul point singulier de l'arc Γ' d'après 3). En ce point, on a $f''(\pi/3) = -6\sqrt{3}e^{i\pi/3} \neq 0$ donc le vecteur d'affixe $f''(\pi/3) = -6\sqrt{3}e^i\pi/3$ dirige la tangente à la courbe en ce point. On a $f'''(t) = a(t)e^it + (3(4\cos^2 t - 1) - 24\sin t\cos t)ie^{it}$ et donc $f'''(\pi/3)$ a une composante non nulle selon $ie^{i\pi/3}$. Les deux vecteurs d'affixes $f''(\pi/3)$ et $f'''(\pi/3)$ sont linéairement indépendants donc $p = 2$ et $q = 3$: le point singulier $f(\pi/3)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

7) Tableau de variation pour $t \in [0, \pi/2]$:

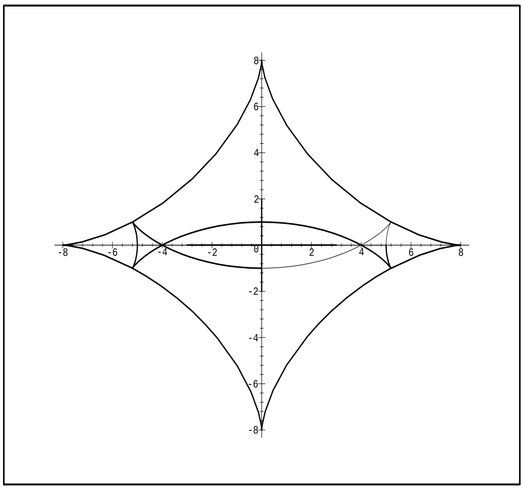
t	0		$\pi/3$		$\pi/2$
x'	9	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	5
y'	0	$+$	0	$-$	-3
y	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Tracé de l'arc Γ' correspondant :



8) Le calcul donne $O(t) = M(t) + \rho(t)\vec{n}(t) = (8\cos^3 t, 8\sin^3 t)$. La développée D est une *astroïde*.

Tracé de Γ et de sa développée D



Exercice 3 Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $\omega = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dy$.

1) ω n'est pas *fermée* car

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

ce qui implique que ω n'est pas exacte non plus.

2) On a $I_1 = \displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{\pi/2} (\cos t + \sin t)d(\cos t) + (\cos t - \sin t)d(\sin t) = \int_0^{\pi/2} (\cos 2t - \sin 2t)dt = -1$ si γ_1 est le quart de cercle paramétré par $t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$.

3) On a $I_2 = \displaystyle\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}d(1-t) - \frac{2t-1}{2t^2-2t+1}dt = \int_0^1 \Big(-\frac{2}{(2t-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{(2t^2-2t+1)'}{2t^2-2t+1}\Big)dt =$ $\Big[\arctan(1-2t) - \dfrac{1}{2}\ln(2t^2-2t+1)\Big]_0^1 = -\pi/2$ si γ_2 est le segment paramétré par $t \in [0,1] \mapsto (1-t, t)$.

4) Comme $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega \neq \int_{\gamma_2} \omega$ alors que les chemins γ_1 et γ_2 ont même origine et même extrémité, on retrouve que ω n'est pas exacte.

5) Comme $(x^2+y^2)\omega = (x+y)dx + (x-y)dy = d\Big(\dfrac{x^2}{2} + xy - \dfrac{y^2}{2}\Big)$, la fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ est un facteur intégrant pour la forme ω.

***