

partiel de novembre 2022

calculatrice et feuille recto-verso A_4 manuscrite autorisées.

Barème indicatif : exercice 1 sur 12 points, exercice 2 sur 10 points

Exercice 1 :

On considère la courbe C paramétrée par $t \mapsto \begin{pmatrix} -2t + \frac{1}{1-2t} \\ t^2 - \frac{1}{1-2t} \end{pmatrix}$.

1. Donner le domaine de définition et le domaine d'étude de C .
2. La courbe admet-elle des asymptotes. Si oui lesquelles ?
3. Faire le tableau de variation.
4. Vérifier que la courbe admet un point singulier. Donner un vecteur tangent en ce point singulier et la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de ce point.
5. A l'aide de la calculatrice trouver le(s) point(s) où la courbe change de convexité. Détailler les commandes utilisées. Donner une équation de la tangente à la courbe en ce(s) point(s).
6. Tracer la courbe et indiquer le sens de parcours.
7. Quel est le centre du cercle osculateur au point de paramètre 0 ? Tracer le cercle sur le dessin de la courbe.
8. Donner l'expression de la longueur de l'arc de courbe situé entre les points de paramètre -1.5 et 0 , puis en donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2 :

Soit C la courbe du plan donnée par l'équation polaire $r(\theta) = \tan(\theta)$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction r et réduire le domaine d'étude par des arguments de périodicité et de symétrie.
2. Faire le tableau de variation de la fonction r sur le domaine d'étude.
3. Quelle est la tangente à la courbe C au point $O = (0, 0)$?
4. Vérifiez que la courbe C contient le point $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donner un vecteur directeur de la tangente à C au point A .

5. Montrer que la courbe C admet des asymptotes et donner une équation pour chacune d'entre elle.
6. Tracer la courbe C .
7. On considère la droite Δ d'équation $y = x$ et le domaine D de \mathbb{R}^2 délimité par l'arc de la courbe C entre les points O et A et le segment $[O; A]$ porté par la droite Δ . Calculer l'aire de D . Détailler les calculs à effectuer en expliquant la démarche. Utiliser la calculatrice pour obtenir une valeur exacte et une valeur approchée de l'intégrale qui intervient dans ce calcul.