

Exercice 1 Pour a, b deux réels fixés strictement positifs, on considère la courbe suivante

$$\begin{cases} x(t) &= 2t + \frac{a}{t^2} \\ y(t) &= t^2 + \frac{2b}{t} \end{cases}$$

1. Donner les domaines de définition et d'étude, puis étudier les branches infinies.
2. Déterminer une condition sur a et b telle que la courbe possède un point de rebroussement. Dans ce cas, déterminer la nature du point de rebroussement (*Indication : on pourra calculer les dérivées $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ pour quelques $k \in \mathbb{N}$*).

Pour les questions suivantes, on supposera que $a = b = 2$.

3. Donner le tableau de variation, étudier les changements de convexité, puis tracer la courbe (avec le sens de parcours).
4. Donner l'expression de la longueur de l'arc entre les paramètres $t = 2$ et $t = 2.5$, puis en donner une valeur approchée en utilisant la calculatrice.

Exercice 2. Étudier et tracer la courbe polaire suivante : $\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$.

Donner la valeur de la longueur de la boucle sous la forme d'une intégrale, et donner en une valeur approchée.