Algèbre et arithmétique pour Master-1

Odile Garotta, Claude Moser et Alexei Pantchichkine

Préface

Ce livre est écrit à partir d'un cours dans le cadre de la première année du Master. Il porte sur les fondements algébriques nécessaires pour la poursuite d'études en Master deuxième année (ex DESS) avec la spécialité "Cryptologie, Sécurité et Codage d'Information" (ces fondements sont aussi souhaitables dans la spécialité mathématiques approfondies -ex DEA-, pour la géométrie algébrique et la théorie des nombres).

Il s'agit premièrement des outils d'algèbre commutative : *anneaux, corps, polynômes* utilisés en
- théorie des codes-correcteurs d'erreurs
- cryptologie à clef publique.

Il existe une analogie profonde entre l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers et l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ou l'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps K). En effet, ces ensembles sont des *anneaux* munis d'une division euclidienne (division avec reste).

Il est utile d'étudier la divisibilité des polynômes avec le point de vue de la divisibité des nombres, et réciproquement, on expliquera dans le cours comment on peut voir les nombres comme un analogue des fonctions. Dans le livre on développe systématiquement cette analogie : *le théorème des restes chinois* est analogue au *théorème d'interpolation de Lagrange*, ce qui permet d'effectuer *la multiplication rapide des polynômes*. Les *polynômes irréductibles* sont l'analogue des *nombres premiers*. *La théorie des corps finis* est entièrement basée sur cette analogie.

Dans la troisième partie on considère les systèmes algébriques sur $\mathbb{Z}$ ou sur un corps fini, vus comme des *variétés algébriques*.

Table des matières

Première partie

Arithmétique élémentaire

1 Les entiers

1.1 Divisibilité des entiers. Lien avec l'algèbre et l'analyse.

NOTATIONS. On notera $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Si X est un ensemble, on note $\sharp X$ son cardinal :

$$\sharp X = \mathrm{Card}\,(X) = |X|.$$

On écrit $|X| < \infty$, si X est un ensemble fini. Si a est un nombre réel, on note $|a| = \sup(a, -a)$ sa valeur absolue.

Donc,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

La notation $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand ("**Z**ahlen") (depuis la 19 siècle).

DÉFINITION 1.1.1 *Si a et b sont deux entiers relatifs , on dit que a* divise *b et on note $a|b$ s'il existe un entier relatif c tel que $b = ac$. On dit également que b est un* multiple *de a ou a un* diviseur *de b. On note $a\mathbb{Z}$ l'insemble des multiples de a.*

Un nombre entier positif p est dit premier *s'il est strictement supérieur à 1 et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.*

On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.
Un nombre entier positif n est dit composé *s'il n'est pas premier.*

Par exemple, $2 \mid 6$ et $389 \mid 97734562907$:

$$97734562907 = 389 \cdot 251245663 = 41 \cdot 193 \cdot 389 \cdot 31751.$$

Les nombres premiers sont

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots, 41, \ldots, 193 \ldots, 389, \ldots, 2003, \ldots, 31751, \ldots.$$

et les nombres composés sont

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots, 666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37, \ldots, 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29, \ldots.$$

(voir [Stein], Chap. 1).

Maintenant supposons que n est tout entier positif. Alors, de même façon, n peut être écris comme un produit des nombres premiers :

– Si n est premier, c'est fait.
– Si n est composé alors $n = ab$ avec $a, b < n$.

En utilisant raisonnement par récurrence, a, b sont tous les deux produits des nombres premiers, donc n est aussi un produit des nombres premiers. Ce résultat explique le terme *nombre premier* : tous les autres entiers positives sont construites commes leurs produits.

Deux résultats de base de la théorie des nombres

(connues des cours de licence) disent :

(1) L'ensemble $\mathcal{P}$ de tous les nombres premiers est *infini*;

(2) Théorème fondamental de l'arithmétique :

Tout entier positif n se décompose de façon unique sous la forme

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_t} \text{ avec } p_i \in \mathcal{P}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_t, \ k_i \in \mathbb{N}$$

Le premier résultat se demontre par l'absurde : si l'on avait $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, on considèrera $q = 1 + p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Alors, $q \notin \mathcal{P}$ par l'hypothèse, mais aucun p_i divise q, contradiction avec ce qui précède.

On rapellera une démonstration du deuxième resultat plus tard, sous une forme plus générale (pour tous les anneaux eucildiens).

Rappelons quelques propriétés de base de la divisibilité :

Proposition 1.1.2 *Si a, b, c sont des entiers relatifs, on a*
(i) $a|a$
(ii) si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$
iii) si $a|b$ et $a|c$, alors $a|b+c$

Définition 1.1.3 *Si b et un entier relatif non nul,et si a et un entier relatif il existe une unique paire (q, r) d'entier relatifs tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$. L'entier q est appelé le quotient de a par b, et r le reste de la division, on le notera ici $a\%b$ (ou $a \bmod b$).*

Exercice 1.1.4 *Démontrer en détails Proposition 1.1.2*

Lien avec l'algèbre et l'analyse. Analogies entre nombres et fonctions.

L'exsemble $\mathbb{Z}$ est un *anneau commutatif* : il existe deux opératons suivantes : pour tous paires $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on a

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto c = a + b \in \mathbb{Z} \quad (\text{"}addition\text{"});$$
$$\times : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto d = a \times b = a \cdot b \in \mathbb{Z} \quad (\text{"}multiplication\text{"});$$

avec les propriétés des axioms d'anneaux (commutativité et associativité de $+$ et de $\times$, distributivité $a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$, l'existence de 0 et de 1, l'existence d'un (unique) élémént opposé $-a \in \mathbb{Z}$ à tout $a \in \mathbb{Z}$.

L'anneau des nombres entiers $\mathbb{Z}$ est un objet algébrique fondamental, aussi bien que l'anneau $\mathbb{R}[X]$ ($\mathbb{C}[X]$) des polynômes à coefficients réels (complexes). Ces deux anneaux sont commutatifs, associatifs unitaires sans diviseurs de zéro. Il est commode d'exprimer la notion de divisibilité dans un anneau R ci–dessus à l'aide de la notion d'*idéal :*

rappellons qu'un idéal I de R est une partie de R qui est fermée par rapport aux opérations : pour tous $a, b \in I$)

l'addition $a + b \in I$, *passage à l'opposé*, $a \mapsto -a$, et la *multiplication externe* par tout élément x de R : $a \mapsto ax$.

Tout élément $a \in R$ définit l'idéal $I = (a) = \{ax \mid x \in R\}$, et l'affirmation "$a$ divise b" est équivalent à "$b \in (a)$".

Un idéal de type (a) est appelé idéal *principal*, et on rappelera que les anneaux $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ sont principaux, c'est à dire, tous ces ideaux sont *principaux*.

La démonstration de ce fait est la même pour les nombres et pour les polynômes : pour un idéal I quelconque on effectue la division avec reste par un élément non nul de I avec la plus petite valeur absolue (le plus petit degré respectivement), et la définition d'idéal implique que le reste doit être zéro.

On verra que le théorème de l'existence et de l'unicité de décomposition en facteurs irréductibles est valable dans tout anneau principal.

EXEMPLE 1.1.5 *L'unicité dans la deuxième propriété n'est pas toujours valable même si l'existence d'une décomposition en éléments premiers a lieu. Un exemple connu est donné par l'anneau* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *dans lequel il existe essentiellement différentes factorisations en éléments premiers :*

$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$

EXEMPLE. PROBLÈME DE FERMAT. Pierre de Fermat (1601–1665) à soulevé son probème célèbre (c.1637) dans la marge d'une traduction des "Arithmétiques" de Diophante :

"Décomposer un cube en deux autre cubes, une quatrième puissance, et généralement, une puissance quelconque, en deux puissances de même nom au-dessus de la second puissance, est une chose impossible et j'en ai assurément trouvé l'admirable démonstration. La marge trop exiguë ne la contiendrait pas".

En langage moderne :

$$\text{pour} \quad n > 2 \quad \begin{cases} x^n + y^n = z^n \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Longrightarrow xyz = 0 \qquad (FLT(n))$$

("Fermat's Last Theorem").

Le 11 mars 1847 G.Lamé informait l'Académie des Sciences de Paris d'une démonstration complète à la base de l'identité

$$x^p + y^p = (x + y)(x + \zeta y) \cdot \cdots \cdot (x + \zeta^{p-1} y), \quad \zeta = \zeta_p = \exp(2\pi i/p), p \neq 2$$

admettant la factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ (c'est-à-dire, la décomposition unique en facteurs premiers). Immédiatement J.Liouville dit : "N'y a-t-il pas là une lacune à remplir ?" (et dans quelques mois A.Cauchy publia une note sur la non-factorialité de $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$).

L'idée de divisibilité dans les anneaux a beaucoup influencé la théorie des nombres.

Nombres comme analogues des fonctions

L'opération de division avec reste permet de voir tout nombre entier a comme une fonction

$$f_a : \mathcal{P} \to \mathbb{N}, \quad p \mapsto a\%p = a \bmod p. \qquad (1.1)$$

Exemple 1.1.6

$$f_{20}(3) = 2, f_{20}(7) = 6, f_{20}(2) = 0, f_{20}(5) = 0, f_{20}(257) = 20$$
$$f_{-1}(3) = 2, f_{-1}(7) = 6, f_{-1}(2) = 1, f_{-1}(5) = 4, f_{-1}(257) = 256$$

Ceci dit, les fonctions f_{20} et f_{-1} prennent les mêmes valeurs en $p = 3$ et $p = 7$. La fonction f_{20} possède "un zéro double" en $p = 2$, car $20 = 2^2 \cdot 5$, tandis que la fonction f_{-1} n'a pas de zéros.

Exercice 1.1.7 *Montrer que si n est premier alors la fonction f_n ne s'annule qu'en un seul point . L' affirmation réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 1.1.8 *Déssiner la fonction f_6.*

Exercice 1.1.9 *Montrer que tout nombre entier a est déterminé par la fonction correspondente f_a*

1.2 Factorisation des nombres. Lien avec l'informatique et l'algorithmique.

Soit $n = 1275$, et remarquons que $17 \mid 1275$, alors n est certainement composé, $n = 17 \cdot 75$. Puis, 75 est $5 \cdot 15 = 5 \cdot 5 \cdot 3$. Donc finalement, $1275 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$.

Remarquer qu'on peut agir différement pour factoriser le nombre 1275, par exemple $1275 = 5 \cdot 255$. On obtient $255 = 5 \cdot 51$ et $51 = 17 \cdot 3$, donc le résultat final est le même. Le résultat sur l'unicité ci-dessus dis que c'est toujours le cas.

Lien avec l'informatique et l'algorithmique. Ecriture base $m \in \mathbb{N}$.

Pour effectuer les opérations algébriques dans $\mathbb{Z}$ on utilise un système de numération de la base $m \in \mathbf{N}$: la notation

$$d = (d_{k-1}, d_{k-2}, \ ..., \ d_1, d_0)_m$$

signifie que $d = d_{k-1}m^{k-1} + ... + d_0$ avec des chiffres $d_i \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Le nombre de chiffres d_i utilisés pour cela est égale à $[\log_m n] + 1$. Une méthode commode utilsée par les ordinateurs correspond à $m = 2$, et on appelle le système de numération binaire (de la base 2). Le chiffre (digit) binaire (c'est-à-dire 0 ou 1) s'appelle "bit" (en anglais "bit" est une abréviation de "binary digit").

L'analyse simple des algorithmes "scolaires" pour l'addition et pour la multiplication montre que pour l'addition de deux nombres écrits avec k et l bit, $k \geq l$, on a besoin de k operations booleénnes (bit–opérations) qui se réduisent à l'addition des chiffres correspondants, (avec mémorisation et transfert du chiffre 1 à la position précédente dans le cas "1 + 1").

Exemple 1.2.1

$$\begin{array}{cccccccccc} {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0_{(2)} & & \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0_{(2)} & & (120 + 30 = 150) \\ & - & - & - & - & - & - & - & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0_{(2)} & & \end{array}$$

Dans cet exemple $(1111000)_2 = 8 \cdot 15 = 120$, $(0011110)_2 = 2 \cdot 15 = 30$.

On voit que pour la multiplication des nombres à k et l chiffres on a besoin de $2kl$ bit–opérations.

EXEMPLE 1.2.2

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1_{(2)} & \\
\times & & & & 1 & 1 & 1_{(2)} & \\
\hline
- & - & - & - & - & - & - & - \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
+ & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1_{(2)}, &
\end{array} \qquad (13 \times 7 = 91).$$

Le nombre de bit–opérations nécessaires pour l'exécution d'un algorithme caractérise essentiellement *le temps d'exécution.*

Passage d'un système de numération à un autre. Le temps nécessaire pour passer de la forme binaire d'un nombre n vers la forme de la base m est facile à estimer par (k^2l) car on a besoin pour cela de (k) divisions avec reste, avec pour chaque division (kl) bit–opératons ("division en colonne") où l est le nombre de bit dans l'écriture de m, k est le nombre de bit dans l'écriture de n.

REMARQUE. Rappelons que la *méthode de Hörner* permet de trouver facilement la valeur $n = \sum_{i=0}^{r} c_i m^i$.

On considère le polynôme

$f(x) = g_n(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i$, et $x = m$ on calcule $g_n(m)$ de façon suivante : soient

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$$

un polynôme, et on cherche un autre polynôme

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0, \quad b_{n-1} \neq 0$$

tel que

$$f(x) = (x - c)q(x) + r,$$

En comparant les coefficients des puissances de x on obtient

$$a_n = b_{n-1},\ a_{n-2} = b_{n-2} - cb_{n-1},\ \cdots,$$

$$a_1 = b_0 - cb_1,\ a_0 = r - cb_0,\ r = f(c).$$

Ceci implique

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-k} = cb_{n-k+1} + a_{n-k} (k = 2,\ \cdots, n)$$

Il est commode de faire le tableau suivant (le schéma de Hörner)

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$	$\cdots$	$b_0 = cb_1 + a_1$	$f(c) = cb_0 + a_0$

En particulier, pour un nombre $n = \sum_{i=0}^{r} c_i m^i$ on considère le polynôme

$f(x) = g_n(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i$, et $x = m$ on obtient

	c_r	c_{r-1}	$\cdots$	c_1	c_0
m	$b_{r-1} = c_r$	$b_{r-2} = mb_{r-1} + c_{r-1}$	$\cdots$	$b_0 = mb_1 + c_1$	$g_n(m) = mb_0 + c_0$

Ces méthodes d'addition, de multiplication, de division avec reste, de passage d'une forme d'écriture à une autre donnent des exemples d'algorithmes. On va appeller *algorithme* une procédure de calcul décrite pas par pas. On appelle *algorithme polynômial* de calcul sur des nombres naturels n_1, n_2, ..., n_r, décrits à l'aide de k_1, k_2, ..., k_r bit respectivement, un algorithme avec le temps d'éxécution inférieur où égal à $\mathcal{O}(k_1^{d_1} k_2^{d_2} \cdot ... \cdot k_r^{d_r})$ (pour des constantes d_1, d_2, ..., $d_r \in \mathbb{N}$).

Dans ce qui suit on va donner d'autres exemples des algorithmes polynômiaux : exponentiation modulo un nombre naturel fixé, algorithme d'Euclide.

Cela ne signifie en rien que la recherche des facteurs premiers d'un nombre entier soit un travail facile en général. La "preuve" en est que la cryptographie moderne réside essentiellement sur la difficulté technique de factorisation de grands nombres entiers en produit de nombres premiers.

Problème de Gauss : *Existe-t-il un algorithme pour factorisation de tout nombre donné n qui marche aussi rapide que son "temps d'execution" soit borné par un polynôme du nombre de chiffres décimales de n ?*

La plupart des mathematicians pensent que la réponse est négative, mais personne ne l'a encore prouvé rigoureusement. S'il existait un tel algorithme, alors les cryptosystèmes qu'on utilise pour les transactions interbancaires peuvent être facilement "cassés".

Difficulté comparative de la multiplication et de la factorisation de nombres entiers.

Considérons le développement

$$(10^{71} - 1)/9 = 241573142393627673576957439049 \times \\ \times 459948113478868463102217288952230343018 39.$$

Avec une certaine patience on peut multiplier les deux facteurs pendant quelques heures :

```
> 241573142393627673576957439049*459948113478868463102217288952230343018
> 39;
```

```
111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111\
111111
```

Cependant, pour trouver une telle factorisation par la méthode standard de la division successive on aurait besoin de 10^{10} ans de travail des ordinateurs qui font une division en 10^{-9} seconds. En effet, on a réussi à trouver cette factorisation à l'aide du superordinateur CRAY-I en utiisant certains algorithmes très fins qui rendent ce travail abordable. L'estimation des meilleurs algorithmes modernes de factorisation d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est $(\exp(C(\log n)^{1/3}(\log\log n)^{2/3})$.

Difficulté de la vérifications de primalité.

D'autre part, il existe des méthodes assez rapides pour vérification de primalité des grand nombres. Par exemple, un mathematicien canadien H.Willams a démontré en 1988 que le nombre $(10^{1031} - 1)/9$

est premier. Actuellement on peut vérfier sur les ordinateurs la *primalité* d'un nombre naturel avec 100 digits (c'est-à-dire, la propriété d'être premier) en quelques minutes.

Dans un travail récent de Manindra Agrawal, Neeraj Kayal and Nitin Saxena un algorithme polynômial a été trouvé pour *vérifier* la primalité d'un nombre naturel (*sans trouver* un seul facteur). L'algorithme utilise une version polynômial du "petit théorème de Fermat", et son "temps d'execution" est borné par $\mathcal{O}(\log n)^{12}$ du nombre de chiffres décimales de n (voir le manuscript "Primes is in P" de 2002).

Un défi ("challenge") à $10,000

Dès mois de février 2002, si vous arrivez à factoriser le nombre suivant de 174-chiffres décimales, connu sous le nôm "RSA-576", alors la companie RSA vous payera DIX MILLE DOLLARS!

188198812920607963838697239461650439807163563379417382700 7
633564229888597152346654853190606065047430453173880113033 9
671619969232120573403187955065699622130516875930765025705 9

Ce nombre est appelé RSA-576, car il possède 576 chiffres binaires. Voir [Stein], Chap. 1, et

http ://www.rsasecurity.com/rsalabs/challenges/factoring/index.html

pour les details (il y a même un défi à $200,000).

1.3 Application à la multiplication rapide.

Il est clair, que les opérations algébriques (l'addition, la multiplication, l'exponentiation) dans les anneaux sont très importantes ; c'est pourquoi on va considérer des méthodes commodes pour effectuer ces opérations.

Soit m un entier strictement positif. Alors on peut voir l'écriture en base m d'un entier positif

$$n = (c_{k-1} \cdots c_1 c_0)_m$$

(i.e.

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} c_i m^i \text{ avec } 0 \leq c_i \leq m-1)$$

comme un analogue d'un polynôme $g_n(x) = \sum_{i=0}^{r} c_i x^i$ parce que $n = g(m)$. Pour multiplier deux nombres n et $n' = \sum_{i=0}^{r} c'_i x^i$ on peut utiliser une *multiplication rapide* des polynômes : $g_{n'}(x) = \sum_{i=0}^{r} c'_i x^i$, $n' = g_{n'}(m)$, alors

$$nn' = g_n(m) g_{n'}(m) = (g_n g_{n'})(m).$$

Un exemple modèle pour la multiplication rapide des nombres et des polynômes est donné par la règle :

$$(ax+b)(cx+d) = ac(x^2+x) + (b-a)(c-d)x + bd(x+1) \tag{1.2}$$

donc la multiplication des polynômes de degré ≤ 1 nécessite seulement 3 multiplications essentiels au lieu de 4 multiplications par la méthode traditionnelle. On utilise cette règle avec $x = 2^l$.

Rapellons que l'algorithme traditionnel pour la multiplication de deux nombres de $\leq k$ chiffres binaires ($m = 2$) nécessite $\leq k^2$ opérations élémentaires (de type $1_2 + 1_2 = 10_2$).

La règle (1.2) amène à un algorithme rapide de multiplication dont le temps d'execution est majoré par $\mathcal{O}(k^{\log_2 3})$.

1.4 pgcd, ppcm

DÉFINITION 1.4.1 *Soit I un ensemble et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers.*

(i) On dit que $d \in \mathbb{N}$ est un pgcd de la famille $(a_i)_{i\in I}$ si

$$\forall (i \in I, d|a_i) \text{ et } \forall r \in \mathbb{Z}, \forall (i \in I, r|a_i) \Rightarrow r|d$$

(ii) On dit que $m \in \mathbb{N}$ est un ppcm de la famille $(a_i)_{i\in I}$ si

$$\forall (i \in I, a_i|m) \text{ et } \forall r \in \mathbb{Z}, \forall (i \in I, a_i|r) \Rightarrow m|r$$

NOTATIONS. $r = \text{pgcd}((a_i)_{i\in I})$, $m = \text{ppcm}((a_i)_{i\in I})$.

REMARQUE.

Si $I = \emptyset$, alors le pgcd vaut 0 et ppcm vaut 1. Si $I = \{0\}$ et $a_0 > 0$, alors le pgcd et ppcm coincident avec a_0.

Algorithme d'Euclide pour le calcul de pgcd

Pour des entiers a, b on écrit $a|b$ si a divise b, c'est-à-dire$b = ad$ pour un entier d. Si p est premier et p^α le plus grande puissance de p divisant n on écrit $p^\alpha \| n$ et $\alpha = ord_p n$. Le théorème de factorisation peut être facilement déduit de son cas particulier : si un nombre premier p divise ab alors soit $p|a$ soit $p|b$. Cette propriété découle de l'algorithme d'Euclide.

Si l'on connait les factorisations de a et b en produit de nombres premiers on voit directement l'existence et la forme explicite du plus grand commun diviseur (notation : $\text{pgcd}(a, b)$) et du plus petit commun multiple (notation $\text{ppcm}(a, b)$). Notamment, posons $m_p = \min(ord_p(a), ord_p(b))$, $g_p = \max(ord_p(a), ord_p(b))$. Alors

$$\text{pgcd}(a, b) = \prod_p p^{m_p}, \quad \text{ppcm}(a, b) = \prod_p p^{g_p}.$$

Un fait surprenant est qu'on peut calculer facilement le pgcd, par exemple $\text{pgcd}(2261, 1275)$, sans utiliser la factorisation. Plus précisemment :

$$2261 = 1 \cdot 1275 + 986.$$

On remarque que le nombre d divise tous les deux 2261 et 1275, alors d divise automaticment leur différence 986.

De même façon, si un nombre divise les deux 1275 et 986, alors il divise aussi leur somme 2261. Donc on progrèsse :

$$\text{pgcd}(2261, 1275) = \text{pgcd}(1275, 986).$$

Essayons encore :

$$1275 = 1 \cdot 986 + 289,$$

donc $\text{pgcd}(1275, 986) = \text{pgcd}(986, 289)$:

$$986 = 3 \cdot 289 + 119$$
$$289 = 2 \cdot 119 + 51$$
$$119 = 2 \cdot 51 + 17.$$

Ceci dit, $\text{pgcd}(2261, 1275) = \cdots = \text{pgcd}(51, 17)$, i.e. 17 car $17 \mid 51$, et

$$\text{pgcd}(2261, 1275) = 17.$$

Cette méthode est très efficace et elle donne l'algorithme classique suivant :

Algorithme d'Euclide :

On fix $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a > b$. En utilisant la "division avec reste" (division euclidienne), on écrit

$$a = bq + r, \text{avec } 0 \leq r < b. \tag{1.3}$$

Alors, comme ci-dessus,

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r).$$

On pose $a_1 = b$, $b_1 = r$, et on répète jusqu'a $r = 0$. On calcule assez rapidement $\text{pgcd}(a, b)$. L'algorithme d'Euclide consiste donc en le calcul d'une suite

$$d_0, \quad d_1, \quad d_2, \ldots$$

où $d_0 = a, \quad d_1 = b$ et d_{i+1} est le residu de d_{i-1} modulo d_i :

$$d_{i+1} = d_{i-1} - td_i.$$

On s'arrête lorsque $d_k = 0$; alors $d_{k-1} = \text{pgcd}(a, b)$. On peut montrer (en exercice) que le nombre des divisions est borné par $5 \log_{10} \max(a, b)$ (*le théorème de Lamé*).

THÉORÈME 1.4.2 *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ des entiers positifs. Alors il existe* $\text{pgcd}(a, b)$.

PREUVE. On observe simplement que $d = d_{k-1} = \text{pgcd}(a, b)$ satisfait les conditions de la définition 1.4.1.

EXEMPLE. On pose $a = 15$ et $b = 6$.

$$\begin{array}{rcll} 15 & = & 6 \cdot 2 + 3 & \text{pgcd}(15, 6) = \text{pgcd}(6, 3) \\ 6 & = & 3 \cdot 2 + 0 & \text{pgcd}(6, 3) = \text{pgcd}(3, 0) = 3 \end{array}$$

EXEMPLE. Soit $a = 150$ et $b = 60$.

$$\begin{array}{rcll} 150 & = & 60 \cdot 2 + 30 & \text{pgcd}(150, 60) = \text{pgcd}(60, 30) \\ 60 & = & 30 \cdot 2 + 0 & \text{pgcd}(60, 30) = \text{pgcd}(30, 0) = 30 \end{array}$$

Avec l'algorithme d'Euclide on va prouver maintenant que si un nombre premier divise le produit de deux nombres entiers, alors il divise l'un d'eux. Ce résultat est la clé pour prouver l'unicité de factorisation.

THÉORÈME 1.4.3 (LEMME D'EUCLIDE) *Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$ des entiers positifs. Si $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

PREUVE. Si $p \mid a$, c'est fait. Si $p \nmid a$ alors $\text{pgcd}(p, a) = 1$, car seulement 1 et p divisent p. A partir de l'algorithme d'Euclide, on voit $\text{pgcd}(pb, ab) = b$. A chaque étape on multiplie l'equation par b. Comme $p \mid pb$ et, par l'hypothèse, $p \mid ab$, on obtient que $p \mid \text{pgcd}(pb, ab) = b$.

COROLLAIRE 1.4.4 *Soit p un nombre premier, $s \in N$, et $a_1, \cdots, a_s \in \mathbb{N}$ des entiers positifs. Si $p \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_r$ alors p divise l'un des a_i : $\exists p \mid a_i$.*

Unicité de la décomposition

L'unicité de la décomposition d'un entier positif n en produit de nombres premiers résulte directement du lemme d'Euclide 1.4.3 (et de son corollaire 1.4.4) : soient $r, s \in \mathbb{N}$, $p_1, \cdots, p_r$ et $q_1, \cdots, q_s$ des nombres premiers tels que

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$$

alors $r = s$ et $p_1, \cdots, p_r$ coïncident $q_1, \cdots, q_s$ à une permutation près.

En effet, on peut supposer $r \geq s$. On procède par récurrence sur r. Si r=0, alors n=1, $s = 0$, et le résultat annoncé est vrai. Supposons le résultat montré pour $r - 1$ avec $r \geq 1$. On a

$$p_1 | q_1 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Donc p_1 divise l'un des q_i.

Quitte à échanger les q_i, on peut supposer que $p_1 | q_1$. Comme le nombre q_1 est premier, on obtient $p_1 = q = 1$, d'où

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

(après la simplification), et il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence au produit $p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ de $r - 1$ nombres premiers.

Exercice 1.4.5 *Montrer que si* $a_1, a_2 > 0$,

$$\mathrm{pgcd}(a_1, a_2) \cdot \mathrm{ppcm}(a_1, a_2) = a_1 \cdot a_2$$

Exercice 1.4.6 *Algorithmes pour calculer le pgcd d'une famille finie* $\{a_1, \cdots, a_r\}$. *Montrer que*

$$\mathrm{pgcd}(a_1, \cdots, a_r) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a_1, \cdots, a_{r-1}), a_r),$$

et que

$$\mathrm{ppcm}(a_1, \cdots, a_r) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{ppcm}(a_1, \cdots, a_{r-1}), a_r),$$

Programme pour trouver le pgcd (en Maple)

```
> restart;
> a:=691;
> b:=-1000;
> i:=0;
> if a<0 then a:=-a;
> else fi;
> if b<0 then b:=-b;
> else fi;
> while(b<>0) do
> i:=i+1;
> r:=irem( a,b );
> a:=b;
> b:=r;
> od;
> print(i, a);
```

$$a := 691$$
$$b := -1000$$
$$i := 0$$

$b := 1000$
$i := 1$
$r := 691$
$a := 1000$
$b := 691$
$i := 2$
$r := 309$
$a := 691$
$b := 309$
$i := 3$
$r := 73$
$a := 309$
$b := 73$
$i := 4$
$r := 17$
$a := 73$
$b := 17$
$i := 5$
$r := 5$
$a := 17$
$b := 5$
$i := 6$
$r := 2$
$a := 5$
$b := 2$
$i := 7$
$r := 1$
$a := 2$
$b := 1$
$i := 8$
$r := 0$
$a := 1$
$b := 0$
8, 1

Procédure pour trouver le pgcd (en Maple-7)

```
> pgcd:=proc(a::integer,b::integer)
> local r,d0,d1,i;
> i:=0;
> if a<0 then a:=-a;
> else fi;
> if b<0 then b:=-b;
> else fi;
> r:=b;
> d0:=a; d1:=b;
> r:=b;
> while(d1<>0) do
> i:=i+1;
> r:=irem( d0,d1 );
> d0:=d1;
> d1:= r;
> od;
> return d0;
> end proc;
```

$$
\begin{array}{l}
pgcd := \mathbf{proc}(a : :integer,\ b : :integer) \\
\mathbf{local}\ r,\ d0,\ d1,\ i; \\
\quad i := 0\,; \\
\quad \mathbf{if}\ a < 0\ \mathbf{then}\ a := -a\ \mathbf{else\ end\ if}; \\
\quad \mathbf{if}\ b < 0\ \mathbf{then}\ b := -b\ \mathbf{else\ end\ if}; \\
\quad r := b\,; \\
\quad d0 := a\,; \\
\quad d1 := b\,; \\
\quad r := b\,; \\
\quad \mathbf{while}\ d1 \neq 0\ \mathbf{do}\ i := i + 1\,;\ r := \mathrm{irem}(d0,\ d1)\,;\ d0 := d1\,;\ d1 := r\ \ \mathbf{end\ do}\,; \\
\quad \mathbf{return}\ d0 \\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}
$$

```
> pgcd(12,14);
```

$$2$$

```
> pgcd(91,65);
```

$$13$$

```
> pgcd(2261,1275);
```

$$17$$

1.5 Congruences

DÉFINITION 1.5.1 *Si a, b sont deux entiers relatifs, on dit que a est congru à b modulo m et on note*

$$a \equiv b \bmod m$$

si et seulement si m divise $a - b$.

PROPOSITION 1.5.2 *Si a, b, c, d, m et n sont des entiers relatifs,*

(i) $a \equiv a \bmod m$,
(ii) si $a \equiv b \bmod m$, *alors* $b \equiv a \bmod m$,
(iii) si $a \equiv b \bmod m$ *et* $b \equiv c \bmod m$, *alors* $a \equiv c \bmod m$,
(iv) si m est non nul et si b est le reste de la division euclidienne de a par m, alors on a $a \equiv b \bmod m$,

v) si $a \equiv b \bmod m$ *et si* $n|m$, *alors on a* $a \equiv b \bmod n$,
(vi) si $a \equiv b \bmod m$ *et* $c \equiv d \bmod m$, *alors* $a + c \equiv b + d \bmod m$,
(vii) si $a \equiv b \bmod m$ *et* $c \equiv d \bmod m$, *alors* $ac \equiv bd \bmod m$,
(viii) si $a \equiv b \bmod m$ *et si* n *est un entier positif, alors* $a^n \equiv b^n \bmod m$.

PREUVE. C 'est un exercice facile. Montrons (vii) à titre d'exemple : si $a \equiv b \bmod m$, et $c \equiv d \bmod m$, alors il existe des entiers relatifs q_1 et q_2 tels que

$$a - b = mq_1 \text{ et } c - d = mq_2;$$

par conséquant,

$$ac - bd = (a - b)c + b(c - d) = m(q_1 + q_2);$$

d'où l'assertion.

EXEMPLE 1.5.3
Si a *est entier positif ou nul et* $a_r a_{r-1} \cdots a_0$ *son écriture en base 10 (i.e.* $a = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^i$*), alors*
(i) $a \equiv a_0 (\bmod 10)$,
(ii) $a \equiv \sum_{i=0}^{r} a_i (\bmod 9)$
(iii) $a \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i (\bmod 11)$

Règles de divisibilité

PROPOSITION 1.5.4 *Un nombre* $n \in \mathbb{Z}$ *est divisible par* 3 *si et seulement si la somme des chiffres décimales de* n *est divisible par* 3.

PREUVE. On écrit

$$n = a + 10b + 100c + \cdots .$$

Comme $10 \equiv 1 \pmod 3$,

$$n = a + 10b + 100c + \cdots \equiv a + b + c + \cdots \pmod 3,$$

d'où la proposition.

De même façon, on trouve les règles de divisibilité par 5, 2, 4, 9 et 11 (voir exemple 1.5.3).

EXERCICE 1.5.5 *Proposer une règle de divisibilité par* 7, *utilsant les faits* $10 \equiv 3 (\bmod 7)$, $100 \equiv 2 (\bmod 7)$, $1000 \equiv -1 (\bmod 7)$.

EXERCICES

1.1 Proposer une règle de divisibilité par 13, en utilisant $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

1.2 Calculer de tête le dernier chiffre de l'écriture en base 10 des nombres suivants : 2309786^{34657}, $8786652^{35444619}$ et $654565198^{3548217}$.

1.3 Calculer de tête le reste de la division par 9 des nombres suivants : $8^{68498353}$, 54648381^{54648} et 354872846^{21353}.

1.4 Existe-t-il des nombres entiers x, y tels que $x^2 + y^2 = 2003$?

1.5 Existe-t-il des nombres entiers x, y tels que $x^2 + 15y^2 = 2003$?

1.6 Soit b un entier strictement positif, énoncer et démontrer l'analogue de l'exemple 1.5.3 pour l'écriture en base b d'un entier positif a (i.e. $a = \sum_{i=0}^{r} a_i b^i$ avec $0 \leq a_i \leq b - 1$).

1.7 Trouver tous entiers n tels que la fonction f_n (definite par l'égalité(1.1)) ne s'annule pas.

1.8 Déssiner la fonction f_{15}.

1.9 La fonction f_n est-elle croissante (decroissante) ?

1.10 Justifier la procédure suivante pour calculer les l derniers chiffres en base d d'un nombre entier positif n :

```
> restart;
> Chiffres:= proc(  d::nonnegint,l::nonnegint,n::nonnegint )
> local i,m, v;
> v:=vector(l);
> m:=n;
> for i from 0 to l-1 do
> v[l-i]:=modp(m,d);m:=floor(m/d); od;
> return v;
> end proc;
```

$$\begin{aligned}&\mathit{Chiffres} := \mathbf{proc}(d :: \mathit{nonnegint},\ l :: \mathit{nonnegint},\ n :: \mathit{nonnegint})\\ &\quad \mathbf{local}\ i,\ m,\ v;\\ &\qquad v := \mathrm{vector}(l)\,;\\ &\qquad m := n\,;\\ &\qquad \mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 0\ \mathbf{to}\ l-1\ \mathbf{do}\ v_{l-i} := \mathrm{modp}(m,\ d)\,;\ m := \mathrm{floor}(m/d)\ \mathbf{end\ do}\,;\\ &\qquad \mathbf{return}\ v\\ &\quad \mathbf{end\ proc}\end{aligned}$$

```
> evalm(Chiffres(2,12, 127));
```

$$[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]$$

```
> evalm(Chiffres(7,5,700));
```

$$[0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0]$$

vérification :2*7+2*7^3=700 ?

```
> 2*7+2*7^3=700;
```

$$700 = 700$$

1.11 Trouver tous entiers x, y, z tels que

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0.$$

1.12 Combien de zéros se trouvent à la fin de 20! ?

1.13 Montrer que si $2^p - 1$ est premier alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est *parfait*, c'est-à-dire, il est égal à la somme de ses diviseurs propres (e.g. $6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$, $496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248$) (Euler a démontré que tous les nombres pairs parfaits sont de ce type).

1.14 Trouver une formule explicite pour les nombres de Fibonacci $a = u_k$, $b = u_{k-1}$ où $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{i+1} = u_i + u_{i-1}$:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}\right).$$

1.15 On definit le nombre d'or comme la solution positive de la proportion d'or

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

("le quotient de l'unité par une partie est égale au quotient de cette partie par la partie complémentaire"), c'est à dire $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Montrer que

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} \to \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

1.16 Soient a, k, l des nombres entiers positifs. Trouver

$$\mathrm{pgcd}(a^k - 1, a^l - 1).$$

2 Entiers modulo n

2.1 Relations d'équivalence et ensembles quotients

La congruence est une relation d'équivalence. Rappellons ce dont il s'agit.

DÉFINITION 2.1.1 *Une* relation binaire $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est une partie*

$$E_{\mathcal{R}} \subset E \times E = \{(a, b) \mid a, b \in E\}$$

on écrit $a \overset{\mathcal{R}}{\sim} b$ *si et seulement si* $(a, b) \in E_{\mathcal{R}}$

DÉFINITION 2.1.2 *Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est une* relation d'équivalence *si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes :*

- Réflexive. $\forall a \in E$, $a \overset{\mathcal{R}}{\sim} a$.
- Symétrique. *Si* a *et* b *appartiennent à* E *et si* $a \overset{\mathcal{R}}{\sim} b$, *alors* $b \overset{\mathcal{R}}{\sim} a$
- Transitive. *Si* a, b *et* c *appartiennent à* E *et si* $a \overset{\mathcal{R}}{\sim} b$ *et* $b \overset{\mathcal{R}}{\sim} c$, *alors* $a \overset{\mathcal{R}}{\sim} c$

Pour tout x de E on appelle classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$, notée $\overline{x}$, la partie

$$\{y \in E \mid y \overset{\mathcal{R}}{\sim} x\}$$

de E. On dit également que x est un représentant de la clase d'équivalence $\overline{x}$.

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est appelé ensemble-quotient de E par $\mathcal{R}$. On le note $E/\mathcal{R}$.

PROPOSITION 2.1.3 *L'exsemble quotient* $E/\mathcal{R}$ *forme une partition de* E *autrement dit aucune classe d'équivalence n'est vide et deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit identiques.*

DÉFINITION 2.1.4 *L'application*

$$E \to E/\mathcal{R}, x \mapsto \overline{x}$$

est surjective, on l'appele la projection canonique.

2.2 Arithmétique modulo n

PROPOSITION 2.2.1 *Pour tout entier* n *la relation de congruence* $x \equiv y \bmod n$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{Z}$. *On note* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *l'ensemble quotient associé.*

PREUVE. Il suffit d'utiliser les propriétés (i), (ii) et (iii) de Proposition 1.5.2. La propriété (iv) montre que

$$\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \cdots \cup \overline{n-1} = n\mathbb{Z} \cup (1 + n\mathbb{Z}) \cup \cdots \cup (n - 1 + n\mathbb{Z})$$

On suppose $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ et

$$a \equiv a' \pmod{n}, \qquad b \equiv b' \pmod{n}.$$

Alors

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n} \tag{2.1}$$
$$a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{n} \tag{2.2}$$

Ceci permet de definir une addition $+$ et une multiplication $\times$ (ou $\cdot$) sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par les formules

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \text{ et } \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Ceci implique que si $m > 0$ la puissance m-ème d'un élément a de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donné par

$$\overline{a}^m = \overline{a^m}.$$

De point de vue pratique, ces calculs peuvent être implémentés de la façon suivante : pour l'addition

ALGORITHME 2.2.2
Entrée *:*
– *Entier n de congruence.*
– *Entiers a et b (entre 0 et $n-1$).*
Sortie :
– *Représentant de $a+b$ (entre 0 et $n-1$).*
Algorithme :
– *Calculer $c = a+b$.*
– *Calculer le reste r de la division de c par n.*

Un algorithme analogue peut être écrit pour la *multiplication*.

Pour *l'exponentiation*, il convient de minimiser le nombre de multiplications effectuées. L'idée pour cela est de considerer l'écriture en base 2 de la puissance cherchée :

$$m = \sum_{i=0}^{r} m_i 2^i \text{ avec } m_i = 0 \text{ ou } 1.$$

On a la relation

$$\overline{a}^m = \prod_{\substack{0 \le i \le r \\ m_i = 1}} \overline{a}^{2^i}.$$

La formule

$$m = m_r 2^r + \cdots + m_0 = 2(2(\cdots 2(2m_r + m_{r-1}) + \dots) + m_1) + m_0$$

montre que dans cet exemple

$$\begin{aligned} \overline{a}^m &= \overline{a}^{2(2(\cdots 2(2m_r + m_{r-1}) + \dots) + m_1) + m_0} \\ &= (\cdots((\overline{a}^{m_r})^2 \overline{a}^{m_{r-1}})^2 \cdots)^2 \overline{a}^{m_0} \end{aligned}$$

ALGORITHME 2.2.3
Entrée *:*
– *Entier n de congruence.*
– *Puissance m.*
–*Element a de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
Sortie :
– *Valeur de a^m dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*
Algorithme :
1. $x := a$, $y = m$ *;*
2. $z := 1$ *;*
3. Tant que y n'est pas nul
    3.1 si y est impaire, $z := z * x \bmod n$
    3.2 $x := x * x \bmod n$
    3.3 $m := m/2$
4. renvoyer z

2.3 Une procédure pour calcul de $a^m \bmod n$ en Maple

On peut simplement utiliser

```
> a &^ m mod n;
```

Sinon, on écrit une procédure :

```
> Puismod:=
> proc(a::nonnegint, m::nonnegint, n::nonnegint)
> local x, y, z, mi;
> x:=a;
> y:=m;
> z:=1;
> while (y<>0) do
> mi:=y mod 2;
> if (mi=1) then z := z*x mod n;
> else fi;
> x:=x*x mod n;
> y:=floor(y/2);
> printf("mi=%d, x=%d, y=%d, z=%d\n",mi,x,y,z)
> od;
> return z;
> end proc;
```

$$
\begin{array}{l}
Puismod := \mathbf{proc}(a::nonnegint,\ m::nonnegint,\ n::nonnegint) \\
\mathbf{local}\ x,\ y,\ z,\ mi; \\
\quad x := a\,; \\
\quad y := m\,; \\
\quad z := 1\,; \\
\quad \mathbf{while}\ y \neq 0\ \mathbf{do} \\
\qquad mi := y \bmod 2\,; \\
\qquad \mathbf{if}\ mi = 1\ \mathbf{then}\ z := z * x \bmod n\ \mathbf{else\ end\ if}; \\
\qquad x := x^2 \bmod n\,; \\
\qquad y := \mathrm{floor}(1/2 * y)\,; \\
\qquad \mathrm{printf}(\text{“mi=\%d, x=\%d, y=\%d,\ z=\%d\textbackslash n”},\ mi,\ x,\ y,\ z) \\
\quad \mathbf{end\ do}; \\
\quad \mathbf{return}\ z \\
\mathbf{end\ proc}
\end{array}
$$

```
> Puismod(2,11,100);
```

```
mi=1, x=4, y=5, z=2

mi=1, x=16, y=2, z=8

mi=0, x=56, y=1, z=8

mi=1, x=36, y=0, z=48
```

48

vérification :

```
> 2^11;
```

2048

Simplification dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

PROPOSITION 2.3.1 *Si* $\text{pgcd}(c, n) = 1$ *et*

$$ac \equiv bc \pmod{n}$$

alors $a \equiv b \pmod{n}$.

PREUVE. Par définition

$$n \mid ac - bc = (a - b)c.$$

Comme $\text{pgcd}(n, c) = 1$, on a $n \mid a - b$, donc

$$a \equiv b \pmod{n},$$

d'où la proposition.

COROLLAIRE 2.3.2 *Si* $\text{pgcd}(c, n) = 1$ *alors l'application* $x \mapsto cx$ *de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est bijective, en particulier, pour tout* b *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *il existe un seul* x *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *tel que*

$$cx \equiv b \pmod{n}.$$

EXERCICES

2.1. *Justifier une version de l'algorithme d'Euclide donnée par la division avec reste de plus petite valeur absolue :*

$$\begin{aligned} &x_0 = a_0 x_1 + \varepsilon_1 x_2, \\ &x_1 = a_1 x_2 + \varepsilon_2 x_3, \ \ldots, \quad 0 \le x_k \le x_{k-1}/2, \quad \varepsilon_i = \pm, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1} = a_{n-1} x_n. \end{aligned}$$

2.2. *Posons* $D_0 = 0$, $D_1 = 1$, $\ldots$, $D_n = 2D_{n-1} + D_{n-2}$.
(la suite des nombres de Dupré). Démontrer : Théorème (Athanase Dupré, 1846) Soient u, $v > 0$ *des entiers naturels tels que l'algorithme d'Euclide aboutit en* n *divisions (avec reste de plus petite valeur absolue), et* u *est minimal avec cette propriété. Alors*

$$u = D_n + D_{n-1}, \quad v = D_n,$$

2.3. *En déduire : Pour* (u, v), $u > v > 0$, *l'algorithme d'Euclide aboutit en au plus*

$$1,14 \log u - 0,79 + 0,41 u^{-1}$$

divisions avec reste de plus petite valeur absolue.

Solution : voir [Knuth, p. 605]. On utilise ci–dessus la formule

$$D_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right).$$

3 Rappels sur la notion de groupe, exemples

3.1 Structure de groupe

DÉFINITION 3.1.1 *Un groupe est un ensemble G muni d'une loi interne*

$$G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy = x \cdot y$$

qui est associative
Gr1 $\forall x, y, z \in G, x(yz) = (xy)z$,
admet un element neutre e :
Gr2 $\forall x \in G, xe = ex = x$,
et tout élément x du groupe G admet un inverse (ou symétrique) y :
Gr3 $\forall x \in G, \exists y \in G, xy = yx = e$,
cet élément est alors unique, on le note x^{-1}.
En outre le groupe G est dit commutatif ou abélien s'il vérifie également la condition suivante :
Comm. $\forall x, y \in G, xy = yx$.

REMARQUE 3.1.2 *On prend souvent une notation additive pour la loi d'un groupe abélien, la loi s'écrira alors $(x, y) \mapsto x + y$, l'élément neutre sera noté 0 et le symétrique (ou opposé) d'un élément x sera noté $-x$.*

EXEMPLE 3.1.3
L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Il est de même pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ muni de l'addition. L'addition munit également $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe abélien.

DÉFINITION 3.1.4 *Un groupe G est dit* monogène*, s'il existe un élément g de G tel que $\{g\}$ engendre G, i.e. pour tout $h \in G$ il existe un entier positif n tel que soit $h = g^n$ soit $h = g^{-n} = (g^{-1})^n$. On dit alors que g est un* générateur *de G. Un groupe monogène fini est dit* cyclique.

En particulier, le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique d'ordre n et de générateur $\overline{1}$:

$$\overline{1} + \overline{1} = \overline{2}, \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{3}, \cdots$$

Le groupe additif $\mathbb{Z}$ est monogène de générateur 1 (ou de générateur -1).

EXERCICE 3.1.5 *Trouver tous les générateurs du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer qu'une classe $\overline{a} = a \bmod n$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si* $\operatorname{pgcd}(a, n) = 1$.

EXEMPLE 3.1.6
Si X est un ensemble, l'ensemble des bijections de X dans X, aussi appelées permutations *de X, forme un groupe pour la loi de composition que l'on note $\mathfrak{S}_X$. On note $\mathfrak{S}_n$ pour le* groupe des permutatons *de $\{1, \cdots, n\}$. Si $n \geq 3$, alors ce groupe n'est pas abélien.*

DÉFINITION 3.1.7
(a) Soient G et H deux groupes. Une application $\phi : G \to H$ est un morphisme *de groupes si elle vérifie la condition*
Mor $\forall x, y \in G, \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.
(b) Un isomorphisme *de groupes est un morphisme de groupes qui est bijectif. Son inverse est alors un isomorphisme de groupes.*
(c) Un automorphisme *d'un groupe G est un isomorphisme de G dans G. Son inverse est un automorphisme de G.*

EXERCICE 3.1.8 *Trouver tous les morphismes du groupe $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.*

EXERCICE 3.1.9 *Trouver tous les automorphismes des groupes $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.*

3.2 Exemple : éléments inversibles $\mod n$.

Rapelons que pour un élément $a \bmod n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'application $x \mapsto ax$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est bijective si et seulement si $\text{pgcd}(a, n) = 1$, en particulier, dans ce cas pour tout b dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ il existe un seul x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que

$$ax \equiv b \pmod{n}.$$

(voir Corollaire 2.3.2).

Définition 3.2.1 *On appelle groupe des éléments inversibles* $\mod n$ *l'ensemble des éléments* $a \bmod n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *tels que* $\text{pgcd}(a, n) = 1$, *et on le note* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. *L'élément neutre* e *de* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ *est la classe* $1 \bmod n = 1 + n\mathbb{Z}$, *et l'élément symétrique de* $a \bmod n$ *et la classe* $x \bmod n$, *où* $ax \equiv 1 \pmod{n}$.

Pour trouver un élément x tel que $ax \equiv b \pmod{n}$, il suffit de résoudre l'équation $ax + ny = b$ en entiers x, y, on utilisera une information supplémentaire sur le pgcd donnée par

Proposition 3.2.2 *On suppose* $a, b \in \mathbb{Z}$ *et* $\text{pgcd}(a, b) = d$. *Alors il existe* $x, y \in \mathbb{Z}$ *tels que*

$$ax + by = d.$$

On donne d'abord un exemple concret de calcul de solution d'une équation comme $ax \equiv 1 \pmod{n}$.

Exemple 3.2.3 *Soit* $a = 5$ *et* $b = 7$. *Les étapes de l'algorithme d'Eclide sont :*

$$\begin{aligned} 7 &= 1 \cdot 5 + 2 && \text{donc } 2 = 7 - 5 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 && \text{donc } 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7. \end{aligned}$$

A droite, nous avons écrit tout reste comme une combinaison linéaire de a *et de* b. *Finalement, on a écrit* $\text{pgcd}(a, b)$ *comme une combinaison linéaire* a *et* b.

Cet exemple n'était pas compliqué, et on pourrait aborder un exemple plus long.

Exemple 3.2.4 *Soit* $a = 130$ *et* $b = 61$. *Nous avons*

$$\begin{aligned} 130 &= 2 \cdot 61 + 8 && \text{donc } 8 = 130 - 2 \cdot 61 \\ 61 &= 7 \cdot 8 + 5 && \text{donc } 5 = -7 \cdot 130 + 15 \cdot 61 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 && \text{donc } 3 = 8 \cdot 130 - 17 \cdot 61 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 && \text{donc } 2 = -15 \cdot 130 + 32 \cdot 61 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 && \text{donc } 1 = 23 \cdot 130 - 49 \cdot 61. \end{aligned}$$

Alors $x = 130$ *et* $y = -49$.

Remarque 3.2.5 *Il suffit pour nous de trouver une solution de* $ax + by = d$. *En effet, il existe toujours une infinité de solutions. Si* x, y *est une solution de*

$$ax + by = d,$$

alors pour tous $\alpha \in \mathbb{Z}$,

$$a\left(x + \alpha \cdot \frac{b}{d}\right) + b\left(y - \alpha \cdot \frac{a}{d}\right) = d,$$

est aussi une solution, et toutes les solutions sont de cette forme pour un α.

Identité de Bezout.

L'algorithme d'Euclide se compose du calcul d'une suite

$$d_0, \quad d_1, \quad d_2, \ldots$$

où $d_0 = a, \quad d_1 = b$ et d_{i+1} est le residu de d_{i-1} modulo d_i :

$$d_{i+1} = d_{i-1} - td_i.$$

On s'arrête lorsque $d_k = 0$; alors $d_{k-1} = \text{pgcd}(a, b)$. On peut montrer que le nombre des divisions est borné par $5 \log_{10} \max(a, b)$ (*le théorème de Lamé*).

De l'algorithme d'Euclide provient aussi une représentation

$$\text{pgcd}(a, b) = ua + vb \tag{3.1}$$

où u, v sont des entiers. Pour les construire on calcule successivement les paires (u_i, v_i) tels que $d_i = u_i a + v_i b$. Posons $u_0 = v_1 = 1, u_1 = v_0 = 0$ et pour $i \geq 1$

$$u_{i+1} = u_{i-1} - tu_i, \quad v_{i+1} = v_{i-1} - tv_i$$

où t est pris de la relation $d_{i+1} = d_{i-1} - td_i$.

Comme $\text{pgcd}(a, b) = d_{k-1}$ on peut prendre $u = u_{k-1}, \quad v = v_{k-1}$.

Programme pour calculer u et v

```
> bezout:=proc(a::integer,b::integer)
> local u0,u1,u2,v0,v1,v2,d0,d1,r,t,i;
> if a<0 then a:=-a;
> else fi;
> if b<0 then b:=-b;
> else fi;
> u0:=1;v0:=0;
> u1:=0;v1:=1;
> d0:=a; d1:=b;
> r:=b;
> i:=0;
> while(d1<>0) do
> i:=i+1;
> t:=iquo( d0,d1 );
> r:=irem( d0,d1 );
> d0:=d1;
> d1:= r;
> u2:=u0-t*u1;
> v2:=v0-t*v1;
> u0:=u1;
> u1:= u2;
> v0:=v1;
> v1:= v2;
> printf("i=%d,%d*%d+%d*%d=%d\n"
> ,i,a,(u0) , b,v0, d0)
> od;
> return d0;
> end proc;
```

```
bezout := proc(a : :integer, b : :integer)
local u0, u1, u2, v0, v1, v2, d0, d1, r, t, i;
    if a < 0 then a := -a else end if;
    if b < 0 then b := -b else end if;
    u0 := 1;
    v0 := 0;
    u1 := 0;
    v1 := 1;
    d0 := a;
    d1 := b;
    r := b;
    i := 0;
    while d1 ≠ 0 do
        i := i + 1;
        t := iquo(d0, d1);
        r := irem(d0, d1);
        d0 := d1;
        d1 := r;
        u2 := u0 - t * u1;
        v2 := v0 - t * v1;
        u0 := u1;
        u1 := u2;
        v0 := v1;
        v1 := v2;
        printf("i=%d,%d*%d+%d*%d=%d \n", i, a, u0, b, v0, d0)
    end do;
    return d0
end proc
```

```
> bezout(12,14);
i=1,12*0+14*1=14
i=2,12*1+14*0=12
i=3,12*-1+14*1=2
```

2

```
> bezout(691,1000);
i=1,691*0+1000*1=1000
i=2,691*1+1000*0=691
i=3,691*-1+1000*1=309
i=4,691*3+1000*-2=73
i=5,691*-13+1000*9=17
i=6,691*55+1000*-38=5
i=7,691*-178+1000*123=2
```

```
i=8,691*411+1000*-284=1
```

1

```
> bezout(17,61);
i=1,17*0+61*1=61
i=2,17*1+61*0=17
i=3,17*-3+61*1=10
i=4,17*4+61*-1=7
i=5,17*-7+61*2=3
i=6,17*18+61*-5=1
```

1

Pour résoudre $ax \equiv 1 \pmod{n}$

on peut simplement utiliser en Maple la commande

```
> 1/a mod n;
```

Sinon, on suppose $\text{pgcd}(a, n) = 1$. Pour résoudre $ax \equiv 1 \pmod{n}$ on trouve x et y tels que $ax+ny = 1$. Alors

$$ax \equiv ax + ny \equiv 1 \pmod{n}.$$

EXEMPLE 3.2.6 *Résoudre* $17x \equiv 1 \pmod{61}$. *Premièrement, on utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver* x, y *tels que* $17x + 61y = 1$ *:*

$$\begin{aligned} \overline{61} &= 3 \cdot \overline{17} + \overline{10} && \textit{donc } \overline{10} = \overline{61} - 3 \cdot \overline{17} \\ \overline{17} &= 1 \cdot \overline{10} + \overline{7} && \textit{donc } \overline{7} = -\overline{61} + 4 \cdot \overline{17} \\ \overline{10} &= 1 \cdot \overline{7} + \overline{3} && \textit{donc } \overline{3} = 2 \cdot \overline{61} - 7 \cdot \overline{17} \\ \overline{3} &= 2 \cdot \overline{3} + \overline{1} && \textit{donc } \overline{1} = -5 \cdot \overline{61} + 18 \cdot \overline{17}. \end{aligned}$$

Alors $x = 18$ *est une solution de* $17x \equiv 1 \pmod{61}$.

La même chose se fait facilement en utilisant Maple

```
> restart;
> 1/17 mod 61;
```

18

```
> 1/2 mod 61;
```

31

3.3 Sous-groupes

DÉFINITION 3.3.1 *Si* G *est un groupe, un sous-groupe de* G *est une partie* H *de* G *vérifiant les trois conditions suivantes :*

SG1 $e \in H$,
SG2 $\forall x, y \in H, xy \in H$,
SG3 $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.

H est alors un groupe pour la loi induite

$$H \times H \to H,\ (h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2$$

EXEMPLE 3.3.2 *Si G est un groupe, G et $\{e\}$ sont des sous-groupes de G.*

EXEMPLE 3.3.3 *Si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille des sous-groupes d'un groupe G, alors l'intersection $\cap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G. En particulier, si X est une partie de G, l'intersection des sous-groupes de G contenant X, est un sous-groupe de G. C'est le plus petit sous-groupe de G contenant X, on l'appelle le sous-groupe de G* engendré par *X. On notera $\langle X\rangle$ le sous-groupe engendré par X.*

EXEMPLE 3.3.4 *Si $\phi : G \to H$ est un morphisme de groupes, alors pour tout sous-groupe H' de H, son image inverse dans G, $\phi^{-1}(H') \subset G$ est un sous groupe de G, et pour tout sous-groupe G' de G, son image $\phi(G') \subset H$ est un sous-groupe de H. En particulier, l'ensemble*

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(e) \subset G = \{x \in G \mid \phi(x) = e\}$$

est un sous-groupe de G appelé le noyau *de ϕ. L'image de ϕ, notée $\mathrm{Im}(\phi)$, est un sous-groupe de H.*

THÉORÈME 3.3.5 *Si G est un groupe, et g est un élément de G alors il existe un unique morphisme $\phi : \mathbb{Z} \to G$ déterminé par la formule*

$$k \mapsto g^k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

L'image de ϕ, notée $\mathrm{Im}(\phi)$, est le sous-groupe $H = \langle g\rangle$ de G, engendré par g.

PREUVE. Il suffit de remarquer que g^k est défini de la façon suivante

$$g^0 = e, \forall k \in \mathbb{N}, g^{k+1} = g^k g, \text{ et } g^{-k} = (g^k)^{-1},$$

donc on a un morphisme déterminé par la formule

$$\phi : k \mapsto g^k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

car $\phi(k + l) = g^{k+l} = g^k g^l = \phi(k)\phi(l)$.

THÉORÈME 3.3.6 *Soit I un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{Z}$. Alors I est de la forme $n\mathbb{Z}$, pour un élément n de $\mathbb{Z}$.*

PREUVE. Si I est distinct du sous-groupe $\{0\}$, alors I contient un élément non nul et, contenant aussi son opposé, un élément strictement positif. Soit n le plus petit élément strictement positif de I. Soit i un élément quelconque de I. La division euclidienne de i par n s'écrit $i = nq + r$ avec $0 \leq r < n$. Mais $r = i - nq$ appartient également à I. Par conséquent, par minimalité de n, on a $r = 0$. Donc $i \in n\mathbb{Z}$. Réciproquement, tout élément de $n\mathbb{Z}$ est dans I. En notant que $\{0\} = 0\mathbb{Z}$, on obtient que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, pour un élément n de $\mathbb{Z}$.

COROLLAIRE 3.3.7 *Soit $G = \langle g\rangle$ un groupe cyclique d'ordre N. Alors tout sous-groupe H de G est cyclique.*

PREUVE. On utilise le morphisme $\phi : \mathbb{Z} \to G$ déterminé par la formule

$$k \mapsto g^k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Alors ϕ est *surjectif* parce que G est engendré par g. On considère l'image inverse du sous-groupe $H \subset G$: $\phi^{-1}(H) \subset \phi^{-1}(G) = \mathbb{Z}$.

Selon le théorème 3.3.6, tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, pour un élément n de $\mathbb{Z}$. Ceci implique que $H = \phi(I) = \langle g^n\rangle$.

3.4 Classes à gauche, à droite

DÉFINITION 3.4.1 *Soient G groupe et H un sous-groupe de G. Si $g \in G$, l'ensemble*

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \text{ (resp. } Hg = \{hg \mid h \in H)\}$$

est appelé classe à gauche (resp. à droite) de g pour H. On note G/H (resp. $H\backslash G$) l'ensemble des classes à gauche (resp. à droite) de G pour H.

Notons que si a et b sont des éléments de G, alors on a une bijection

$$\begin{aligned} aH &\to bH \\ g &\mapsto ba^{-1}g \end{aligned}$$

De même façon on a une bijection

$$\begin{aligned} aH &\to Ha^{-1} \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

En particulier, toutes les classes ont le même cardinal, à savoir, le cardinal du sous-groupe H. En outre cela définit une bijection

$$\begin{aligned} G/H &\to H\backslash G \\ aH &\mapsto Ha^{-1} \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.4.2 *Soient G groupe et H un sous-groupe de G. Si l'un des ensembles G/H ou $H\backslash G$ des classes à gauche (resp. à droite) modulo H est fini, alors ces deux ensembles sont finis et de même cardinal, qu'on appelle* indice *de H dans G. On le note $(G : H)$.*

Nous avons montré la propriété suivante

PROPOSITION 3.4.3 *Si G est un groupe fini et H est un sous-groupe de G, alors*

$$\sharp G = \sharp H \cdot (G : H).$$

En particulier, le cardinal du sous-groupe divise le cardinal de G.

3.5 Sous-groupes distingués, groupes quotient

Soit $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes, alors pour tout x de $\mathrm{Ker}(\phi)$ et tout g de G on a

$$\phi(gxg^{-1}) = \phi(g)\phi(x)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1}) = e.$$

Par conséquent, gxg^{-1} appartient également au noyau de ϕ. Ceci mène à la définition suivante :

DÉFINITION 3.5.1 *Soient G groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est* distingué *dans G, et on note $H \triangleleft G$ si et seulement si*

$$\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H.$$

Nous venons de voir que si ϕ est un morphisme, son noyau est distingué. Montrons qu'inversement tout sous-groupe distingué est le noyau d'un morphisme.

Définition 3.5.2 *Si H est un sous-groupe distingué de G, alors il existe sur G/H une unique loi de groupe telle que la projection canonique*

$$\phi : G \to G/H, g \mapsto gH$$

soit un morphisme de groupes. On dit alors que G/H est le groupe-quotient *de G par H.*

Exemple 3.5.3 *Si G est un groupe abélien, alors tout sous-groupe H de G est distingué. En particulier, le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ est distingué dans $\mathbb{Z}$. On retrouve ainsi l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exemple 3.5.4 *Si $\phi : G \to H$ est un morphisme de groupes et H' un sous-groupe distingué de H, alors $\phi^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G.*

Preuve : en exercice obligatoire.

Théorème 3.5.5 (Sur l'isomorphisme) *Si $\phi : G \to H$ est un morphisme de groupes, et $K = \mathrm{Ker}(\phi)$ son noyau, $K \triangleleft G$, alors il existe un unique isomorphisme de groupes $\overline{\phi} : G/K \to \mathrm{Im}(\phi)$ tel que ϕ coïncide avec la composée*

$$G \xrightarrow{\pi} G/K \xrightarrow{\overline{\phi}} \mathrm{Im}(\phi) \xhookrightarrow{j} H$$

où π désigne la projection canonique, et j l'injection canonique.

Théorème 3.5.6 (Sur l'isomorphisme des groupes monogènes) *Si $G = \langle g \rangle$ est un groupe monogène, alors seulement deux cas sont possibles*

(i) G est infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$;

(ii) G est fini d'ordre N et isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Preuve. On considère le morphisme de groupes $\phi : \mathbb{Z} \to G$, qui est surjectif par l'hypothèse. Soit $I = \mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathbb{Z}$ son noyau, alors selon le théorème 3.5.5, il existe un isomorphisme de groupes $\overline{\phi} : \mathbb{Z}/I \to \mathrm{Im}(\phi) = G$. Or tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $N\mathbb{Z}$, pour un élément N de $\mathbb{Z}$.

Si $N = 0$, G est infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$;

Si $N \neq 0$, G est fini d'ordre N et isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

3.6 Ordre d'un élément, théorème de Lagrange

Définition 3.6.1 *Soit g un élément d'un groupe G. S'il existe un entier strictement positif n tel que $g^n = e$, alors on peut choisir n minimal avec cette propriété. On dit que g est un élément d'ordre n, et on le note $n = \mathrm{ord}(g)$.*

S'il n'existe pas d'entier strictement positif n tel que $g^n = e$, on dit que g est un élément d'ordre infini.

Proposition 3.6.2 *Soit g est un élément d'ordre N d'un groupe G, $N = \mathrm{ord}(g)$.*

Alors $N = \mathrm{ord}(g)$ coïncide avec l'ordre du sous-groupe $\langle g \rangle$ engendré par g.

Preuve. Selon le théorème 3.5.6 sur les groupes monogènes, il existe un isomorphisme $\overline{\phi} : \mathbb{Z} \to \langle g \rangle = \mathrm{Im}(\phi)$, où N est le plus petit nombre positif tel que $N \in \mathrm{Ker}\phi$, i.e. $g^N = e$. On voit donc que N coïncide avec l'ordre de l'élément g, CQFD.

Théorème 3.6.3 (Lagrange) (voir Proposition 3.4.3)

Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G, alors $|H|$ divise $|G|$.

De plus, $|G| = |H| \cdot |G/H|$.

Corollaire 3.6.4 *Soit g est un élément d'ordre n d'un groupe fini G, alors $\mathrm{ord}(g)$ divise $|G|$.*

De plus, $|G| = |G/\langle g \rangle| \cdot \mathrm{ord}(g)$

EXERCICE 3.6.5 *Montrer que pour tout diviseur d d'un nombre entier positif N, il existe un élément d'ordre d dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.*

EXERCICE 3.6.6 *Trouver tous les ordres des éléments dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times$.*

EXERCICE 3.6.7 *Trouver l'ordre des éléments $\overline{17}$, $\overline{2}$ et $\overline{3}$ du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times$.*

```
> restart;
> 5 &^ 1000 mod 100;
                                  25
> 17&^ 20 mod 61;
                                  13
> 17&^ 30 mod 61;
                                  60
> 17&^ 12 mod 61;
                                  20
> 2&^ 20 mod 61;
                                  47
> 2&^ 30 mod 61;
                                  60
> 2&^ 12 mod 61;
                                   9
> 3&^ 20 mod 61;
                                   1
> 3&^ 10 mod 61;
                                   1
> 3&^ 5 mod 61;
                                  60
> 3&^ 2 mod 61;
                                   9
```

Réponse : $\mathrm{ord}(\overline{17}) = 60$, $\mathrm{ord}(\overline{2}) = 60$ et $\mathrm{ord}(\overline{3}) = 10$.

EXERCICES

3.1 Trouver pour tout diviseur d d'un nombre entier positif N, tous les éléments d'ordre d dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

3.2 Trouver tous les éléments d'ordre maximal dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times$

3.3 Les groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$ sont-ils cycliques ?

3.4 Trouver l'ordre des éléments $\overline{5}$ et $\overline{7}$ du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times$.

3.5 Trouver tous les éléments d'ordre maximal dans les groupes de permutations $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

4 Rappels sur la notion d'anneau, exemples

4.1 Structure d'anneau et idéaux

DÉFINITION 4.1.1 *Un anneau est un groupe abélien A muni d'une loi interne*

$$A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto xy = x \cdot y$$

appelé produit ou multiplication, qui est associative

An1 $\forall x, y, z \in A, x(yz) = (xy)z$,

et distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition :

An2 $\forall x, y, z \in A, x(y + z) = xy + xz$,

An3 $\forall x, y, z \in A, (y + z)x = yx + zx$,

On prendra également la convention que tout anneau est unifère, c'est-à-dire que la multiplication est munie d'un élément neutre 1 :

An3 $\forall x \in A, 1x = x1 = x$.

L'anneau est dit commutatif si la loi de multiplication est commutative :

Comm. $\forall x, y \in A, xy = yx$.

DÉFINITION 4.1.2 *Un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ est une application telle que*

MorAn $\forall x, y, z \in A, \varphi(xy + z) = \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(z) \in A, \varphi(1_A) = 1_B$

SAn *Une partie $A \subset B$ est dite un sous-anneau, si l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux.*

EXEMPLE. On pose $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$, alors $A = \{0\} \times \mathbb{Z}$ est un anneau, mais pas un sous-anneau de B.

DÉFINITION 4.1.3 *Soit A un anneau commutatif. Une partie $I \subset A$ est dite un idéal si c'est un sous-groupe additif pour l'addition, stable par la multiplication externe par un élément quelconque $y \in A$.*

Idéal $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$.

Opérations sur les idéaux

DÉFINITION 4.1.4

(a) Soient I, J deux idéaux de de A. Leur somme

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

est le plus petit idéal de A contenant I et J.

La somme d'une famille d'idéaux $(I_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ *est formée par toutes les sommes finies*

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha, x_\alpha \in I_\alpha \right\}$$

où $x_\alpha = 0$ sauf un nombre fini de $\alpha \in \Gamma$.

(b) L'intersection ensembliste

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha$$

d'une famille d'idéaux $(I_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ *est toujours un idéal de A.*

(c) Soit X une partie d'un anneau A. L'intersection de tous les idéaux de A, contenant X, est dite l'idéal engendré par *X.*

(d) Le produit

$$I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_n$$

d'un nombre fini d'idéaux est l'idéal engendré par

$$\{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_1, \cdots, x_n \in I_n\}$$

En particulier, l'idéal I^n est engendré par

$$\{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \mid x_1, x_2 \in I_1, \cdots, x_n \in I.\}$$

EXEMPLE.

a) Si $A = \mathbb{Z}$, $I = (m)$, $J = (n)$, alors

$$I + J = (\text{pgcd}(m, n)), I \cap J = (\text{ppcm}(m, n)), I \cdot J = (mn).$$

REMARQUE.

L'idéal engendré par une famille x_α, coïncide avec la somme

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} (x_\alpha)$$

de tous les idéaux principaux $(x_\alpha) = x_\alpha A$.

REMARQUE. Montrer en exercice que l'union d'une famille d'idéaux $(I_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ n'est pas un idéal en général, mais que c'est le cas si les idéaux I_α sont totalement ordonnés par l'inclusion :

$$\forall \alpha, \beta, \text{ soit } I_\alpha \subset I_\beta, \text{ soit } I_\beta \subset I_\alpha.$$

4.2 Anneau quotient

DÉFINITION 4.2.1 *Soit A un anneau commutatif, $I \subset A$ un idéal de A. Alors il existe sur le groupe quotient additif A/I une unique structure d'anneau telle que la projection canonique $\pi : A \to A/I$ soit un morphisme d'anneaux.*

PROPOSITION 4.2.2

(a) Soit A un anneau commutatif, $I \subset A$ un idéal de A. Alors il existe une bijection entre l'ensemble

$$\{J \subset A \mid J \supset I\}$$

des idéaux contenant I, et l'ensemble

$$\{\overline{J} \subset A/I\}$$

des idéaux de A/I, donnée par $J = \pi :^{-1} (\overline{J})$, où $\pi : A \to A/I$ est la projection canonique.

(b) Soit $\psi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, alors $I = \text{Ker}\psi := \psi^{-1}(0)$ est un idéal de A, $\psi(A) = C$ est un sous-anneau de B, et il y a un isomorphisme d'anneaux

$$\overline{\psi} : A/I \xrightarrow{\sim} C.$$

NOTATIONS.

On écrit

$$x \equiv y \bmod I \Longleftrightarrow x - y \in I.$$

Diviseurs de zéro, éléments nilpotents et unités

DÉFINITION 4.2.3

(a) Un $x \in A\backslash\{0\}$ est dit diviseur de zéro*, s'il existe un $y \in A\backslash\{0\}$ tel que $xy = 0$. Un anneau $A \neq \{0\}$ sans diviseur de zéro est dit* intègre.

(b) Un élément $x \in A\backslash\{0\}$ est dit nilpotent*, si $x^n = 0$ pour un $n \geq 1$.*

(c) Un élément $x \in A$ est dit inversible *(ou une* unité*) de A s'il existe $y \in A, xy = 1$. On notera $x \in A^\times$.*

DÉFINITION 4.2.4 *Un corps est un anneau commutatif A, non réduit à $\{0\}$ dans lequel tout élément non nul est inversible :*

Corps $\forall x \in A, x \neq 0, \exists y \in A, xy = 1$

PROPOSITION 4.2.5

(a) Soit A un corps, alors A est un anneau intègre.

(b) Soit A un corps, I un idéal de A. Alors soit $I = \{0\}$ soit $I = A$.

4.3 Idéaux premiers

DÉFINITION 4.3.1

(a) Un idéal $I \neq A$ est dit premier*, si*

$$\forall x, y \in A, x \cdot y \in I \Longleftrightarrow x \in I \text{ ou } y \in I,$$

i.e. l'anneau quotient A/I est intègre.

(b) Un idéal $I \neq A$ est dit maximal*, si*

$$\forall \text{ idéal } J \subset A, I \subset J \Rightarrow I = J, \text{ ou } J = A$$

PROPOSITION 4.3.2

(a) Un idéal $I \neq A$ est dit maximal*, si et seulement si A/I est un corps*

(b) Tout idéal maximal est premier.

PREUVE (a) On suppose I maximal. Si $x \notin I$, on considère l'idéal (x, I) engendré par x et I. Alors $(x, I) \neq I$ donc $(x, I) = A$; ceci dit, il existe $a \in A$ et $b \in I$ tels que $ax + b = 1$; ceci dit, $\overline{ax} = \overline{1}$ dans A/I.

Réciproquement, si A/I est un corps, les seuls idéaux de A/I sont $\{0\}$ et A/I. Par la proposition 4.2.2, a), il existe une bijection entre l'ensemble

$$\{J \subset A \mid J \supset I\}$$

des idéaux contenant I, et l'ensemble

$$\left\{\overline{J} \subset A/I\right\}$$

des idéaux de A/I. Donc il n'y a pas d'idéaux strictement intermédiaires entre I et A, i.e. I est maximal.

(b) Un corps est toujours un anneau intègre, donc I est premier.

EXEMPLE.

a) Dans l'anneau $A = \mathbb{C}[X, Y]$ l'idéal $I = (X, Y)$ est maximal, $A/I \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

L'idéal $J = (X)$ n'est pas maximal, mais premier :$A/J \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[Y]$.

b) Trouver tous les idéaux maximaux dans l'anneau $A = \mathbb{Z}[X]$.

L'idéal $J = (p)$ n'est pas maximal, mais premier :$A/J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[X]$.

4.4 Divisibilité dans les anneaux

DÉFINITION 4.4.1 *Soit A un anneau commutatif.*

(a) Si a et $b \in A$, on dit que a divise *b et on note $a|b$ s'il existe un $c \in A$ tel que $b = ac$. On dit également que b est un* multiple *de a ou que a est un* diviseur *de b. On note $(a) = aA$ l'ensemble des multiples de a. C'est un idéal de A engendré par a.*

(b) Soit A un anneau intègre*. Deux éléments a et $b \in A$ sont dits* associés *s'ils vérifient une des conditions équivalentes suivantes :*

(i) $\exists u \in A^\times, b = ua$
(ii) $a|b$ *et* $b|a$
(iii) $(a) = (b)$

On notera dans ce paragraphe $a \sim b$ (c'est une relation d'équivalence).

DÉFINITION 4.4.2 *Un élément $a \in A$ est dit* irréductible*, s'il vérifie les deux conditions suivantes :*
Irr1. $a \notin A^\times$
Irr2. *Si $a = bc$ avec $b, c \in A$ alors $b \in A^\times$ ou $c \in A^\times$.*

EXEMPLE. Les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}$ sont les éléments de la forme p ou $-p$ avec p premier, car on a $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$.

PROPOSITION 4.4.3 *Dans A anneau commutatif intègre, soit p un élément non nul. Si (p) est premier alors p est irréductible. La réciproque est fausse en général.*

DÉFINITION 4.4.4 *Soient A un anneau commutatif intègre, I un ensemble et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de A.*

(i) On dit que $d \in A$ est un pgcd de la famille $(a_i)_{i\in I}$, $d = \mathrm{pgcd}(a_i)_{i\in I}$, si

$$\forall i \in I, d|a_i \text{ et } \forall r \in A, (\forall i \in I, r|a_i) \Rightarrow r|d$$

(ii) On dit que $m \in A$ est un ppcm de la famille $(a_i)_{i\in I}$, $m = \mathrm{ppcm}(a_i)_{i\in I}$, si

$$\forall i \in I, a_i|m \text{ et } \forall r \in A, (\forall i \in I, a_i|r) \Rightarrow m|r$$

EXEMPLE 4.4.5 *Le pgcd et ppcm n'existent pas toujours dans un anneau commutatif. Un exemple connu est donné par le sous–anneau $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ de $\mathbb{C}$, dans lequel il existe essentiellement différentes factorisations en éléments irréductibles :*

$$2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5}).$$

Montrer que les irréductibles 2 et $1 + i\sqrt{5}$. n'ont pas de ppcm dans A, et que le couple $(6, 2 \cdot (1 + i\sqrt{5}))$ n'a ni ppcm ni pgcd dans A.

REMARQUE. Si $d = \mathrm{pgcd}(a_i)_{i\in I}$ et $m = \mathrm{ppcm}(a_i)_{i\in I}$ existent, ils ne sont en fait pas uniques. Seules leurs classes d'équivalence dans $A/\sim$ le sont (on suppose A intègre).

4.5 Anneaux euclidiens et anneaux principaux

La notion de division pour les polynômes et les entiers conduit à la notion d'anneau euclidien.

DÉFINITION 4.5.1 *Un anneau intègre A est dit* euclidien *s'il existe une application $\phi : A \to \mathbb{N}$ appelée* stathme *telle que*

$$\forall a \in A\backslash\{0\} \forall b \in A, \exists (q,r) \in A^2, b = aq + r \text{ avec } r = 0 \text{ ou } \phi(r) < \phi(a)$$

EXEMPLE. L'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ est euclidien pour la valeur absolue.

EXERCICE. Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[j]$ sont euclidiens pour le carré de la valeur absolue complexe.

DÉFINITION 4.5.2 *Un anneau intègre A est dit* principal *si tout idéal I de A est princapal, c'est-à-dire, il existe un $a \in A$, tel que $I = (a)$.*

THÉORÈME 4.5.3 *Tout anneau A euclidien est principal.*

PREUVE. Soit A un anneau euclidien et I un idéal de A. Si $I \neq \{0\}$, il existe un élément non nul dans I. On choisit un élément x de I tel que $\phi(x)$ soit minimal. Alors $I = (x)$. En effet, pour tout $y \in I$, on écrit $y = xq + r$ avec $r = 0$ ou $\phi(r) < \phi(x)$. Comme $r = y - xq$, $r \in I$ et par minimalité de $\phi(x)$, $r = 0$. Donc $y \in (x)$, CQFD

PROPOSITION 4.5.4 *Soit A un anneau principal. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathfrak{a}$ est un idéal maximal non nul de A ;
(ii) $\mathfrak{a}$ est un idéal premier non nul de A ;
(iii) il existe un élément p irréductible de A tel que $\mathfrak{a} = (p)$.
PREUVE. *(i)⇒(ii) Car un idéal maximal est premier.*
(ii)⇒(iii) Comme A est principal, il existe p tel que $\mathfrak{a} = (p)$ mais comme (p) est premier, p est irréductible.
(iii)⇒(i) Soit p irréductible et $\mathfrak{a} = (p)$. Par l'hypothèse, $p \notin A^\times$, donc $\mathfrak{a} \neq A$. Soit $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Comme A est principal, $\mathfrak{b} = (q)$. Donc $q|p$, si $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, alors q et p ne sont pas associés. Donc $q \in A^\times$, et $\mathfrak{b} = A$.

COROLLAIRE 4.5.5 (LEMME D'EUCLIDE) *Soient A un anneau principal, p un élément irréductible dans A. Alors*

$$p|ab \Rightarrow (p|a \text{ ou } p|b).$$

PROPOSITION 4.5.6 *Soit A un anneau principal, alors toute famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de A admet un pgcd et ppcm.*

PREUVE. Le pgcd est donné comme un générateur de l'idéal $\sum_{i\in I}(a_i)$ et le ppcm comme un générateur de l'idéal $\bigcap_{i\in I}(a_i)$.

PROPOSITION 4.5.7 (BEZOUT) *Si A est un anneau principal et $a_1, \cdots, a_n \in A$, alors il existe $b_1, \cdots, b_n \in A$ tels que*

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \text{pgcd}(a_1, \cdots, a_n)$$

PREUVE. Le pgcd est un générateur de l'idéal $(a_1, \cdots, a_n)$, donc il existe $b_1, \cdots, b_n \in A$ tels que

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \text{pgcd}(a_1, \cdots, a_n).$$

DÉFINITION 4.5.8 *Si A est un anneau principal et $a_1, \cdots, a_n \in A$, Si* $\text{pgcd}(a_1, \cdots, a_n) = 1$ *alors on dit que $a_1, \cdots, a_n$ sont* premiers entre eux. *Dans ce cas il existe $b_1, \cdots, b_n \in A$ tels que*

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 1$$

PROPOSITION 4.5.9 (LEMME DE GAUSS) *Soit A est un anneau principal et $b, c \in A$ deux éléments premiers entre eux. Alors si $c|ab$, alors $c|a$ dans A.*

PREUVE. Par le théorème de Bezout, il existe u, v tels que $bu + cv = 1$. Comme $c|ab$ par l'hypothèse,

$$c|a(bu + cv) = abu + acv = a, \qquad \square$$

ceci implique que $c|a$.

4.6 Décomposition en facteurs irréductibles

DÉFINITION 4.6.1 *Un anneau intègre A est dit* factoriel *s'il vérifie les conditions suivantes :*
Existence. *Pour tout élément non nul a de A il existe un élément inversible $u \in A^\times$ et des éléments irréductibles $p_1, \cdots, p_m$ de A tels que*

$$a = u p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$$

(il se peut que $m = 0$, dans ce cas $a \in A^\times$).
Unicité. *Soient m, n, $p_1, \cdots, p_m$ et $q_1, \cdots, q_n$ des éléments irréductibles de A et $u, v \in A^\times$ des éléments inversibles de A tels que*

$$u p_1 \cdot \ldots \cdot p_m = v q_1 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

alors $m = n$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $q_i \sim p_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, \cdots n$.

THÉORÈME 4.6.2 *Tout anneau A principal est factoriel.*

PREUVE. Existence. On raisonne par l'absurde : soit a_0 un élément de $A \backslash \{0\}$, non inversible, qui ne s'écrit pas comme produit d'éléments irréductibles. En particulier, a_0 n'est pas irréductible et on peut écrire : $a_0 = a_1 a_1'$ avec a_1 et a_1' non inversibles. Si ces deux éléments sont produits d'irréductibles, alors il en est de même de a_0. Quitte à échanger a_1 et a_1', on peut supposer que a_1 n'est pas produit d'irréductibles. En itérant, on obtient une suite infinie $a_0, a_1, \cdots, a_n \cdots$ d'éléments tels que

$$(a_0) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_n) \subsetneq \cdots \subsetneq \cdots$$

La réunion $I = \bigcup_{n=0}^{\infty}$ est un idéal de A. En effet $0 \in I$ et si b_1 et b_2 appartiennent à I, il existe n_1 et n_2 tels que $b_1 \in a_{n_1}$ et $b_2 \in a_{n_2}$. Soit $n = \sup(n_1, n_2)$, alors $b_1 - b_2 \in (a_n)$ donc I est un sous groupe de A et si b appartient à I et a à A il existe n tel que $b \in\in (a_n)$ et $ab \in (a_n) \subset I$. Comme A est principal, $I = (a)$ pour un $a \in A$. Mais comme $a \in I$, il existe n tel que $a \in (a_n)$ donc

$$(a_n) \subsetneq (a_{n+1}) \subsetneq (a_n) \subset I = (a) \subset (a_n),$$

ce qui est absurde.

Unicité. Si on a une égalité de la forme

$$u p_1 \cdot \ldots \cdot p_m = v q_1 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

avec $p_1, \cdots, p_m$ et $q_1, \cdots, q_m$ des éléments irréductibles, et $u, v \in A^\times$ des éléments inversibles de A, on peut supposer que $m \geq n$. On procède alors par récurrence sur m. Si $m = 0$, alors $n = 0$ et le résultat annoncé est vrai. Mais, par le lemme d'Euclide (Corollaire 4.5.5, p_1 divise v ou l'un des q_i. Comme v est inversible, si $p_1|v$ alors p_1 est inversible ce qui contredit le fait que p_1 soit irréductible. On a

$$p_1 | q_1 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Donc p_1 divise l'un des q_i.

Quitte à échanger les q_i, on peut supposer que $p_1|q_1$. Comme le nombre q_1 est premier, on obtient $p_1 = wq_1$ avec $w \in A^\times$, d'où

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = (vw) q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$$

(après la simplification), et il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence au produit $p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ de $m-1$ facteurs irréductibles.

Exercices

4.1 Le pgcd et ppcm n'existent pas toujours dans un anneau commutatif : soit A le sous–anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ de $\mathbb{C}$. L'élément 6 y admet deux factorisations essentiellement différentes en éléments irréductibles :

$$2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5}).$$

On pose $a = 2$ et $b = 1 + i\sqrt{5}$. Montrer que $\mathrm{ppcm}(a, b)$ n'existe pas dans A et que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que le couple $(6, ab)$ n'a ni ppcm ni pgcd dans A.

4.2 Soit p un nombre premier. Trouver tous les diviseurs de zéro dans les anneaux

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

4.3 Trouver tous les éléments nilpotents dans les anneaux

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

4.4 Trouver tous les éléments inversibles dans les anneaux

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

4.5 Montrer qu'un anneau fini est intègre si et seulement si c'est un corps.

4.6 Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ (“"entiers de Gauss") et $\mathbb{Z}[j]$ sont euclidiens pour le carré du module.

4.7 Trouver tous les éléments inversibles dans les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[j]$. [Indication : commencer par caractériser ces éléments en terme de module.]

4.8 On veut décrire tous les éléments irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$:

a) Soit p un nombre premier. Montrer que p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers, et que cela équivaut aussi à ce que -1 soit un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On montre (cf. ..) que cette condition est vérifiée exactement pour $p = 2$ ou $p \equiv 1 \bmod 4$.

b) Montrer que les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont exactement, aux inversibles près, les entiers premiers p tels que $p \equiv 3 \bmod 4$ et les entiers de Gauss $z = a + ib$ tels que l'entier $a^2 + b^2$ soit premier.

4.9 Montrer que l'anneau des nombres décimaux

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b = 10^k, k \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

est euclidien. Trouver tous ses éléments inversibles. Déterminer $\mathrm{pgcd}(14/10, 105)$.

4.10 Montrer que tout corps est un anneau euclidien.

5 Théorème des restes chinois

5.1 Théorème des restes dans les anneaux principaux

Commençons par énoncer un résultat préliminaire :

PROPOSITION 5.1.1 *Si A est un anneau principal et $a_1, \cdots, a_n$ des éléments premiers entre eux deux à deux, alors*

$$\mathrm{ppcm}(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

LEMME 5.1.2 *Soit A un anneau principal. Si b est premier avec chacun des $a_1, \cdots, a_n$, alors b est premier avec $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.*

PREUVE du lemme. On procède par récurrence. L'énoncé est vrai si $n = 1$. Montrons le pour $n = 2$. Par le théorème de Bezout, comme b est premier avec a_1 et a_2, il existe des éléments x_1, x_2, y_1, y_2 de A tels que

$$1 = x_1 b + y_1 a_1, \text{ et } 1 = x_2 b + y_2 a_2.$$

Par conséquent,

$$1 = (x_1 b + y_1 a_1)(x_2 b + y_2 a_2) = (x_1 x_2 b + y_1 a_1 x_2 + x_1 y_2 a_2) b + y_1 y_2 a_1 a_2,$$

ce qui implique le résultat dans ce cas. Si le résultat est vrai pour $n - 1$ par hypothèse de récurrence, b est premier avec $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ et a_n. Donc, en utilisant $n = 2$, on obtient que b est premier avec le produit $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.

PREUVE de la proposition. On montre la proposition par récurrence. Elle est vraie pour $n = 1$. Si $n = 2$, comme

$$a_1 | \frac{\mathrm{ppcm}(a_1, a_2)}{a_2} \times a_2,$$

en appliquant le lemme de Gauss, a_1 divise $\frac{\mathrm{ppcm}(a_1, a_2)}{a_2}$ et donc $a_1 a_2 | \mathrm{ppcm}(a_1, a_2)$. Enfin pour la récurrence on utilise l'assertion qui précède et l'égalité

$$\mathrm{ppcm}(a_1, \cdots, a_n) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{ppcm}(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n).$$

THÉORÈME 5.1.3 (THÉORÈME DES RESTES) *Si A est un anneau principal et $a_1, \cdots, a_n$ des éléments premiers entre eux deux à deux, alors*

$$A/(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} A/(a_i).$$

PREUVE du théorème. On considère l'application

$$A \to \prod_{i=1}^{n} A/(a_i),$$

produit des projections canoniques. Son noyau est $\bigcap_{i=1}^{n}(a_i)$ qui par la proposition précédente coïncide avec $\prod_{i=1}^{n}(a_i)$. On obtient donc un morphisme injectif

$$A/(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \to \prod_{i=1}^{n} A/(a_i).$$

Il reste donc à montrer que cette application est surjective. Cela revient à montrer que, sous les hypothèses du théorème, pour toute famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de A^n, il existe x dans A tel que $a_i | x - x_i$ pour tout i entre 1 et n. Là encore, nous allons procéder par récurrence. Pour $n = 1$, le résultat est vrai. Pour $n = 2$, en utilisant Bezout, on peut écrire $1 = a_1 b_1 + a_2 b_2$, avec b_1 et b_2 des éléments de A. On pose $x = a_1 b_1 x_2 + a_2 b_2 x_1$. On obtient

$$x - x_1 = a_1 b_1 (x_2 - x_1) \text{ et } x - x_2 = a_2 b_2 (x_1 - x_2).$$

Donc x convient.

Si le résultat est vrai pour $n-1$, il existe y tel que $a_i | y - x_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et en utilisant le cas $n = 2$, il existe un élément x de A tel que

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i | x - y \text{ et } a_n | x_n - y.$$

Par conséquent $a_i | y - x_i$ pour $1 \leq i \leq n$, CQFD.

Remarque 5.1.4 (Théorème de Bezout : une forme explicite) *Si A est un anneau principal et $a_1, \cdots, a_n$ des éléments premiers entre eux deux à deux, alors on peut explicitement donner un $x \in A$ tel que pour toute collection de classes $x_i \bmod a_i = x_i + (a_i)$, $x \equiv x_i \bmod a_i$. On pose $A_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_j$. Alors on a $\text{pgcd}(A_1, \cdots, A_n) = 1$ puisque $a_1, \cdots, a_n$ sont des éléments premiers entre eux deux à deux. Ceci dit, par l'identité de Bezout, qu'il existe $u_i \in A$ tels que*

$$A_1 u_1 + \cdots + A_n u_n = 1$$

Il vient que

$$A_i u_i \equiv \begin{cases} 0 \bmod a_j, & \text{si } j \neq i \\ 1 \bmod a_i \end{cases}$$

Ceci implique qu'on peut définir x comme

$$x = x_1 A_1 u_1 + \cdots + x_n A_n u_n.$$

En effet, la congruence précédente montre que

$$\forall i = 1, \cdots, n, \ x = x_1 A_1 u_1 + \cdots + x_n A_n u_n \equiv x_i \bmod a_i.$$

5.2 Eléments inversibles mod n

Proposition 5.2.1 *Soit m un entier strictement positif et a un entier relatif. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\overline{a}$ est un générateur du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

(ii) $\overline{a}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

(iii) a est premier à m.

On note $\varphi(m)$ le cardinal de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. La fonction $\varphi(m)$ est appelée la fonction indicatrice d'Euler. On a la relation suivante :

$$\varphi(m) = m \prod_{p \in \mathcal{P} \,\big|\, p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i - 1}(p_i - 1).$$

PREUVE de i) et ii) est déjà faite dans la Proposition 2.3.1 (sur la simplification dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) : si $\text{pgcd}(a, n) = 1$ et

$$ax \equiv ay \pmod{n}$$

alors $x \equiv y \pmod{n}$.

On va déduire iii) de l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/(p_i^{m_i}).$$

En considérant les éléments inversibles, on obtient un isomorphisme de groupes

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/(p_i^{m_i}))^\times.$$

Par conséquant

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{m_i}).$$

Mais si p est premier, a est premier à p si et seulement s'il n'est pas divisible par p.

Donc

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1),$$
$$\varphi(p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}) = p_1^{n_1-1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r-1}(p_r - 1).$$

EXEMPLE.

$$\varphi(4) = 2, \varphi(25) = 20, \varphi(100) = 40, \varphi(1000) = 4 \cdot 100 = 400.$$

EXERCICE. Trouver la factorisation en produit de nombres premiers de $\varphi(8!)$.

REMARQUE. Le problème de calculer $\varphi(n)$ est difficile pour les grands entiers n, puisqu'il dépend de la factorisation de n.

COROLLAIRE 5.2.2 (THÉORÈME DE FERMAT-EULER) *Pour tout entier strictement positif n et tout élément a de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, on a*

$$a^{\varphi(n)} = 1.$$

PREUVE. Cela résulte du théorème de Lagrange (théorème 3.6.3), appliqué au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

EXEMPLE.

```
> 3&^400 mod 100000;
```

88001

5.3 Application à la cryptographie : RSA

La *cryptographie théorique* est une science qui étudie les systèmes d'échange d'information protégée.

On considère un système d'utilisateurs $U_1, U_2, U_3 \ldots$. De temps en temps chaque couple d'utilisateurs aurait besoin d'échanger des messages qui doivent rester secrets pour les autres utilisateurs et pour toute autre personne non autorisée.

Dans les *systèmes classiques* de cryptographie, ils doivent échanger d'abord les clés et après les garder secrètes. La cryptographie à *clef publique* évite la dernière restriction : les communications secrètes deux à deux deviennent possibles en utilisant seulement une information accessible à tout le monde. Un tel système peut être réalisé de la façon suivante : pour l'ensemble $\{U_i\}$ des utilisateurs et un ensemble fini $\mathcal{M}$ des "messages" , on associe à tout U_j deux applications

$$\mathcal{E}_j : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \text{ et } \mathcal{D}_j : \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

de telle façon que $\mathcal{D}_j$ est secrète, $\mathcal{E}_j$ est publique, et

$$\mathcal{E}_j \circ \mathcal{D}_j = id = \mathcal{D}_j \circ \mathcal{E}_j : \mathcal{M} \to \mathcal{M}.$$

(donc la connaissance de $\mathcal{E}_j$ ne donne pas $\mathcal{D}_j = \mathcal{E}_j^{-1}$.

Cryptographie asymétrique.

Les méthodes anciennes utilisées pour le cryptage et le décryptage étaient *symétriques* : les applications

$$\mathcal{E}_{ij} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \text{ et } \mathcal{D}_{ij} : \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

étaient connues par U_i et U_j, mais secrètes pour tout autre utilisateur U_k, avec $k \neq i, j$.

Par exemple, on a utilisé souvent le cryptage *par permutation* $\mathcal{E}_{ij}$, ou cryptage par *addition d'un grand nombre aléatoire* dans $\mathcal{M} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

En 1976, de nouveaux systèmes de cryptographie *asymétriques* ont été découverts par Diffie, Hellman, Rivest, Shamir, Adleman basés sur la difficulté du *problème d'inversion*.

Fonctions sens unique à trappe.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux ensembles finis, par exemple $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{M}$. Une fonction ψ bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est dite une *fonction à sens unique* (FSU) si étant donné $y \in \mathcal{F}$ tel qu'il existe $x \in \mathcal{E}$ avec $\psi(x) = y$, la seule donnée de ψ et de y ne permet pas de calculer x ; c'est le *problème d'inversion*, c'est-à-dire calculer la fonction inverse ψ^{-1} de ψ. La fonction ψ est dite *fonction à sens unique à trappe* (FSUT) si c'est une FSU telle qu'il existe une information supplémentaire, la *clé secrète* $\mathcal{K}$, qui permet de résoudre le problème d'inversion.

Utilisations des fonctions sens unique à trappe.

Soit ψ une FSUT de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ avec la clé secrète $\mathcal{K}$. Les messages possibles sont les éléments de $\mathcal{E}$ et les messages cryptés sont les éléments de $\mathcal{F}$. Afin de recevoir des messages cryptés, *Alice* (un utilisateur) rend publique la fonction ψ (fonction de cryptage), elle garde secrète néanmoins la clé $\mathcal{K}$. Pour transmettre un message $x \in \mathcal{E}$ à *Alice*, *Bob* calcule $y = \psi(x)$ et envoie y. Afin de décoder le message y, il faut pouvoir calculer $x = \psi^{-1}(y)$, or seule *Alice*, qui possède $\mathcal{K}$, arrive à calculer ψ^{-1} (fonction de décryptage). Ainsi, tout le monde peut coder un message, mais seule *Alice* peut le décoder.

5.4 Principaux protocoles.

Les principaux protocoles existants utilisant des FSU ou des FSUT sont le protocole RSA, et les protocoles de type ElGamal basés sur le problème du logarithme discret : dans le groupe des éléments inversibles d'un corps fini ou dans le groupe des points d'une courbe elliptique sur un corps fini.

Le protocole RSA (comme Rivest, Shamir, Adleman), voir [RSA]

Soient p et q deux nombres premiers de grande taille, distincts ; on pose $n = p \cdot q$. L'ensemble $\mathcal{E}$ et l'ensemble $\mathcal{F}$ sont le même ensemble : l'ensemble $\mathcal{M} = \{0, \ldots, n-1\}$ des nombres entiers entre 0 et $n-1$. Soit e un nombre entier premier avec $(p-1)(q-1)$. La fonction ψ est la fonction

$$\psi(x) = x^e \mod n,$$

la clef secrète $\mathcal{K}$ est un entier d tel que

$$e \cdot d \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)},$$

alors on a

$$\psi^{-1}(x) = x^d \pmod{n}.$$

Cette assertion est vraie pour tous les $x \mod pq$.

Si $\text{pgcd}(x, pq) = 1$, on utilise le théorème 5.2.2 d'Euler-Fermat :

$$x^{ed} \equiv x \bmod pq.$$

Si, par exemple $p|x$, mais $q \nmid x$, on a

$$ed = 1 + (p-1)(q-1)t \Rightarrow x^{ed} = (x)^{1+(p-1)(q-1)t} = x(x^{(p-1)t})^{q-1} \equiv x \bmod pq$$

$$\Rightarrow x^{ed} = \begin{cases} x((x)^{(p-1)})^{q-1} \equiv x \cdot 1 \bmod q, \\ \equiv 0 \equiv x \bmod p \end{cases} \quad \Rightarrow x^{ed} \equiv x \bmod pq.$$

La sécurité du protocole RSA

repose sur le fait que pour calculer l'entier d, il faut connaître les nombres p et q, et donc être à même de factoriser l'entier n.

Pour réaliser ce schéma on utilise la difficulté pratique de la factorisation des grands entiers en produit de nombres premiers.

Système RSA pour plusieurs utilisateurs

a). Chaque utilisateur U_i choisit deux grands nombres premiers distincts p_i, q_i, et deux classes $e_i, d_i \bmod n_i$ où $n_i = p_i q_i$ telles que $e_i d_i \equiv 1 \bmod \varphi(n_i)$ où $\varphi(n_i) = (p_i - 1)(q_i - 1)$ désigne la fonction d'Euler.

b). Les nombres (e_i, n_i) sont publics pour tous les utilisateurs (ils sont publiés dans une sorte d'"annuaire").

On suppose qu'il n'est pas possible de calculer d_i à partir de (e_i, n_i), donc d_i peut être consideré comme une clef secrète de décryptage connue seulement par U_i. En effet, on montrera qu'un algorithme efficace pour calculer d_i fournit aussi la *factorisation* de n_i (ceci dit, un tel algorithme est *équivalent* à la résolution d'un problème supposé difficile). Supposons qu'on connaît d_i. Alors on sait que $\varphi(n_i)$ *divise* $e_i d_i - 1$. Si l'on avait connu $\varphi(n_i)$ on aurait pu trouver facilement p_i, q_i car

$$\varphi(n_i) = (p_i - 1)(q_i - 1) = p_i q_i - (p_i + q_i) + 1 \Rightarrow$$
$$p_i + q_i = n_i + 1 - \varphi(n_i) \text{ et } p_i - q_i = \sqrt{(p_i + q_i)^2 - 4n_i}.$$

On peut montrer même que si l'on connaît seulement un multiple de $\varphi(n_i)$ on peut trouver p_i, q_i.

c). Supposons qu'un utilisateur U_i souhaite transmettre à U_j un message secret repésenté comme une suite de bits. Tout d'abord, il décompose cette suite en blocs de longueur $[\log_2 n_j]$, puis il considère tout

bloc comme une classe de résidus m mod n_j et finalement il crypte le message par la classe m^{e_j} mod n_j. Ceci dit, (n_j, e_j) sert comme la clef de cryptage du j-e utilisateur.

d). Ayant reçu le message crypté, U_j le décrypte bloc par bloc b mod n_j par le calcul de b^{d_j} mod n_j (rappelons qu'il connaît seulement sa clef de décryptage d_j). Ceci résulte immédiatement du théorème d'Euler-Fermat (corollaire 5.2.2).

Exemple de cryptage avec RSA

On suppose qu'on travaille avec un alphabet de N symboles, et on utilise l'écriture en base N. Soient $k < l$ deux entiers strictement positifs tel que $N^k < n_j < N^l$, par exemple $k = [\log_N n_j]$. Alors les blocs de k lettres correspondent aux nombres $0 \leq m << n_j$. Tout message est présenté comme une suite de tel blocs, et on crypte par blocs $M = m \bmod n_j$. Soit $f(M) = \mathcal{E}_j(M)$, $f : \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$. L'image $f(M)$ peut être présentée comme un bloc de l lettres car $n_j < N^l$ mais pas tous les blocs de l lettres n'apparaissent de telle façon.

Exemple. Soit $N = 26$ (l'alphabet de 26 lettres), $p_j = 281$, $q_j = 167$, $n_j = 46927$, $e_j = 39423$, $d_j = 26767$, $k = 3$, $l = 4$,

$$N^3 = 17576 < 46927 < N^4 = 456976.$$

Le mot "YES" correspond à $24 \cdot N^2 + 4 \cdot N + 18 = 16346 = m \bmod n_j$.

$$16346^{39423} \bmod 46927 = 21166 = 1 \cdot 26^3 + 5 \cdot 26^2 + 8 \cdot 26 + 2 = \text{ "BFIC" } = \bmod n_j$$

Pour décrypter le message, l'utilisateur U_j applique

$$b \mapsto b^{d_j} \bmod n_j, \ 21166^{26767} \bmod 46927 = 16346.$$

Signatures électroniques

Bien évidemmement, on peut varier les détails de ce schéma *ad infinitum*. Par exemple, on peut construire une procédure d'authentification ("electronic signature") qui utilise une forme *signée* d'un message secret de U_i à U_j permettant U_j de convaincre une troisième personne (un "juge") que l'auteur du message est bien U_i donc ce message n'été pas falsifié par U_j lui-même. Ceci peut être crucial pour certaines transactions interbancaires.

On considère l'application $\mathcal{E}_i$ de cryptage pour les messages adressés à U_i et soit $\mathcal{D}_i$ l'application de décryptage de U_i. Alors on a vu que $\mathcal{E}_i$ est publique tandis que $\mathcal{D}_i$ est privée (la propriété de U_i). Pour tout message M on a $\mathcal{D}_i(\mathcal{E}_i(M)) = M$ et $\mathcal{E}_i(\mathcal{D}_i(M)) = M$. L'utilisateur U_i en envoyant à U_j son message M utilise pour signature $S = \mathcal{D}_i(M)$ et il transmet à U_j sa version cryptée $\mathcal{E}_j(S)$. A son tour, U_j commence par calculer $S = \mathcal{D}_j(\mathcal{E}_j(S))$ puis $M = \mathcal{E}_i(S)$ en utilisant la clef publique $\mathcal{E}_i$. Le récepteur peut convaincre un juge que M vient de U_i parce que seule l'application $\mathcal{E}_i$ permet de transformer S en un message sensé M.

De plus, le récepteur de $S = \mathcal{D}_i(M)$ ne peut pas le falsifier car il ne connaît pas $\mathcal{D}_i$.

Maintenant on discutera plutôt les aspects arithmétiques que les aspects informatiques de la théorie des cryptosystèmes à clef publique. On montrera que les résultats classiques de l'arithmétique peuvent être appliqués dans ce domaine.

Problème 1. Comment produire des grands nombres premiers ?

On a besoin d'une méthode vraiment efficace pour organiser une production en masse de grands nombres premiers "suffisemment aléatoires" pour permettre à un utilisateur de calculer (à l'aide d'un ordinateur) son couple (p_i, q_i) et d'être sûr qu'aucun autre utilisateur n'aura le même.

Problème 2. Comment factoriser les grands entiers ?

Ce problème est crucial pour la "troisième personne" qui souhaite casser le cryptosystème mais aussi, bien sûr, pour les développeurs essayant d'assurer la fiabilité d'un tel système.

Le protocole ElGamal

Ce protocole s'applique dès que l'on a un groupe cyclique fini G. On fixe g un générateur de G et on note M l'ordre du groupe G. L'ensemble $\mathcal{E}$ est égal à G et l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie du produit $G \times G$, c'est-à-dire à l'ensemble formé des couples de deux éléments de G. *Alice* choisit, au hasard, un élément a dans $\{0, \dots, M-1\}$ et calcule g^a. Puis elle rend publics G, g et g^a. La clé secrète $\mathcal{K}$ est l'entier a. Pour crypter un message $x \in G$, *Bob* choisit un entier k au hasard dans $\{0, \dots, M-1\}$ et calcule $y_1 = g^k$, puis $y_2 = x \cdot (g^a)^k$ (ce qui est possible puisque g^a est public). Le message crypté est le couple $(y_1, y_2) \in G \times G$.

La fonction de cryptage FSUT

En d'autres termes, la fonction de cryptage FSUT ψ est donnée par

$$\psi(x) = \left(g^k, x \cdot (g^a)^k\right)$$

avec k un entier choisi au hasard dans $\{0, \dots, M-1\}$ et différent à chaque fois. Pour décrypter un tel message (y_1, y_2), *Alice* calcule y_1^{-a} et obtient

$$y_1^{-a} \cdot y_2 = g^{-ak} \cdot x \cdot g^{ak} = g^{ak-ak} \cdot x = x.$$

La sécurité du protocole ElGamal

Ainsi la fonction de décryptage

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) = y_1^{-a} \cdot y_2$$

n'est calculable que si on connaît la clé secrète $\mathcal{K}$.

La sécurité de ce protocole repose sur la difficulté de résoudre le *problème du logarithme discret*. Plus précisément, le problème de retrouver l'entier a étant donnés g et g^a. C'est un problème difficile dans la plupart des cas si l'ordre du groupe G est divisible par un grand nombre premier.

Exercices

5.1. *On considère l'équation*

$$X^2 - X = 0$$

Trouver toutes ses solutions dans les anneaux

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

5.2. *Soit p, q deux nombres premiers. Combien l'équation*

$$X^3 - X = 0$$

a-t-elle de solutions dans les anneaux

$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

6 Primalité (I)

On considère maintenant la question suivante : un entier naturel donné est–il premier ou composé ?

La méthode très ancienne du "crible" d'Eratosthène (3e siècle avant notre ère) donne la liste de tous les nombres premiers $\leq n$. Elle fournit aussi le plus petit nombre premier qui divise n et donc est un test de primalité, voir ci-dessus *Construction d'une table de nombres premiers*.

Cependant elle n'est pas très efficace car elle utilise plus de n divisions, et dépend exponentiellement de la longueur de l'écriture de n.

La démonstration d'Euclide du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini utilise la réduction *ad absurdum*. Une démonstration plus moderne est due à Euler : le produit étendu sur tous les nombres premiers

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \tag{6.1}$$

devrait être fini si l'ensemble des nombres premiers était fini. Cependant, la partie droite de (6.2.1) se réduit à une série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ par le théorème d'unique factorisation.

Fibonacci a suggeré (en 1202) un test plus rapide de primalité en remarquant que le plus petit diviseur non trivial de n est $\leq [\sqrt{n}]$ donc il suffit d'essayer seulement de tels nombres.

Rappelons une propriété importante des nombres premiers.

6.1 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps

THÉORÈME 6.1.1 *Soit $n \geq 2$ un entier. Alors l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.*

PREUVE. $\Rightarrow$ On raisonne par l'absurde : si n n'était pas premier, on aurait une décomposition $n = ab$ avec $a, b < n$ et strictement positifs. Dans ce cas les classes $\overline{a} = a \bmod n$ et $\overline{b} = b \bmod n$ sont non nulles donc inversibles dans le corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ce qui contredit l'égalité $\overline{a}\overline{b} = 0$.

$\Leftarrow$ Si n est premier, et $\overline{a} = a \bmod n$ un élément non nul, alors n ne divise pas a, donc n et a sont premiers entre eux. Par l'identité de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + nv = 1$, donc $\overline{au} = 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ceci dit , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

6.2 Petit théorème de Fermat

La contribution essentielle suivante dans le problème de vérification de primalité est liée au petit théorème de Fermat (dix–septième siècle). Ce résultat donne une condition nécessaire de primalité

THÉORÈME 6.2.1 (PETIT THÉORÈME DE FERMAT) *Soient n un nombre premier et a premier avec n. Alors*

$$a^{n-1} \equiv 1 \bmod n. \tag{6.2}$$

6.3 Nombres pseudopremiers de Fermat

La condition (6.2) (avec a fixe) est nécessaire mais n'est pas suffisante en général pour que n soit premier. Mais si elle n'est pas satisfaite pour n, alors sûrement n est composé (mais en général on ne connaît aucun de ses diviseurs). On appelle n *pseudopremier par rapport à* a si $\mathrm{PGCD}(a, n) = 1$ et la condition (6.2) est satisfaite.

EXEMPLE 6.3.1 *Soit $p = 323$. Est-ce que p est premier ? On calcule 2^{322} modulo 323. On organise les calculs dans une table :*

i	m	m_i	$2^{2^i} \bmod 323$
0	322	0	2
1	161	1	4
2	80	0	16
3	40	0	256
4	20	0	290
5	10	0	120
6	5	1	188
7	2	0	137
8	1	1	35

Alors

$$2^{322} \equiv 4 \cdot 188 \cdot 35 \equiv 157 \pmod{323},$$

donc 323 n'est pas premier. En effet, $323 = 17 \cdot 19$.

Les nombres composés $n = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$,$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ sont pseudopremiers par rapport à tout a (premier à n). On appelle un tel nombre *nombre de Carmichael*.

En 1994 il a été démontré par Alford, Granville et Pomerance que l'ensemble des nombres de Carmichael est infini (voir [AGP94]). Par exemple, un nombre n sans diviseurs carrés est un nombre de Carmichael si et seulement si pour tout diviseur premier p de n, $p - 1$ divise $n - 1$.

De la condition (6.2) provient un test rapide *probabiliste* de vérification de primalité. Il est basé sur l'observation que les grandes puissances $a^m \bmod n$ peuvent être calculées assez rapidement.

Fermat lui–même a decouvert ce théorème en étudiant les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$. Il a cru qu'ils étaient tous premiers, mais il n'a pu vérifier cela que pour $n \leq 4$. Plus tard Euler a trouvé une factorisation non triviale de $F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Aucun nouveau nombre premier de Fermat n'a été trouvé, et beaucoup de mathématiciens croient qu'il n'y en a pas d'autres.

Voici quelques calculs de factorisation de F_5, F_6, F_7, F_8, avec le logiciel PARI

```
PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and
comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

   realprecision = 28 significant digits
   seriesprecision = 16 significant terms
   format = g0.28

parisize = 4000000, primelimit = 500000
? factor(2^32+1)
%1 =
[641 1]

[6700417 1]

? factor(2^64+1)
%2 =
```

```
[274177 1]

[67280421310721 1]

? factor(2^128+1)
%3 =
[59649589127497217 1]

[5704689200685129054721 1]

? factor(2^256+1)
%4 =
[1238926361552897 1]

[93461639715357977769163558199606896584051237541638188580280321 1]
```

(Le dernier calcul a pris quelques secondes sur mon ordinateur)

Deuxième partie

Polynômes et corps

7 Polynômes

7.1 Anneau de polynômes en une variable

Sur un corps fini, il convient de distinguer les polynômes et les fonctions polynômes. Nous revenons donc sur la définition des polynômes.

DÉFINITION 7.1.1 *Si A est un anneau commutatif, l'anneau des polynômes à une variable X sur A est l'anneau $A[X]$ formé des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $a_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i. Cet ensemble est muni de la somme*

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

et du produit

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \times (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=j+k} a_j b_k\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

On a une application injective $A \to A[X]$ qui envoie a sur $(a, 0, \cdots)$, et on identifie A avec son image. Tout élément de $A[X]$ s'écrit de façon unique $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$, où X désigne la suite :

$$(0, 1, 0, 0, \cdots).$$

Soit A un anneau. Il est commode de voir un polynôme $f(X)$ à coefficients dans A comme une expression formelle du type

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

qui est donnée par la suite de ses coefficients a_0, a_1, …, $a_n \in A$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$; en effet seuls un nombre fini de a_i sont non nuls, la notation traduit que $a_i = 0$ pour tout $i > n$.

Si tous les coefficients a_i sont nuls on appelle $f(X)$ le polynôme nul : $f = 0$. Si $f(X)$ est non nul on considère :

DÉFINITION 7.1.2 *Le plus grand indice n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le* degré *de $f(X)$ et il est noté* $\deg f$. *Le coefficient a_n correspondant est dit* coefficient dominant. *Le degré du polynôme nul n'est pas défini, mais parfois on pose* $\deg 0 = -\infty$.

L'anneau $A[X]$ est défini comme l'ensemble des expressions $f(X)$ ci-dessus avec les opérations données par les règles suivantes : si

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$g(X) = b_s X^s + b_{s-1} X^{s-1} + \cdots + b_0,$$

sont deux polynômes et si par exemple $n \geq s$, leur somme est le polynôme

$$(f + g)(X) = f(X) + g(X) = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \cdots + c_0,$$

dont les coefficients sont obtenus par l'addition des coefficients correspondant à chaque X^i dans f et dans g, c'est à dire $c_i = a_i + b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, où on note $b_i = 0$ pour $i > s$.

Le produit des polynômes $f(X)$ et $g(X)$ est le polynôme

$$(fg)(X) = f(X) \cdot g(X) = d_{n+s} X^{n+s} + d_{n+s-1} X^{n+s-1} + \cdots + d_0,$$

où

$$d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l,$$

les coefficients a_i, b_j étant pris égaux à zéro pour $i > n$ et $j > s$. Ainsi on a $d_0 = a_0b_0$, $d_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $\ldots$, $d_{n+s} = a_nb_s$.

REMARQUE. En prenant $n = \deg f$ et $s = \deg g$, ces règles montrent immédiatement que le degré de $f + g$ est au plus $\max(\deg f, \deg g)$, et celui de fg est au plus $\deg f + \deg g$. De la formule $d_{n+s} = a_nb_s$ découle alors le

THÉORÈME 7.1.3 *Si l'anneau A est intègre, l'anneau de polynômes $A[X]$ l'est aussi. Le degré d'un produit de polynômes non nuls est égal à la somme de leurs degrés. Les éléments inversibles de $A[X]$ sont exactement les constantes inversibles dans A.*

L'anneau A peut être identifié au sous-anneau de $A[X]$ formé par les constantes (polynômes de degré zéro et le polynôme nul). Ceci permet de définir la multiplication des éléments $a \in A$ par les $f(X) \in A[X]$. En particulier, si $A = K$ est un corps, l'anneau $K[X]$ est aussi un K-espace vectoriel. Ceci fait de l'anneau $K[X]$ une algèbre de dimension infinie sur K, c'est à dire, un anneau et un espace vectoriel en même temps dans lequel la multiplication des éléments commute avec la multiplication par les constantes.

7.2 Division pseudoeuclidienne

Division des polynômes avec reste

Dans $A[X]$ il est possible de diviser avec reste par un polynôme P non nul, à condition que son coefficient dominant soit inversible :

PROPOSITION 7.2.1 *Soit A un anneau commutatif. On se donne un polynôme*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

à coefficients dans A tel que a_d soit inversible dans A. Alors pour tout polynôme f de $A[X]$ il existe un unique couple $(Q, R) \in A[X]^2$ tel que

$$f = PQ + R, \text{ avec } R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg P$$

PREUVE. Existence. D'abord si $d = 0$, le couple $(a_d^{-1}f, 0)$ convient. On suppose donc $d \geq 1$ et on raisonne par récurrence sur le degré de f. Si $\deg f < d$, alors le couple $(0, f)$ convient. Sinon on écrit

$$f = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \text{ avec } b_n \neq 0 \text{ et } n \geq d.$$

Par l'hypothèse de récurrence on a

$$f - b_n a_d^{-1} X^{n-d} P = PQ_1 + R_1 \text{ avec } R_1 = 0 \text{ ou } \deg R_1 < d.$$

Le couple $(Q_1 + b_n a_d^{-1} X^{n-d}, R_1)$ convient.

Unicité. Si

$$PQ_0 + R_0 = PQ_1 + R_1$$

avec $\deg R_0 < \deg P$ et $\deg R_1 < \deg P$ alors $P(Q_0 - Q_1) = (R_1 - R_0)$. Comme a_d est inversible, on a $\deg(P(Q_0 - Q_1)) = \deg P + \deg(Q_0 - Q_1)$ (en effet si $b_{d'}$ est le coefficient dominant de $Q_0 - Q_1$, celui du produit par P est $c_{d+d'} = a_d b_{d'} \neq 0$). De là ce degré est strictement inférieur à celui de P si et seulement si $Q_0 - Q_1 = 0$, c'est-à-dire $Q_0 = Q_1$, ce qui entraîne que $R_0 = R_1$.

EXEMPLE. Donnons pour illustrer l'exemple d'une division dans $\mathbb{Z}[X]$:

$$\begin{array}{rl|l} 3X^4+7X^3-7X^2+16X-5 & & X^2+3X-2 \\ \cline{3-3} -3X^4-9X^3+6X^2 & & 3X^2-2X+5 \\ \cline{1-1} \quad -2X^3-X^2+16X-5 & & \\ \quad 2X^3+6X^2-4X & & \\ \cline{1-1} \quad\quad 5X^2+12X-5 & & \\ \quad -5X^2-15X+10 & & \\ \cline{1-1} \quad\quad -3X+5 & & \end{array}$$

Division euclidienne dans $K[X]$ où Kest un corps

THÉORÈME 7.2.2 *Soit K un corps. Pour tous polynômes $f(X)$ et $P(X)$ de $K[X]$ avec P non nul il existe un unique couple $(Q,R) \in K[X]^2$ tel que*

$$f = PQ + R \text{ avec } R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg P$$

Les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ sont uniquement déterminés par cette condition.

DÉFINITION 7.2.3 *Le polynôme $Q(X)$ est appelé le* quotient *de la division $f(X)$ par $Q(X)$, et $R(X)$ le* reste.

Le fait que l'anneau $K[X]$ est intègre et la propriété d'existence affirmée dans le théorème peuvent s'énoncer en disant que $K[X]$ est un anneau euclidien.

REMARQUE. Attention ceci n'est le cas pour un anneau de polynômes $A[X]$ que si l'anneau A est un corps (voir l'exercice .., en effet rappelons que tout anneau euclidien est principal).

Divisibilité des polynômes

Soit K un corps. Soient $f(X)$, $\phi(X) \in K[X]$. Si le reste de la division de $f(X)$ par $\phi(X)$ est nul, on dit que $f(X)$ est divisible par $\phi(X)$ ou aussi que $\phi(X)$ divise $f(X)$, et on note : $\phi \mid f$. La condition $\phi \mid f$ est équivalente au fait qu'il existe un polynôme $\psi(X)$ tel que $f(X) = \phi(X) \cdot \psi(X)$.

La définition entraîne directement les propriétés suivantes de la divisibilité :

1) Si f est divisible par g, et g est divisible par h, f est divisible par h.

2) Si f et g sont divisibles par ϕ, leur somme et leur différence sont divisibles par ϕ.

3) Tout polynôme est divisible par n'importe quel polynôme de degré zéro.

4) On a à la fois $f(X)$ divise $g(X)$ et $g(X)$ divise $f(X)$ si et seulement si $g(X) = cf(X)$, où $c \in K^*$ est un élément inversible.

5) Si $c \in K^*$ les ensembles de diviseurs de $f(X)$ et $cf(X)$ coïncident.

On appelle pgcd (plus grand diviseur commun) de $f(X)$ et $g(X)$ tout polynôme $d(X)$ tel que d divise f et g, et d est divisible par tout autre diviseur commun de ces polynômes.

THÉORÈME 7.2.4 *Soit K un corps. Pour tout couple (f,g) de polynômes dans $K[X]$ le pgcd de f et g existe et il est uniquement déterminé à une constante multiplicative près.*

L'existence est une propriété générale dans les anneaux euclidiens, un pgcd étant obtenu comme le dernier reste non nul dans la suite de divisions successives de l'algorithme d'Euclide pour (f,g). D'autre part deux pgcd se divisent l'un l'autre, donc 4) montre que l'unicité a lieu à une constante multiplicative non nulle près.

7.3 Valeurs et racines d'un polynôme

Soit A un anneau commutatif. On se donne un polynôme

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

à coefficients dans A, et un élément c de A. Alors la valeur de f en c est définie comme $f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0 \in A$.

PROPOSITION 7.3.1 *(a) L'application*

$$\psi_c : A[X] \to A, f \longmapsto f(c) = \sum_{i=0}^{n} a_i c^i \in A$$

est l'unique morphisme d'anneaux ψ dont la restriction au sous-anneau $A \subset A[X]$ est l'identité, et qui vérifie $\psi(X) = c$.

(b) Réciproquement, pour tout morphisme d'anneaux $\psi : A[X] \to A$ dont la restriction au sous-anneau $A \subset A[X]$ est l'identité, il existe un unique $c \in A$ tel que $\psi = \psi_c$.

PREUVE : la proposition 7.3.1 découle de la définition 4.1.2 de morphisme d'anneaux.

Fonctions polynômes

DÉFINITION 7.3.2 *(a) L'application*

$$f : A \to A, c \longmapsto f(c)$$

notée par la même lettre f, est dite fonction polynôme *associée au polynôme $f(X)$.*

(b) Si $f(c) = 0$ (c'est-à-dire f s'annule en c), on appelle c une racine *de f.*

REMARQUE. En général une fonction polynôme n'est pas associée à un polynôme unique. Ceci est vrai notamment sur les corps finis, où il faut donc distinguer clairement entre polynômes et fonctions polynômes.

Soit par exemple $A = K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ le corps à deux éléments. Considérons le polynôme $f(X) = X^2 + X + 1$, alors $f(0) = 1$ et $f(1) = 1$ donc f définit une fonction constante sur K. Mais le polynôme $f(X)$ n'est pas une constante ($\deg f = 2$).

THÉORÈME 7.3.3 *Soit A un anneau intègre (par exemple un corps K). Si $f(X) \in A[X]$, le reste de la division de $f(X)$ par $X - c$ est égal à $f(c)$. En particulier, c est racine de $f(X)$ si et seulement si $f(X)$ est divisible par $X - c$ dans $A[X]$.*

Le résultat découle de l'existence et l'unicité de la division avec reste par $X - c$, et du fait que l'évaluation en c, ψ_c, est un morphisme.

COROLLAIRE 7.3.4 *Si A est un anneau intègre (par exemple un corps K), le nombre des racines dans A du polynôme $f(X) \in A[X]$, est majoré par son degré* $\deg(f)$.

PREUVE La démonstration procède par récurrence sur le degré de $f(X)$. Si $\deg f = 0$, f est une constante non nulle donc sans racine. Si l'énoncé est vérifié jusqu'au degré n, et si $f(X)$ de degré $n+1$ a une racine c, alors par le théorème il existe $g(X) \in A[X]$ tel que $f(X) = (X - c)g(X)$. Cela entraîne $\deg g = n$ donc par l'hypothèse $g(X)$ a au plus n racines. Or par l'intégrité de A la fonction polynôme f s'annule exactement en c et aux racines de g. Ainsi f a au plus $n + 1$ racines.

COROLLAIRE 7.3.5 *Soit K un corps* infini. *Alors tout polynôme $f(X)$ est uniquement déterminé par sa fonction polynôme associée $c \mapsto f(c) : K \to K$.*

PREUVE : Si $f(X)$ et $g(X)$ sont deux polynômes distincts, leur différence a un nombre fini de racines (majoré par le max de leurs degrés), donc la fonction polynôme associée n'est pas nulle : $f(X)$ et $g(X)$ déterminent donc des fonctions différentes.

REMARQUE. Au contraire, sur un corps fini K toute fonction $f : K \to K$ est polynomiale, mais le polynôme correspondant f n'est pas uniquement déterminé par cette fonction, car il existe des polynômes non nuls représentant la fonction identiquement nulle. Par exemple, le polynôme non nul de degré p

$$f(X) = X^p - X = \prod_{a \in \mathbb{F}_p} (X - a)$$

s'annule en tous les points du corps $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Méthode de Hörner

Elle permet de trouver facilement le quotient $q(X)$ de la division par $X - c$

$$f(X) = q(X)(X - c) + r,$$

et la valeur $r = f(c)$.

On considère le polynôme
$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, et sa valeur en $X = c$; on calcule $f(c)$ de la façon suivante : soit

$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$ un polynôme, on cherche un autre polynôme $q(X) = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \cdots + b_0,\ \ b_{n-1} \neq 0$ tel que

$$f(X) = (X - c)q(X) + r,$$

En comparant les coefficients des puissances de X on obtient

$$a_n = b_{n-1},\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1},\ \cdots,$$

$$a_1 = b_0 - cb_1,\ a_0 = r - cb_0,\ r = f(c).$$

Ceci implique

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-k} = cb_{n-k+1} + a_{n-k} (k = 2,\ \cdots, n)$$

Il est commode de faire le tableau suivant (dit schéma de Hörner)

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$	$\cdots$	$b_0 = cb_1 + a_1$	$f(c) = cb_0 + a_0$

La formule de Taylor

Soit K un corps. On se donne un polynôme

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

à coefficients dans K, et c un élément de K. Alors il existe $b_1, \cdots, b_n \in K$ tels que

$$f(X) = f(c) + b_1(X-c) + b_2(X-c)^2 + \cdots + b_n(X-c)^n,$$

avec la propriété

$$k! b_k = f^{(k)}(c), \quad k = 1, \cdots, n, \tag{7.1}$$

où

$$f'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_1$$

est la dérivée formelle de $f(X)$.
PREUVE. L'existence des $b_1, \cdots, b_n \in K$ découle de la division euclidienne dans $K[X]$, par récurrence à partir de

$$f(X) = (X-c)q(X) + f(c).$$

Ensuite, on déduit la formule (7.1) par récurrence à partir de l'identité :

$$f(X) = f(c) + b_1(X-c) + b_2(X-c)^2 + \cdots + b_n(X-c)^n,$$

en utilisant l'égalité formelle $((X-c)^k)' = k(X-c)^{k-1}$.

La formule d'interpolation de Lagrange

La formule d'interpolation de Lagrange donne sur un corps K un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui prend en les valeurs distinctes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, de la variable X les valeurs $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$. La solution est donnée par le polynôme de Lagrange

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \frac{(X-\alpha_0)\ldots(X-\alpha_{i-1})(X-\alpha_{i+1})\ldots(X-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_n)} \tag{7.2}$$

En effet son degré et inferieur ou égal à n, et $f(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

PROPOSITION 7.3.6 *Le polynôme de Lagrange (7.2) est l'unique polynôme*

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$$

de degré $\leq n$ *tel que* $f(\alpha_i) = \beta_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ *pour* α_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *éléments arbitraires* distincts *du corps* K *et pour* $\beta_i \in K$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *arbitraires.*

En effet si l'on considère les coefficients $a_j (j = 0, 1, \ldots, n)$ comme des inconnues on obtiendrait le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} f(\alpha_0) = a_n \alpha_0^n + a_{n-1} \alpha_0^{n-1} + \cdots + a_0 = \beta_0 \\ f(\alpha_1) = a_n \alpha_1^n + a_{n-1} \alpha_1^{n-1} + \cdots + a_0 = \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\alpha_n) = a_n \alpha_n^n + a_{n-1} \alpha_n^{n-1} + \cdots + a_0 = \beta_n \end{cases}$$

Le déterminant de ce système carré coïncide (au signe près) avec le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

qui est non nul, d'où l'existence et l'unicité des coefficients cherchés $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$ du polynôme $f(X)$ (dans le corps K).

7.4 Anneau de polynômes en plusieurs variables

Nous donnons ici les premières généralités sur ces anneaux qui interviendront dans la troisième partie du cours (ch ....)

DÉFINITION 7.4.1 *Soit A un anneau commutatif. L'anneau des polynômes à n variables peut être défini par récurrence comme*

$$A[X_1, \cdots, X_n] = A[X_1, \cdots, X_{n-1}][X_n].$$

Si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ appartient à $\mathbb{N}^n$, on note $X^{\boldsymbol{\alpha}}$ pour le produit $\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}$. Tout polynôme s'écrit alors de manière unique

$$P = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{\alpha}} X^{\boldsymbol{\alpha}}$$

avec $(a_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n}$ une famille de $A^{\mathbb{N}^n}$ telle que $a_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$.

Pour un élément $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. On définit alors le degré total d'un polynôme non nul $P = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{\alpha}} X^{\boldsymbol{\alpha}}$ comme

$$\deg(P) = \sup\{|\boldsymbol{\alpha}| \mid a_{\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\}$$

PROPOSITION 7.4.2 *Soit A un anneau commutatif. Pour tous polynômes non nuls*

$$P, Q \in A[X_1, \cdots, X_n],$$

on a

(i) si $P + Q \neq 0$, alors $\deg(P + Q) \le \sup(\deg P, \deg Q)$
avec l'égalité si $\deg P \neq \deg Q$ *;*

(ii) $\deg(PQ) \le \deg P + \deg Q)$
avec l'égalité si A est intègre.

DÉFINITION 7.4.3 *Soit A un anneau commutatif. Un polynôme non nul*

$$P \in A[X_1, \cdots, X_n],$$

est dit homogène *de degré d si*

$$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, |\boldsymbol{\alpha}| \neq d \Rightarrow a_{\boldsymbol{\alpha}} = 0.$$

PROPOSITION 7.4.4 *Soient A et B deux anneaux commutatifs, $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et $b_1, \dots b_n$ des éléments de B, il existe un unique morphisme d'anneaux*

$$\psi : A[X_1, \cdots, X_n] \to B, P = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{\alpha}} X^{\boldsymbol{\alpha}} \longmapsto P(b_1, \dots b_n) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} a_{\boldsymbol{\alpha}} b_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot b_n^{\alpha_n},$$

tel que la restriction de ψ au sous-anneau $A \subset A[X_1, \cdots, X_n]$ coïncide avec ϕ.

Polynômes en plusieurs variables : exemples

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]$. On pose

```
> restart;
```

$$Q := (X_1 + 1)\,(X_1 - X_2 - X_3 - X_4)\,(X_1 - 2\,X_2 - 2\,X_3 - 2\,X_4 - 1)$$

- Pour développer Q en monômes, on utilise :

```
> expand(Q);
```

$$-2\,X_1\,X_2 - 2\,X_1\,X_3 - 2\,X_1\,X_4 - 3\,{X_1}^2\,X_2 - 3\,{X_1}^2\,X_3 - 3\,{X_1}^2\,X_4 + 2\,X_1\,{X_2}^2 + 2\,X_1\,{X_3}^2 + 2\,X_1\,{X_4}^2 + 2\,{X_2}^2 + 4\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4 + 2\,{X_4}^2 - X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 4\,X_1\,X_2\,X_3 + 4\,X_1\,X_2\,X_4 + 4\,X_1\,X_3\,X_4 + {X_1}^3$$

- Pour développer Q en monômes dans l'ordre lexicographique, on utilise :

```
> sort(expand(Q),[X[1],X[2],X[3],X[4]], plex);
```

$${X_1}^3 - 3\,{X_1}^2\,X_2 - 3\,{X_1}^2\,X_3 - 3\,{X_1}^2\,X_4 + 2\,X_1\,{X_2}^2 + 4\,X_1\,X_2\,X_3 + 4\,X_1\,X_2\,X_4 - 2\,X_1\,X_2 + 2\,X_1\,{X_3}^2 + 4\,X_1\,X_3\,X_4 - 2\,X_1\,X_3 + 2\,X_1\,{X_4}^2 - 2\,X_1\,X_4 - X_1 + 2\,{X_2}^2 + 4\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 + X_2 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4 + X_3 + 2\,{X_4}^2 + X_4$$

- Pour développer Q suivant les puissances de X_1, on utilise :

```
> collect(%,X[1]);
```

$${X_1}^3 + (-3\,X_3 - 3\,X_4 - 3\,X_2)\,{X_1}^2 + (-1 - 2\,X_3 + 2\,{X_4}^2 - 2\,X_4 + 2\,{X_2}^2 + 4\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 - 2\,X_2 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4)\,X_1 + X_2 + 2\,{X_2}^2 + 4\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 + 2\,{X_4}^2 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4 + X_3 + X_4$$

- Pour réduire Q modulo 3, on utilise :

```
> Expand(Q) mod 3 ;
```

$${X_1}^3 + 2\,X_1\,{X_2}^2 + X_1\,X_2\,X_3 + X_1\,X_2\,X_4 + X_1\,X_2 + 2\,X_1\,{X_3}^2 + X_1\,X_3\,X_4 + X_1\,X_3 + 2\,X_1\,{X_4}^2 + X_1\,X_4 + 2\,X_1 + 2\,{X_2}^2 + X_2\,X_3 + X_2\,X_4 + X_2 + 2\,{X_3}^2 + X_3\,X_4 + X_3 + 2\,{X_4}^2 + X_4$$

- Pour développer Q suivant les puissances de X_2 :

```
> collect(expand(Q),X[2]);
```

$$(2\,X_1 + 2)\,{X_2}^2 + (1 + 4\,X_3 + 4\,X_4 - 3\,{X_1}^2 + 4\,X_1\,X_3 + 4\,X_1\,X_4 - 2\,X_1)\,X_2 + {X_1}^3 + 2\,{X_3}^2 - 3\,{X_1}^2\,X_3 - 3\,{X_1}^2\,X_4 + 2\,X_1\,{X_3}^2 + 4\,X_1\,X_3\,X_4 + 4\,X_3\,X_4 + X_3 - 2\,X_1\,X_4 - X_1 - 2\,X_1\,X_3 + 2\,X_1\,{X_4}^2 + 2\,{X_4}^2 + X_4$$

- Pour calculer le degré total de Q, on utilise :

```
> degree(Q,[X[1],X[2],X[3],X[4]]);
```

$$3$$

```
> degree(Q,X[4]);
```

$$2$$

```
> degree(Q,X[1]);
```

3

```
> degree(Q,[X[1],X[4]]);
```

3

- Pour trouver le quotient de la division avec reste de Q par un polynôme de terme dominant inversible (par exemple $X_1^2 + X_1X_2 + X_3$) par rapport à la variable X_1, on utilise :

```
> quo(Q,X[1]^2+X[1]*X[2]+X[3], X[1]);
```

$$X_1 - 3\,X_3 - 3\,X_4 - 4\,X_2$$

- Pour trouver le reste de la division de Q par le polynôme de terme dominant inversible $X_1^2+X_1X_2+X_3$ par rapport à la variable X_1, on utilise :

```
> rem(Q,X[1]^2+X[1]*X[2]+X[3], X[1]);
```

$$(-1 - 3\,X_3 + 2\,{X_4}^2 - 2\,X_4 + 6\,{X_2}^2 + 7\,X_2\,X_3 + 7\,X_2\,X_4 - 2\,X_2 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4)\,X_1 + X_2 + 2\,{X_2}^2 + 8\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 + 2\,{X_4}^2 + 5\,{X_3}^2 + 7\,X_3\,X_4 + X_3 + X_4$$

Vérification :

```
> (X[1]^2+X[1]*X[2]+X[3])*(X[1]-3*X[3]-3*X[4]-4*X[2])+(-1-3*X[3]+2*X[4]
> ^2-2*X[4]+6*X[2]^2+7*X[2]*X[3]+7*X[2]*X[4]-2*X[2]+2*X[3]^2+4*X[3]*X[4]
> )*X[1]+X[2]+2*X[2]^2+8*X[2]*X[3]+4*X[2]*X[4]+2*X[4]^2+5*X[3]^2+7*X[3]*
> X[4]+X[3]+X[4];
```

$$(X_1^2 + X_1\,X_2 + X_3)\,(X_1 - 3\,X_3 - 3\,X_4 - 4\,X_2) + (-1 - 3\,X_3 + 2\,{X_4}^2 - 2\,X_4 + 6\,{X_2}^2 + 7\,X_2\,X_3 + 7\,X_2\,X_4 - 2\,X_2 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4)\,X_1 + X_2 + 2\,{X_2}^2 + 8\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 + 2\,{X_4}^2 + 5\,{X_3}^2 + 7\,X_3\,X_4 + X_3 + X_4$$

```
> %-Q;
```

$$(X_1^2 + X_1\,X_2 + X_3)\,(X_1 - 3\,X_3 - 3\,X_4 - 4\,X_2) + (-1 - 3\,X_3 + 2\,{X_4}^2 - 2\,X_4 + 6\,{X_2}^2 + 7\,X_2\,X_3 + 7\,X_2\,X_4 - 2\,X_2 + 2\,{X_3}^2 + 4\,X_3\,X_4)\,X_1 + X_2 + 2\,{X_2}^2 + 8\,X_2\,X_3 + 4\,X_2\,X_4 + 2\,{X_4}^2 + 5\,{X_3}^2 + 7\,X_3\,X_4 + X_3 + X_4 - (X_1 + 1)\,(X_1 - X_2 - X_3 - X_4)\,(X_1 - 2\,X_2 - 2\,X_3 - 2\,X_4 - 1)$$

```
> expand(%);
```

0

Exercices

7.1 Soit P un polynôme dans $A[X]$, A anneau commutatif. Montrer que $P(P(X))-X$ est divisible par $P(X)-X$.

7.2 Soit P un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = 1$ et $P(2) = 4$. On pose $B(X) = X^2 - 3X + 2$. Déterminer le reste de la division de P par B.

7.3 Soit P un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^2(X-b)$ où $a, b \in \mathbb{C}$. En considérant $P'(X)$, montrer que $a, b \in \mathbb{Q}$.

7.4 Soit

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X],$$

et p/q fraction irréductible telle que $P(p/q) = 0$. Montrer que q divise a_n, p divise a_0, et pour tout m, $p - mq$ divise $P(m)$.

7.5 Dans $\mathbb{R}[X]$ montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré ≤ 7 tel que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$, et $P-1$ soit divisible par $(X+1)^4$. Déterminer P.

7.6 Soit $a \in \mathbb{Z}$, n un entier ≥ 2 tel que $\text{pgcd}(a, n) = 1$. Montrer que n est premier si et seulement si les polynômes $(X+a)^n$, et $X^n + a$ sont congrus modulo n.

8 Racines primitives

L'idée clé : *Il existe un élément de* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ *d'ordre* $p-1$.

Polynômes sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Rappelons le résultat de base (Corollaire 7.3.4) :

PROPOSITION 8.0.1 *Soit* $f \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ *un polynôme non nul sur le corps* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Alors* f *admet au plus* $\deg(f)$ *racines dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

EXEMPLE 8.0.2 *Trouver les racines de*

$$f = X^4 - X^3 + X^2 + X + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X].$$

Solution : $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, *donc les racines sont* $\{1, 2\}$. *De plus,*

$$f = (X+1)(X+2)(X^2+2X+2).$$

Bien-sûr, on peut factoriser rapidement ce polynôme mod 3 en Maple :

```
> Factor(X^4 - X^3 + X^2 +X +1)mod 3;
```

$$(X^2 + 2\,X + 2)\,(X + 2)\,(X + 1)$$

PROPOSITION 8.0.3 *Soit* p *un nombre premier, et soit* d *un diviseur de* $p-1$. *Alors* $f(X) = X^d - 1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ *possède exactement* d *racines.*

PREUVE. Soit e tel que $de = p-1$. On a

$$\begin{aligned} X^{p-1} - 1 &= (X^d)^e - 1 \\ &= (X^d - 1)((X^d)^{e-1} + (X^d)^{e-2} + \cdots + 1) \\ &= (X^d - 1)g(X), \end{aligned}$$

où $\deg(g(X)) = p - 1 - d$. Rappelons que le petit théorème de Fermat implique que $X^{p-1} - 1$ possède exactement $p-1$ racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Par la proposition 8.0.1, $g(X)$ possède *au plus* $p-1-d$ racines et $X^d - 1$ a au plus d racines, donc $g(X)$ possède exactement $p-1$ racines et $X^d - 1$ possède exactement d racines, CQFD.

ATTENTION : L'analogue de ce théorème est faux pour un $f \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$ avec n composé. Par exemple, si $n = n_1 \cdot n_2$ avec $n_1, n_2 \neq 1$, alors $f = n_1 X$ possède au moins *deux* zéros distincts, notamment 0 et $n_2 \neq 0$.

Un autre exemple : $X^2 - 1 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$ possède 4 racines : $X = \overline{1}, X = \overline{3}, X = \overline{5}, X = \overline{7}$.

La structure de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$

Dans cette section on montre que le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

DÉFINITION 8.0.4 *Une* racine primitive *modulo* p *est un élément de* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ *d'ordre* $p-1$.

LEMME 8.0.5 *On suppose que* $a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ *sont d'ordre* r *et* s, *respectivement, et que* $\operatorname{pgcd}(r, s) = 1$. *Alors* ab *est d'ordre* rs.

C'est un fait général sur les éléments d'un groupe, qui *commutent entre eux*.
PREUVE. Puisque $(ab)^{rs} = a^{rs}b^{rs} = 1$, l'ordre de ab est un diviseur de rs, il s'écrit $r_1 s_1$ où $r_1 \mid r$ et $s_1 \mid s$. Donc

$$a^{r_1 s_1} b^{r_1 s_1} = (ab)^{r_1 s_1} = 1.$$

On élève à la puissance r_2, où $r_1 r_2 = r$. Alors

$$a^{r_1 r_2 s_1} b^{r_1 r_2 s_1} = 1,$$

donc, puisque $a^{r_1 r_2 s_1} = (a^{r_1 r_2})^{s_1} = 1$,

$$b^{r_1 r_2 s_1} = 1.$$

Ceci implique que $s \mid r_1 r_2 s_1$, et, car $\operatorname{pgcd}(s, r_1 r_2) = 1$, il vient que $s = s_1$. Un argument similaire montre que $r = r_1$, donc l'ordre de ab est rs.

THÉORÈME 8.0.6 *Pour tout nombre premier p il existe une racine primitive mod p. Autrement dit, le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique d'ordre $p-1$.*

PREUVE. On écrit

$$p - 1 = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_r^{n_r}$$

Comme un produit de nombres premiers distincts q_i.

Par la proposition 8.0.3, le polynôme $X^{q_i^{n_i}} - 1$ a exactement $q_i^{n_i}$ racines, et le polynôme $X^{q_i^{n_i-1}} - 1$ a exactement $q_i^{n_i-1}$ racines. Alors il existe un $a_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $a_i^{q_i^{n_i}} = 1$ mais $a_i^{q_i^{n_i-1}} \neq 1$. Un tel a_i est d'ordre $q_i^{n_i}$. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on choisit un tel a_i. Lorsqu'on applique le lemme **??** plusieurs fois, on voit que

$$a = a_1 a_2 \cdots a_r$$

est d'ordre $q_1^{n_1} \cdots q_r^{n_r} = p - 1$, donc a est une racine primitive.

REMARQUE. Il existe $\varphi(p-1)$ racines primitives modulo p, puisque il y a $q_i^{n_i} - q_i^{n_i-1}$ façons de choisir a_i. Pour le voir, on peut simplement utiliser le fait que le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ contient $\varphi(p-1)$ générateurs (voir la proposition 5.2.1). Sinon, on vérifie que deux choix différents de suites $a_1, \ldots, a_r$ définissent deux racines primitives différentes. On suppose que

$$a_1 a_2 \cdots a_r = a_1' a_2' \cdots a_r',$$

avec a_i, a_i' d'ordre $q_i^{n_i}$, pour $i = 1, \ldots, r$. Lorsqu'on élève les deux membres de l'égalité à la puissance $s = q_2^{n_2} \cdots q_r^{n_r}$, on voit que $a_1^s = {a_1'}^s$. Puisque $\operatorname{pgcd}(s, q_1^{n_1}) = 1$, il existe t tel que $st \equiv 1 \pmod{q_1^{n_1}}$. Il vient que

$$a_1 = (a_1^s)^t = ({a_1'}^s)^t = a_1'.$$

Par simplification de a_1 dans les deux membres, on voit que $a_2 \cdots a_r = a_2' \cdots a_r'$; on répète cet argument si nécessaire, et on montre que $a_i = a_i'$ pour tout i. Donc les choix différents de a_i amènent des racines primitives différentes ; autrement dit, si les racines primitives sont les mêmes, alors les a_i coïncident.

Le nombre total des racines primitives est donc égal à

$$(q_1^{n_1} - q_1^{n_1-1}) \cdot \ldots \cdot (q_r^{n_r} - q_r^{n_r-1}) = \varphi(p-1)$$

puisque

$$p - 1 = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_r^{n_r}.$$

Par exemple, il existe $\varphi(16) = 2^4 - 2^3 = 8$ racines primitives mod 17 :

```
> with(numtheory):d:=17;i:=1;for n from 1 to d-1 do
> if (order(n,d)=d-1) then
> printf("i=%d,n=%d mod %d\n"
> ,i,n,d);
> i:=i+1;
> fi;
> od;
```

```
i=1,n=3 mod 17

i=2,n=5 mod 17

i=3,n=6 mod 17

i=4,n=7 mod 17

i=5,n=10 mod 17

i=6,n=11 mod 17

i=7,n=12 mod 17

i=8,n=14 mod 17
```

EXEMPLE 8.0.7 *Dans cet exemple, on donne une illustration de la preuve du théorème 8.0.6 dans le cas* $p = 13$. *On a*

$$p - 1 = 12 = 2^2 \cdot 3.$$

Le polynôme $X^4 - 1$ *a pour racines* $\{1, 5, 8, 12\}$ *et* $X^2 - 1$ *a pour racines* $\{1, 12\}$, *donc on prend* $a_1 = 5$. *Le polynôme* $X^3 - 1$ *a pour racines* $\{1, 3, 9\}$, *donc on pose* $a_2 = 3$. *Finalement,* $a = 5 \cdot 3 = 15 \equiv 2 \bmod 13$. *On remarque que les puissances successives de* 2 *sont*

$$2,\ 4,\ 8,\ 3,\ 6,\ 12,\ 11,\ 9,\ 5,\ 10,\ 7,\ 1,$$

donc 2 *est en réalité d'ordre* 12.

EXEMPLE 8.0.8 *Le résultat est faux si, par exemple p est remplacé par une grande puissance de* 2. *Les éléments de* $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ *sont tous d'ordre divisant* 2, *mais* $\varphi(8) = 4$.

THÉORÈME 8.0.9 *Soit* p^n *une puissance d'un nombre premier impair. Alors il existe un élément de* $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ *d'ordre* $\varphi(p^n)$, *c'est-à-dire,* $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$ *est cyclique.*

(en exercice).

Calcul du logarithme discret dans le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%

LOGARITHME DISCRET

```
> restart;with(numtheory);
```

```
Warning, the protected name order has been redefined and unprotected
```

[*GIgcd*, *bigomega*, *cfrac*, *cfracpol*, *cyclotomic*, *divisors*, *factorEQ*, *factorset*, *fermat*, *imagunit*, *index*, *integral_basis*, *invcfrac*, *invphi*, *issqrfree*, *jacobi*, *kronecker*, λ, *legendre*, *mcombine*, *mersenne*, *minkowski*, *mipolys*, *mlog*, *mobius*, *mroot*, *msqrt*, *nearestp*, *nthconver*, *nthdenom*, *nthnumer*, *nthpow*, *order*, *pdexpand*, ϕ, π, *pprimroot*, *primroot*, *quadres*, *rootsunity*, *safeprime*, σ, *sq2factor*, *sum2sqr*, τ, *thue*]

Exemples

```
> with(numtheory):
> order(13,100);
```

$$20$$

```
> order(5,8);
```

$$2$$

```
> order(8,12);
```

$$FAIL$$

```
> primroot(20,239);
```

$$21$$

```
> order (%,239);
```

$$238$$

```
> phi (239);
```

$$238$$

```
> dislog:=proc(x::integer,g::integer,p::integer)
> local s, t, n,d;
> s:=g;t:=order(g,p);
> for n from 1 to t do
> if x=s then d:=n;
> fi;
> s:= s*g mod p;  od;
> return (d);
> end proc;
```

$$\begin{array}{l} dislog := \mathbf{proc}(x::integer,\ g::integer,\ p::integer) \\ \mathbf{local}\ s,\ t,\ n,\ d; \\ \quad s := g; \\ \quad t := \mathrm{order}(g,\ p); \\ \quad \mathbf{for}\ n\ \mathbf{to}\ t\ \mathbf{do}\ \mathbf{if}\ x = s\ \mathbf{then}\ d := n\ \mathbf{end\ if};\ s := s * g \bmod p\ \mathbf{end\ do}; \\ \quad \mathbf{return}\ d \\ \mathbf{end\ proc} \end{array}$$

```
> dislog(18,5,23);
```

$$12$$

```
> primroot(9048610007);
```

$$5$$

```
> dislog(7320,2,9587);
```

$$389$$

```
> 5^678 mod 9048610007;
```

$$3757843958$$

```
> nextprime(1000);
```

```
                                        1009
> dislog(15625,5,9048610007);

Warning, computation interrupted
> primroot(1009);
                                         11
> 11^345 mod 1009;

                                         23
> dislog(23,11,1009);
                                        345
```

GP/PARI CALCULATOR Version 2.1.1 (released) i686 running cygwin (ix86 kernel) 32-bit version (readline v4.0 enabled, extended help not available)

```
                    Copyright (C) 2000 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and
comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.



? znprimroot(9048610007)
%1 = Mod(5, 9048610007)
? znlog(15625,%1)
%2 = 6
? znlog(3757843958,%1)
%3 = 678
```

Exercices

8.1 Montrer que pour tout $n \geq 3$ il n'existe pas de racines primitives modulo 2^n.

8.2 Montrer que si p est un nombre premier, alors il existe une racine primitive modulo p^2. [Indication : écrire un élément de $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$ sous la forme du produit de deux éléments. Se rappeler que si a, b sont d'ordre n, m premiers entre eux, alors ab est d'ordre nm.]

Problème

On note G le groupe $(\mathbb{Z}/3^\alpha\mathbb{Z})^\times$, où $\alpha \geq 2$ est fixé.

– 1a) Pour tout $y \in \mathbb{N}$ et tout $j \geq 2$ établir la congruence

$$(1+3)^{3^{j-2}y} \equiv 1 + 3^{j-1}y \bmod 3^j .$$

b) Déterminer l'ordre de $\overline{4}$ dans $(\mathbb{Z}/3^\alpha\mathbb{Z})^\times$.
c) En déduire que l'élément $\overline{2}$ engendre $(\mathbb{Z}/3^\alpha\mathbb{Z})^\times$ (on pourra utiliser l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z}/3^\alpha\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

– 2) Soit a un entier non divisible par 3. Dans la suite on cherche à résoudre la congruence $2^x \equiv a \bmod 3^\alpha$ (logarithme discret dans G).
a) Montrer que cela revient à résoudre l'équation $\overline{2}^u \cdot \overline{a} = \overline{1}$ dans le groupe G, et que cette équation admet une unique solution u dans $\{0, \cdots, 2 \cdot 3^{\alpha-1} - 1\}$.
b) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $a \equiv 1 \bmod 3$, et qu'alors $u = 2y$ est pair.

Ceci nous ramène à résoudre l'équation $(\mathbf{E})$: $\overline{4}^y \cdot \overline{a} = \overline{1}$ dans G, où on a $a \equiv 1 \bmod 3$: on en cherche l'unique solution $y \in \{0, \cdots, 3^{\alpha-1} - 1\}$.

– 3) Soit y dans cet intervalle. On note $y = \sum_{i=0}^{\alpha-2} 3^i y_i$, $y_i \in \{0, 1, 2\}$ son écriture en base 3, et $y_{-1} = 0$. Pour $1 \leq j \leq \alpha$, on considère la congruence $\mathbf{C_j}$:

$$4^{y_0 + 3y_1 + \cdots + 3^{j-2} y_{j-2}} a \equiv 1 \bmod 3^j \qquad (\mathbf{C_j})$$

De plus on pose $a_1 = a$, a_j $(j \geq 2)$ est le reste de la division du premier membre de $\mathbf{C_j}$ par 3^α.
a) Vérifier que bfC_1 est vraie.
– b) On suppose que la congruence bfC_{j-1} est vraie pour l'entier $j \geq 2$. En utilisant 1a) et a_{j-1}, montrer que $\mathbf{C_j}$ est vraie si et seulement si y_{j-2} est le reste de la division par 3 de l'entier $(1 - a_{j-1})/3^{j-1}$.

– 4) En déduire un algorithme de résolution de l'équation $\mathbf{E}$. Montrer que cet algorithme est polynomial en l'ordre de G, avec un nombre d'opérations en $O(\alpha^3)$.

– 5) Appliquer ce qui précède pour résoudre la congruence $2^x \equiv 101 \bmod 243$. Vérifier le résultat par la méthode d'exponentiation rapide.

9 Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

9.1 Symbole de Legendre

Soient p, q des nombres premiers impairs distincts. La partie principale de la *loi de réciprocité quadratique* démontrée par Gauss dit que pour $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ la résolubilité d'une des congruences $x^2 \equiv p \bmod q$ et $x^2 \equiv q \bmod p$ implique la non–résolubilité de l'autre ; sinon elles sont simultanément résolubles ou non–résolubles. Gauss a utilisé ce fait pour calculer de grandes tables de nombres premiers.

Pour cela il a suggéré un raffinement de la condition nécessaire de primalité venat de la congruence de Fermat (6.2). Notamment on définit le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{n}\right)$ pour un nombre premier $n = p$ par

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \equiv 0 \bmod n, \\ 1 & \text{si } a \equiv b^2 \bmod n, \text{ pour un certain } b, n \nmid b, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{9.1}$$

PROPOSITION 9.1.1 *Soit $n = p$ un nombre premier impair. L'application*

$$\phi : a \longmapsto \left(\frac{a}{n}\right), \quad (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\}$$

définit un morphisme $\phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\}$ de groupes cycliques. Son noyau $\mathrm{Ker}(\phi)$ coïncide avec le sous-groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{*2}$ des carrés dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, et on a $\mathrm{card}\,((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{*2}) = (n-1)/2$.

Exemples

```
> with(numtheory):
```

```
Warning, the protected name order has been redefined and
unprotected
```

```
> legendre(74,101);
```

$$-1$$

```
> legendre(3,73);
```

$$1$$

```
> legendre(22,11);
```

$$0$$

```
> legendre(5,2);
```

$$-1$$

```
> legendre(-2342, 1901);
```

$$1$$

9.2 Congruence d'Euler

PROPOSITION 9.2.1 *Soit n un nombre premier impair. Alors*

$$a^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \bmod n. \tag{9.2}$$

PREUVE On peut la déduire de la cyclicité du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. En effet, de chaque côté de l'égalité (9.2) apparaît un morphisme non trivial du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ dans le groupe $\{\pm 1\}$. Ces morphismes ont ainsi des noyaux de même ordre, donc égaux. Leur égalité en résulte.

Si n n'est pas nécessairement premier, la congruence (9.2) peut être utilisée comme test de primalité (une condition nécessaire et suffisante) si l'on définit le symbole de Jacobi à droite par multiplicativité : pour un nombre impair positif $n = p_1 p_2 \dots p_k$, où p_i sont premiers (non nécessairement differents) posons

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \dots \left(\frac{a}{p_k}\right) \tag{9.3}$$

Cependant, on montrera que le symbole de Jacobi peut être calculé sans connaissance de la factorisation de n en produit des nombres premiers.

REMARQUE. Si n est composé, il se peut que $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ mais a n'est pas un carré $\bmod n$. Par exemple, si $n = pq$, il suffit d'utiliser le théorème des restes chinois pour construire $a \bmod pq$ tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ et $\left(\frac{a}{q}\right) = -1$. Alors $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ mais a n'est pas un carré $\bmod n$. Au contraire, si a est un carré $\bmod n$, alors $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ par multiplicativité.

En effet, le symbole de Jacobi peut être étendu à toutes les valeurs du "numérateur" et du "dénominateur" et il peut être calculé sans connaissance de la factorisation de n en produit de nombres premiers.

Pour cela on utilise la loi de réciprocité quadratique étendue

$$\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{(P-1)}{2}\frac{(Q-1)}{2}} \tag{9.4}$$

pour P, Q positifs impairs, et on a les deux compléments suivants de cette loi

$$\left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{(P^2-1)/8}, \qquad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{(P-1)/2}, \tag{9.5}$$

aussi bien que la multiplicativité du symbole par rapport au "numérateur" et au "dénominateur". Le calcul suit la même procédure que celle suivie pour l'algorithme d'Euclide et il utilise moins de $5 \log \max(P, Q)$ divisions avec reste.

9.3 Lois de réciprocité de Gauss

(voir [Stein]). Le symbole $\left(\frac{a}{p}\right)$ ne dépend que de la classe résiduelle de a modulo p. Ensuite, on fixe a et on commence par faire la table suivante :

p	$\left(\frac{5}{p}\right)$	$p \bmod 5$
7	−1	2
11	1	1
13	−1	3
17	−1	2
19	1	4
23	−1	3
29	1	4
31	1	1
37	−1	2
41	1	1
43	−1	3
47	−1	2

Cette table fait deviner que $\left(\frac{5}{p}\right)$ ne dépend que de la classe de p modulo 5 ; plus précisement, $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ si et seulement si $p \equiv 1, 4 \pmod 5$, i.e., p est un carré modulo 5. Cependant, on ne peut pas voir directement de la valeur

$$5^{(p-1)/2} \pmod p,$$

que $p \equiv 1, 4 \pmod 5$ permet d'évaluer cette expression.

A partir de calculs semblables, plusieurs mathématiciens ont trouvé une explication conjecturale de ce mystère du 18 siècle. Finalement, Gauss a prouvé cette conjecture en 1801 :

THÉORÈME 9.3.1 (LA LOI DE RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE) *Soient p, q des nombres premiers impairs distincts. Alors*

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right), \tag{9.6}$$

c'est-à-dire que pour $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$ la résolubilité d'une des congruences $x^2 \equiv p \bmod q$ et $x^2 \equiv q \bmod p$ implique la non–résolubilité de l'autre ; sinon elles sont simultanément résolubles ou non–résolubles.

On donnera une démonstration très élémentaire de ce résultat, basée sur le critère de Euler (9.2).

REMARQUE 9.3.2 *Dans l'exemple considéré plus haut, on obtient*

$$\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{2\cdot\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} +1 & \text{si } p \equiv 1, 4 \pmod 5 \\ -1 & \text{si } p \equiv 2, 3 \pmod 5. \end{cases}$$

Ceci dit, la loi de réciprocité quadratique "explique" pourqoi la connaissance de p modulo 5 permet de calculer $5^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Il existe environ 200 démonstrations du théorème 9.3.1, voir

`http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/rchrono.html`

THÉORÈME 9.3.3 (LA LOI DE RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE ÉTENDUE)

$$\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{(P-1)}{2}\frac{(Q-1)}{2}} \tag{9.7}$$

pour P, Q positifs impairs, et on a les deux compléments suivants de cette loi

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{(P-1)/2} = \varepsilon(P), \qquad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{(P^2-1)/8} = \omega(P), \tag{9.8}$$

où on utilise les fonctions multiplicatives $\varepsilon : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\}$ et $\omega : (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\}$, données par :

$$\varepsilon(a) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}, = \begin{cases} 1, & \text{si } a \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & \text{si } a \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}, \quad \text{et } \omega(a) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \text{si } a \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1, & \text{si } a \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}.$$

PREUVE elle découle du théorème 9.3.1 et des définitions (10.1) : si, par exemple, $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, $Q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_l$, alors

$$\left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{q_1 \cdot \ldots \cdot q_l}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}\right) = \left(\frac{Q}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{Q}{p_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{q_j}{p_i}\right),$$

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_l}\right) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{p_i}{q_j}\right),$$

donc on obtient par multiplicativité :

$$\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{p_i}{q_j}\right)\left(\frac{q_j}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}\cdot\frac{q_j-1}{2}} = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}},$$

puisque la fonction

$$a \mapsto \varepsilon(a) = (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \quad (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\}$$

est multiplicative $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$. Ensuite, le calcul du symbole de Jacobi suit alors la même procedure que l'algorithme d'Euclide puisque $\left(\frac{P}{Q}\right)$ ne dépend que de P modulo Q, et il utilise moins de $5\log\max(P,Q)$ divisions avec reste.

9.4 Loi de réciprocité : une démonstration élémentaire

Un lemme de Gauss

La preuve donnée dans cette section est basée sur le lemme de Gauss suivant :

LEMME 9.4.1 *Soit p un nombre primier impair, et soit a un entier $\not\equiv 0 \pmod p$. On considère les nombres,*

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}a$$

et on les reduit modulo p de telle façon que le résultat se trouve dans le ségment $(-\frac{p}{2},\ \frac{p}{2})$. Soit ν le nombre total de nombres négatifs obtenus de cette manière. Alors

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\nu}.$$

PREUVE. Pour définir ν, on exprime tout nombre

$$S = \left\{a, 2a, \ldots, \frac{p-1}{2}a\right\}$$

comme un nombre congru au nombre de l'ensemble

$$\left\{1, -1, 2, -2, \ldots, \frac{p-1}{2}, -\frac{p-1}{2}\right\}.$$

Chaque nombre $1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ apparaît une seule fois, avec un des deux choix de signe, sinon on obtiendrait deux éléments de S qui sont congrus modulo p, ou deux éléments de S dont la somme soit congru à 0 modulo p, ce que est impossible. Alors l'ensemble obtenu doit être de la forme

$$T = \left\{\varepsilon_1 \cdot 1, \varepsilon_2 \cdot 2, \ldots, \varepsilon_{(p-1)/2} \cdot \frac{p-1}{2}\right\},$$

ou tout ε_i est $+1$ ou-1. En multipliant les éléments de S et de T, on voit que

$$(1a)\cdot(2a)\cdot(3a)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{p-1}{2}a\right) \equiv (\varepsilon_1\cdot 1)\cdot(\varepsilon_2\cdot 2)\cdots\left(\varepsilon_{(p-1)/2}\cdot\frac{p-1}{2}\right) \pmod p,$$

donc

$$a^{(p-1)/2} \equiv \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{(p-1)/2} \pmod p.$$

Le lemme donc découle de proposition 9.2.1.

Conjecture d'Euler

Tout d'abord, on fait une observation élémentaire :

LEMME 9.4.2 *Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\#\left((a,b)\cap\mathbb{Z}\right) \equiv \#\left((a,b+2n)\cap\mathbb{Z}\right) \equiv \#\left((a+2n,b)\cap\mathbb{Z}\right) \pmod 2.$$

PREUVE. Si $n > 0$, alors

$$(a, b+2n) = (a,b) \cup [b, b+2n),$$

où l'union est disjointe. Soit $[x]$ la partie entière de x, $[x] \leq x$. Il y a exactement $2n$ entiers dans l'intervalle $[b, b+2n)$:

$$\begin{cases} b, b+1, \cdots, b+2n-1, & \text{si } b \in \mathbb{Z} \\ [b]+1, [b]+2, \cdots, [b]+2n, & \text{si } b \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc l'assertion du lemme est vraie dans ce cas. On a aussi

$$(a, b-2n) = (a,b) \backslash [b-2n, b)$$

et $[b-2n, b)$ aussi contient exactement $2n$ entiers, donc le lemme est vrai aussi pour n négatif. L'affirmation sur $\#\left((a+2n,b)\cap\mathbb{Z}\right)$ est déduit de manière similaire.

La proposition suivante a été conjecturé par Euler, à la base des nombreux calculs. La loi de réciprocité quadratique sera facilement déduit de cette proposition.

PROPOSITION 9.4.3 (CONJECTURE D'EULER) *Soit p un nombre premier impair et $a \in \mathbb{N}$ un nombre entier positif tel que $p \nmid a$.*

1. *Le symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ ne dépend que de p modulo $4a$.*
2. *Si q est un nombre premier tel que $q \equiv -p \pmod{4a}$, alors $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$.*

PREUVE.

Pour pouvoir appliquer le lemme de Gauss ci-dessus, on a besoin de calculer la parité du cardinal $\#(S \cap I)$ de l'intersection des ensembles

$$S = \left\{a, 2a, 3a, \ldots \frac{p-1}{2}a\right\}$$

et

$$I = \left(\frac{1}{2}p, p\right) \cup \left(\frac{3}{2}p, 2p\right) \cup \cdots \cup \left(\left(b-\frac{1}{2}\right)p, bp\right),$$

où soit $b = \frac{1}{2}a$ soit $\frac{1}{2}(a-1)$, on choisit un entier parmi les deux nombres rationnels. En effet, on vérifie que tout élément de S qui se réduit à un nombre dans l' interval $(-\frac{p}{2}, 0)$, appartient à I. Ceci est clair si $b = \frac{1}{2}a < \frac{p-1}{2}a$. Si $b = \frac{1}{2}(a-1)$, alors $bp + \frac{p}{2} > \frac{p-1}{2}a$, donc $((b-\frac{1}{2})p, bp)$ est le dernier intervale qui peut contenir un tel élément de S qui se réduit à $(-\frac{p}{2}, 0)$.) Remarquer aussi que les extrémités entières de I n'appartiennent pas à S, puisque ces extrémités entières sont divisibles par p, mais aucun élément de S est divisible par p.

En divisant I par a, on voit que

$$\#(S \cap I) = \#\left(\mathbb{Z} \cap \frac{1}{a}I\right),$$

où

$$\frac{1}{a}I = \left(\left(\frac{p}{2a}, \frac{p}{a}\right) \cup \left(\frac{3p}{2a}, \frac{2p}{a}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{(2b-1)p}{2a}, \frac{bp}{a}\right)\right).$$

On pose $p = 4ac + r$, et soit

$$J = \left(\left(\frac{r}{2a}, \frac{r}{a} \right) \cup \left(\frac{3r}{2a}, \frac{2r}{a} \right) \cup \cdots \cup \left(\frac{(2b-1)r}{2a}, \frac{br}{a} \right) \right).$$

On observe que la seule différence entre I et J est que les extrémités des intervals sont changés par l'addition d'un entier pair. En appliquant le lemme 9.4.2, on a

$$\nu = \# \left(\mathbb{Z} \cap \frac{1}{a} I \right) \equiv \#(\mathbb{Z} \cap J) \pmod 2.$$

Alors $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\nu$ ne dépend que de r, i.e., ne dépend que de p modulo $4a$.

Si $q \equiv -p \pmod{4a}$, alors le seul changement dans le calcul ci-dessus est que r est remplacé par $4a - r$. Ceci remplace l'ensemble $\frac{1}{a}I$ pour l'ensemble

$$K = \left(\left(2 - \frac{r}{2a}, 4 - \frac{r}{a} \right) \cup \left(6 - \frac{3r}{2a}, 8 - \frac{2r}{a} \right) \cup \cdots \cup \left(4b - 2 - \frac{(2b-1)r}{2a}, 4b - \frac{br}{a} \right) \right).$$

Alors K est le même que $-\frac{1}{a}I$, à l'exception de l'addition des entiers pairs aux extrémités. De nouveau, le lemma 9.4.2 implique

$$\#(K \cap \mathbb{Z}) \equiv \# \left(\left(\frac{1}{a} I \right) \cap \mathbb{Z} \right) \pmod 2,$$

donc $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$, CQFD.

L'analyse suivante plus fine dans le cas spécial où $a = 2$ donne aussi une illustration de la démonstration précédente du lemme, et ce résultat est souvent utilisé dans les calculs.

PROPOSITION 9.4.4 *Soit p un nombre premier impair. Alors*

$$\left(\frac{2}{p} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{si } p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}. \tag{9.9}$$

REMARQUE. La fonction

$$a \mapsto \omega(a) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{si } a \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}, \ \omega : (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* \to \{\pm 1\} \tag{9.10}$$

est multiplicative $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$.

PREUVE. Si $a = 2$, l'ensemble $S = \{a, 2a, \ldots, 2 \cdot \frac{p-1}{2}\}$ est

$$\{2, 4, 6, \ldots, p-1\}.$$

Nous pouvons compter la parité des nombres d'éléments de S qui appartiennent à l'interval $I = (\frac{p}{2}, p)$. On pose $p = 8c + r$, alors

$$\begin{aligned} \#(I \cap S) &= \# \left(\frac{1}{2} I \cap \mathbb{Z} \right) = \# \left(\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{2} \right) \cap \mathbb{Z} \right) \\ &= \# \left(\left(2c + \frac{r}{4}, 4c + \frac{r}{2} \right) \cap \mathbb{Z} \right) \equiv \# \left(\left(\frac{r}{4}, \frac{r}{2} \right) \cap \mathbb{Z} \right) \pmod 2, \end{aligned}$$

où l'égalité dernière vient du Lemme 9.4.2. Les possibilitiés pour r sont $1, 3, 5, 7$. Si $r = 1$, le cardinal est 0, si $r = 3, 5$ il est 1, et si $r = 7$ il est 2.

Fin de la démonstration de la loi de réciprocité quadratique

Avec le lemme on déduit directement la loi de réciprocité quadratique (théorème 9.3.1 de Gauss) : Soit p, q des nombres premiers impairs distincts. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

PREUVE. On suppose d'abord que $p \equiv q \pmod 4$. Quite à échanger p et q on peut supposer $p > q$, et on pose $p - q = 4a$. Puisque $p = 4a + q$,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{4a+q}{q}\right) = \left(\frac{4a}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right),$$

on a

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p-4a}{p}\right) = \left(\frac{-4a}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{a}{p}\right).$$

Proposition 9.4.3 implique que $\left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$, puisque $p \equiv q \pmod{4a}$. Alors

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

où la dernière égalité vient du fait que dans ce cas $\frac{p-1}{2}$ est pair si et seulement si $\frac{q-1}{2}$ est pair.

Ensuite, on suppose que $p \not\equiv q \pmod 4$, alors $p \equiv -q \pmod 4$. On écrit $p + q = 4a$. On a

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{4a-q}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right), \quad \text{and} \quad \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{4a-p}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right).$$

Puisque $p \equiv -q \pmod{4a}$, Proposition 9.4.3 implique que $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$. Mais dans ce cas $(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = 1$, d'où la preuve.

Exemple

EXEMPLE 9.4.5 *Est-ce que* 6 *est un carré modulo* 389 *? On a*

$$\left(\frac{6}{389}\right) = \left(\frac{2\cdot 3}{389}\right) = \left(\frac{2}{389}\right)\cdot\left(\frac{3}{389}\right) = (-1)\cdot(-1) = 1.$$

Ici on a trouvé que $\left(\frac{2}{389}\right) = -1$ *en utilisant Proposition 9.4.4 et le fait que* $389 \equiv 5 \pmod 8$. *On a trouvé* $\left(\frac{3}{389}\right)$ *de manière suivante :*

$$\left(\frac{3}{389}\right) = \left(\frac{389}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

Alors 6 *est un carré modulo* 389.

Cependant, on connait pas de x *tel que* $x^2 \equiv 6 \pmod{389}$, *mais on peut le trouver*

```
> restart;for a from 1 to 388 do
> if  a^2 mod 389 = 6 then
> print(a); fi; od;
```

9.5 Loi de réciprocité : une démonstration utilisant les sommes de Gauss

Nous allons considérer les sommes de Gauss comme un analogue discret de la fonction gamma $\Gamma(s)$ qui pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ est définie par l'intégrale

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}. \tag{9.11}$$

Ici la fonction intégrée est le produit d'un caractère additif de $\mathbb{R}$ (l'homomorphisme $y \mapsto e^{-y}$, c'est-à-dire, un morphisme de groupes $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$), et d'un caractère multiplicatif $y \mapsto y^s$ de $\mathbb{R}_+^\times$, c'est-à-dire, un morphisme $\mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{C}$). L'intégration est effectuée par rapport à la mesure invariante multiplicative $\frac{dy}{y}$.

Pour définir la somme de Gauss, on remplace ici $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ avec un $N > 1$, e^{-y} par un caractère additif

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times : y \mapsto \zeta_N^y, \quad \zeta_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right),$$

(c'est-à-dire, un morphisme de groupes $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$), et on remplace y^s par un caractère multiplicatif $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ (c'est-à-dire, un morphisme de groupes $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}$). Le caractère de Dirichlet $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ correspondant à χ (désigné aussi par χ) est défini par $\chi(a) = \chi(a \bmod N)$ pour $(a, N) = 1$ et par $\chi(a) = 0$ pour $(a, N) > 1$. La somme de Gauss $G(\chi)$ est définie par

$$G(\chi) = \sum_{x=1}^{N-1} \chi(x)\zeta_N^x. \tag{9.12}$$

Pour $a \in \mathbb{Z}$, on utilise souvent la notation suivante :

$$G_a(\chi) = \sum_{x=1}^{N-1} \chi(x)\zeta_N^{ax}.$$

Remarquons aussi que la fonction $a \mapsto G_a(\chi)$ coïncide avec la "transformation de Fourier discrète" du caractère χ.

La similitude entre (9.11) et (9.12) implique que leurs propriétés sont similaires. Pour les décrire on introduit tout d'abord la notion importante de caractère de Dirichlet primitif. Un caractère χ est dit primitif modulo N s'il ne s'est pas réduit à un autre caractère $\chi' : \mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ définie modulo un nombre M plus petit qui est un diviseur propre de N (par la composée avec la projection $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$). De même, la restriction de χ sur un tout sous–groupe $H_M = ((1 + M\mathbb{Z})/(1 + N\mathbb{Z}))^\times$ ne soit pas triviale. Par exemple, tout caractère non-triviale modulo un nombre premier q, est primitif, y compris le symbole de Legendre $a \longmapsto \left(\frac{a}{q}\right)$.

PROPOSITION 9.5.1 *Si χ est primitif, on a*

$$G_a(\chi) = \overline{\chi}(a)G(\chi) \ (a \in \mathbb{Z}), \tag{9.13}$$

$$\overline{G(\chi)} = \chi(-1)G(\overline{\chi}), \tag{9.14}$$

$$|G(\chi)|^2 = N. \tag{9.15}$$

REMARQUE 9.5.2 *La propriété (9.13) correspond à la formule*

$$\int_0^\infty e^{-ay} y^s \frac{dy}{y} = a^{-s}\Gamma(s) \ (\mathrm{Re}(s) > 0),$$

et (9.15), réécrite sous la forme $G(\chi)G(\chi^{-1}) = \chi(-1)N$, *correspond à l'équation fonctionnelle de la fonction gamma*

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = -\frac{\pi}{s \sin \pi s} \quad \left(\text{ou} \ \ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\right)$$

PREUVE des égalités (9.13)–(9.15) (en exercice) est impliquée par des changement d'indice de sommation et par le fait que la somme $\sum_{\substack{b \bmod N \\ b \equiv c \bmod M}} \chi(b)$ s'annule pour tout caractère primitif χ, et pour tout propre diviseur M de N.

Les propriétés (9.13)–(9.15) impliquent la loi de réciprocité quadratique.

Démontrons la formule principale (9.6) :

$$\left(\frac{l}{q}\right)\left(\frac{q}{l}\right) = (-1)^{\frac{l-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}, \tag{9.16}$$

où l, q sont des nombres premiers distincts. Remarquons premièrement que le symbole quadratique $\chi(a) = \left(\frac{a}{q}\right)$ est un caractère de Dirichlet primitif modulo q. La somme de Gauss correspondante $G(\chi)$ est un élément de l'anneau $R = \mathbb{Z}[\zeta_q]$. Dans un anneau commutatif on a toujours la congruence $(a+b)^l \equiv a^l + b^l \bmod lR$ grâce à la divisibilité des coefficients binomiaux C_l^i par l pour $1 \le i \le l-1$. Comme $\chi^l(a) = \chi(a) = \pm 1$, on a

$$G(\chi)^l \equiv G_l(\chi^l) \bmod lR, \quad G_l(\chi^l) = \overline{\chi(l)}G(\chi),$$

donc

$$G(\chi)^{l-1} \equiv \left(\frac{l}{q}\right) \bmod lR. \tag{9.17}$$

De l'autre côté, $\chi = \overline{\chi}$, et 9.15 implique

$$G(\chi)^2 = \chi(-1)q = (-1)^{\frac{q-1}{2}}q. \tag{9.18}$$

Si l'on représente la partie gauche de (9.17) comme $G(\chi)^{2\frac{l-1}{2}}$ on obtient

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}} q^{\frac{l-1}{2}} \equiv \left(\frac{l}{q}\right) \bmod lR. \tag{9.19}$$

Finalement, (9.19) et la congruence d'Euler assurent

$$q^{\frac{l-1}{2}} \equiv \left(\frac{q}{l}\right) \bmod l$$

d'où (9.6).

De façon plus facile on montre l'égalité (9.9) à l'aide de l'anneau $S = \mathbb{Z}[\varepsilon]$, où $\varepsilon = \exp(2\pi i/8)$. On pose $b = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, et on observe que $b^2 = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 = 2$. Ensuite $(\varepsilon + \varepsilon^{-1})^p \equiv \varepsilon + \varepsilon^{-1} \bmod pS$ si $p \equiv \pm 1 \bmod 8$, et $(\varepsilon + \varepsilon^{-1})^p \equiv -(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) \bmod pS$ si $p \equiv \pm 3 \bmod 8$. De plus, $\bar{b}^2 \equiv 2 \bmod pS$ implique que $\bar{b} = b \bmod pS$ est inversible dans l'anneau quotient

$$S/pS = \langle \varepsilon^n \bmod pS \rangle_{n=0,\cdots,3} = \left\langle 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \right\rangle, \ \ \varepsilon^4 = -1, \varepsilon^5 = -\varepsilon, \varepsilon^6 = -\varepsilon^2, \varepsilon^7 = -\varepsilon^3,$$

donc $(\varepsilon+\varepsilon^{-1})^p \equiv \varepsilon+\varepsilon^{-1} \bmod pS$ implique $b^p \equiv b \bmod pS$, d'où $b^{p-1} \equiv 1 \bmod pS$, et

$$b^2 \equiv 2 \bmod p \Rightarrow 2^{(p-1)/2} \equiv (b^2)^{(p-1)/2} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \bmod pS \Rightarrow 2^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p.$$

Si $b^p \equiv -b \bmod pS$, alors $b^{p-1} \equiv -1 \bmod pS$, et

$$b^2 \equiv 2 \bmod p \Rightarrow 2^{(p-1)/2} \equiv (b^2)^{(p-1)/2} \equiv b^{p-1} \equiv -1 \bmod pS \Rightarrow 2^{(p-1)/2} \equiv -1 \bmod p.$$

EXERCICES

9.1 Si p est un nombre premier, et $p \equiv 1 \bmod 4$, montrer que

$$-1 \equiv \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \bmod p.$$

[Indication : en considérant $X^{p-1}-1$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ montrer d'abord que $(p-1)!+1 \equiv 0 \bmod p$].

9.2 L'entier 713 est-il un carré modulo $p = 1009$?

9.3 (a) Soit $p = 2^{2^n}+1$ un nombre de Fermat premier, avec $n \geq 2$. Montrer que a est une racine primitive modulo p si et seulement si $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Montrer que 3, 5 et 7 sont racines primitives modulo p.

(b) Montrer le critère de Pépin :

$$p = 2^{2^n}+1 \text{ est un nombre premier} \Longleftrightarrow 3^{(p-1)/2} \equiv -1 \bmod p.$$

9.4 Montrer que 2 est racine primitive modulo les nombres premiers de la forme $4q+1$ ou $2q+1$ avec q premier, $q \equiv 1 \bmod 4$. Et si $p = 2q+1$ avec q premier, $q \equiv 3 \bmod 4$?

9.5 Calculer de tête les symboles : $\left(\frac{3}{97}\right)$, $\left(\frac{5}{389}\right)$, $\left(\frac{2003}{11}\right)$, et $\left(\frac{5!}{7}\right)$.

9.6 Montrer que pour p nombre premier ≥ 5 on a $\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1, 11 \pmod{12}, \\ -1 & \text{si } p \equiv 5, 7 \pmod{12}. \end{cases}$

9.7 En utilisant le fait que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique, montrer directement que $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ pour $p \equiv 1 \pmod 3$. [Indication : il existe un élément $c \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ d'ordre 3. Montrer que $(2c+1)^2 = -3$.]

9.8 Si $p \equiv 1 \pmod 5$, montrer directement que $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ par la méthode de l'exercice 7. [Indication : soit $c \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ un élément d'ordre 5. Montrer que $(c+c^4)^2+(c+c^4)-1 = 0$, etc.]

9.9 Pour quels nombres premiers p a-t-on $\displaystyle\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right) = 0$?

9.10 Combien d'entiers naturels $x < 2^{13}$ satisfont l'équation

$$x^2 \equiv 5 \pmod{2^{13}-1}?$$

(On peut utiliser le fait que $2^{13}-1$ est premier.)

9.11 Trouver un entier naturel $x < 97$ tel que $x \equiv 4^{48} \pmod{97}$.

9.12 Sur l'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, il existe aussi un analogue de la fonction bêta :

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^\times} \frac{y^s}{(1+y)^{s+t}}\frac{dy}{y} \ (\mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(t) > 0).$$

Il est appelé somme de Jacobi de deux caractères de Dirichlet $\chi, \psi \bmod N$ et défini par

$$J(\chi,\psi) = \sum_{x \bmod N} \chi(x)\psi(1-x) = \sum_{y \bmod N} \chi(y)\overline{(\chi\psi)}(1+y).) \tag{9.20}$$

En utilisant le changement de variables $y(1-x) \mapsto x$, $x(1+y) \mapsto y$), démontrer l'égalité des deux expressions.

9.13 En supposant χ, ψ, et $\chi\psi$ tous primitifs modulo N, montrer que

$$J(\chi,\psi) = G(\chi)G(\psi)/G(\chi\psi) = J(\psi,\chi) \tag{9.21}$$

correspondant à l'identité classique $B(s,t) = \Gamma(s)\Gamma(t)/\Gamma(s+t)$.

Solution : si l'on calcule le produit

$$G(\chi)G(\psi) = \sum_{x \bmod N} \chi(x)\zeta_N^x G(\psi) = \sum_{x \bmod N} \chi\psi(x)\zeta_N^x \overline{\psi(x)} G(\psi). \tag{9.22}$$

En appliquant (9.13), on obtient

$$\overline{\psi(x)}G(\psi) = G_x(\psi) = \sum_{y \bmod N} \zeta_N^{xy}\psi(y)$$

et (9.22) se transforme en

$$\sum_{x,y \bmod N} (\chi\psi)(x)\psi(y)\zeta_N^{x(1+y)} = \sum_{y \bmod N} \psi(y)G_{1+y}(\chi\psi) =$$
$$\sum_{y \bmod N} \psi(y)\overline{(\chi\psi)}(1+y)G(\chi\psi) = J(\psi,\chi)G(\chi\psi). \tag{9.23}$$

10 Primalité (II)

10.1 Nombres pseudopremiers d'Euler

Rappels : Congruence d'Euler

PROPOSITION 9.2.1 *Soit n un nombre premier impair. Alors on a la congruence (9.2) :*

$$a^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \bmod n. \tag{9.2}$$

DÉFINITION 10.1.1 *Un entier naturel n est dit* nombre pseudopremier d'Euler par rapport à *a si* $\gcd(a,n) = 1$ *et si (9.2) est satisfaite.*

Si n n'est pas nécessairement premier, la congruence (9.2) peut être utilisée comme test de primalité si l'on définit le symbole de Jacobi à droite par multiplicativité : pour un nombre impair positif $n = p_1 p_2 \dots p_k$, où les p_i sont premiers (pas nécessairement distincts) posons

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \dots \left(\frac{a}{p_k}\right). \tag{10.1}$$

En effet, le symbole de Jacobi peut être étendu à toutes les valeurs du "numérateur" et du "dénominateur" et il peut être calculé sans connaître la factorisation de n en produit de nombres premiers.

Maintenant on va démontrer, en utilisant le théorème chinois (voir théorème 10.1.2), que si n est un nombre pseudopremier d'Euler par rapport à tout $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ alors n est premier. C'est-à-dire, il n'y a pas d'analogue eulérien des nombres de Carmichael.

THÉORÈME 10.1.2 (SOLOWAY-STRASSEN) *Un nombre impair n est premier si et seulement si pour tout a avec* $\gcd(a,n) = 1$*,*

$$a^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \bmod n. \tag{10.2}$$

PREUVE (voir [Dem], p. 125).

I) On suppose qu'il existe un nombre premier p impair tel que $p^2|n$, et on utilise le morphisme surjectif de groupes multiplicatifs

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times, \tag{10.3}$$

où le groupe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre $p(p-1)$. Ceci implique (par la surjectivité) qu'il existe $\overline{a}$ mod n tel que

$$p(p-1) \text{ divise } \mathrm{ord}(\overline{a}) \Rightarrow p \text{ divise } \mathrm{ord}(\overline{a})^{(n-1)/2} = \frac{\mathrm{ord}(\overline{a})}{\mathrm{pgcd}((n-1)/2, \mathrm{ord}(\overline{a}))}$$
$$\Rightarrow (\overline{a})^{(n-1)/2} \not\equiv \pm 1 \bmod n.$$

(ou bien : $n = p^2 m$; $a = 1 + mp \Rightarrow \overline{a}^{n-1} \neq 1$, car $\overline{a}^p = 1$. En effet, $(1+mp)^p = 1 + p \cdot mp + \cdots \equiv 1 \bmod n$ implique $\overline{a}^{n-1} = \overline{a}^n \overline{a}^{-1} = \overline{a}^{-1} \neq 1$).

II) Soit $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ où $r \geq 2$ et les p_i sont premiers distincts. On a

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/(p_i))^\times.$$

Supposons qu'il existe un a tel que

$$a^{(n-1)/2} \equiv -1 \bmod n.$$

L'existence d'un tel a est nécessaire pour la congruence (10.2) puisque le théorème chinois permet de trouver, pour un choix arbitraire de $\eta_i = \pm 1$, un a avec

$$\left(\frac{a}{p_i}\right) = \eta_i, \tag{10.4}$$

donc on choisit $\prod_{i=1}^{r} \eta_i = -1$, puisque

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{a}{p_r}\right)$$

Notons a_i la classe de a modulo p_i. On a d'une part,

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_r}\right) = \left(\frac{a_1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_r}{p_r}\right)$$

D'autre part, réduisant modulo p_1 l'égalité initiale, on obtient

$$\left(\frac{a_1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_r}{p_r}\right) \equiv a_1^{(n-1)/2} \bmod p_1.$$

D'après le théorème chinois, on peut choisir les différents a_i indépendamment. Mais le second membre ne dépend que de a_1, tandis qu'on peut changer le signe du premier sans modifier a_1, par exemple en modifiant a_r. Cela est absurde et contredit l'hypothèse $r \geq 2$.

10.2 Congruence d'Euler et tests de primalité.

Dans des tests modernes de primalité (Soloway-Strassen, Miller-Rabin...) on utilise la congruence (9.2) et le théorème 10.1.2. Ces tests de primalité sont beaucoup plus rapides que toutes les méthodes conn ues de factorisation des grands nombres premiers "aléatoires".

Test de primalité de Soloway-Strassen

C'est un test probabiliste. Selon Emile Borel, "un phénomène dont la probabilité est 10^{-50}, ne se produira donc jamais ou du moins ne sera jamais observé (*La probabilité et la vie*).

Rappelons qu'un entier naturel n est dit *pseudopremier d'Euler par rapport à* a si $\text{pgcd}(a,n)=1$ et (9.2) est satisfaite. Si (9.2) n'est pas satisfaite pour un a avec $\text{pgcd}(a,n)=1$, alors n n'est pas premier, et on appelle a un témoin d'Euler de non-primalité de n. D'après le théorème 10.1.2, il existe toujours un témoin d'Euler de non-primalité d'un nombre composé impair n, mais il reste la question de quel est le plus petit témoin, ainsi que leur proportion.

Le test de primalité de Soloway-Strassen repose sur l'observation suivante :

REMARQUE 10.2.1 *Soit n un nombre impair. Si (9.2) n'est pas satisfaite pour un a premier à n, alors elle n'est pas satisfaite pour au moins de 50 % de ces a.*

En effet, soit $H=\{a_1,a_2,\cdots,a_j,\cdots\}$ l'ensemble de tous les $a=a_j$ pour lesquels (9.2) est satisfaite :

$$a_j^{(n-1)/2}\equiv\left(\frac{a_j}{n}\right)\bmod n. \tag{9.2}$$

Alors H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ donc $a\notin H\Rightarrow aH\cap H=\emptyset$, ceci dit, la condition (9.2) n'est pas satisfaite pour au moins de 50 % de a.

Description de l'algorithme. Soit n impair. On choisit au hasard k nombres b, $0<b<n$. Pour tout b on calcule les deux termes de la congruence d'Euler (9.2), $b^{(n-1)/2}\bmod n$ et $\left(\frac{b}{n}\right)$.

Le calcul de $b^{(n-1)/2}\bmod n$ coûte $\mathcal{O}(\log^3 n)$ opérations booléennes par la méthode des carrés successifs.

Le calcul de $\left(\frac{b}{n}\right)$ coûte $\mathcal{O}(\log^3 n)$ opérations booléennes à l'aide de la loi de réciprocité quadratique en utilisant des divisions euclidiennes.

Si (9.2) est vérifié pour k choix au hasard de b, alors la probabilité que n soit cependant composé est inférieure ou égale à $1/2^k$, donc pour $k\sim 167$ on obtient une probabilité suffisamment petite (selon E.Borel) :

$$2^{167}\approx 10^{50}\cdot 1.87072209578355573530071658 8.$$

Test conditionnel de primalité de Miller

Ce test s'appuie sur l'existence d'un témoin d'Euler relativement petit.

Cependant, pour montrer cette existence, on a besoin de l'Hypothèse de Riemann généralisée.

Soit $\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ un caractère de Dirichlet (c'est-à-dire, un morphisme de groupes $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*\to\mathbb{C}$). Pour $a\in\mathbb{Z}$, on pose $\chi(a)=\chi(a\bmod N)$ si $\text{pgcd}(a,N)=1$ et $\chi(a)=0$ si $\text{pgcd}(a,N)>1$. On considère la fonction L de Dirichlet

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$$

qui converge absolument et ne s'annule pas pour $\text{Re}(s)>1$. Elle admet un prolongement analytique à tout le plan complexe.

HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉE. Pour toute fonction L de Dirichlet $L(s,\chi)$ on a

$$\text{si } L(s,\chi)=0,\text{o } \text{Re}(s)>0,\quad \text{alors } \text{Re}(s)=\frac{1}{2}.$$

THÉORÈME 10.2.2 (G.MILLER) *Supposons que pour tout $b<2\log^2 n$ la condition (9.2) soit satisfaite, et que l'hypothèse de Riemann généralisée soit vraie.*

Alors n est premier.

Description de l'algorithme de Miller

On teste la validité de la congruence d'Euler (9.2),

$$b^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{n}\right) \bmod n$$

pour chaque $b < 2\log^2 n$. Si n passe tous ces tests, il est premier (conditionnel). L'analyse simple du coût T de cet algorithme montre que $T = \mathcal{O}(\log^5 n)$.

REMARQUE. On a observé récemment des "preuves" numériques que pour n composé il existe un témoin d'Euler $a \leq 2\log n \log\log n$.

Nombres pseudopremiers forts et le test de primalité de Miller-Rabin

On peut considérer une condition de primalité plus forte que la congruence d'Euler (9.2)

$$b^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{b}{n}\right) \bmod n,$$

valable pour un nombre premier n. Si n est premier on remarque que dans le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ les seules racines carrées de 1 sont ± 1. Cette propriété, qui n'entraîne pas la primalité d'un nombre impair n, est à la base d'un test probabiliste efficace de primalité.

DÉFINITION 10.2.3 *Un entier naturel n est dit* nombre pseudopremier fort par rapport *b si* $\operatorname{pgcd}(b,n) = 1$ *et si pour la présentation $n-1 = 2^s t$ avec t impair, ou bien on a $b^t \equiv 1 \bmod n$, ou bien il existe un r, $0 \leq r < s$ tel que*

$$b^{2^r t} \equiv -1 \bmod n.$$

THÉORÈME 10.2.4 (MILLER-RABIN)
(a) Soit n un nombre impair composé, alors n n'est pas un nombre pseudopremier fort par rapport à au moins 75 % des b premiers à nv.
(b) Tout nombre pseudopremier fort par rapport à b est pseudopremier d'Euler par rapport à b.

PREUVE (voir [Kob87], p.117, V.1.6, V.1.7).
Description de l'algorithme de Miller-Rabin On choisit au hasard k nombres b, $0 < b < n$. Pour chacun on teste si n est pseudopremier fort par rapport à b : si $b^t \not\equiv 1 \bmod n$, on calcule

$$b^{2^r t} \bmod n, \quad 0 \leq r < s$$

jusqu'à obtenir $-1 \bmod n$.

Le calcul demande $\mathcal{O}(\log^3 n)$ opérations booléennes seulement, par la méthode des carrés successifs.

Si n passe les k tests avec succès pour des choix arbitraires de b, alors la probabilité que n soit composé est inférieure ou égale à $1/4^k$.

REMARQUE. On peut vérifier que $n = 3215031751$ est le seul nombre composé $n \leq 2.5 \cdot 10^{10}$ qui soit pseudopremier fort pour $b = 2, 3, 5$ et 7.

```
? factor(3215031751)
%1 =
[151 1]

[751 1]

[28351 1]
```

Test polynomial déterministe de primalité de Agrawal, Kayal et Saxena ("PRIMES is in P", 2002)

Ce test utilise une version polynomiale de la condition nécessaire du petit théorème de Fermat, en effet il se trouve que cette version est aussi suffisante et qu'elle amène à un algorithme polynomial très efficace de primalité, voir une jolie exposition dans F.Bornemann, *PRIMES is in P, une avancée accessible à "l'homme ordinaire"*, Gazette des mathématiciens, SMF, No 98, octobre 2003, pp. 14–30.

Exercices

10.1 Soit $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ un produit de nombres premiers distincts, où $r \geq 2$, et soit a tel que

$$a^{(n-1)/2} \equiv -1 \bmod n.$$

Posons $n - 1 = 2^s t$ avec t impair, et soit $p|n$, p premier, avec $p - 1 = 2^{s'} t'$ où t' est impair. Montrer que

$$s' \geq s, \text{ et } \left(\frac{a}{p}\right) = \varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{si } s = s' \\ 1, & \text{si } s < s' \end{cases}, \tag{10.5}$$

Solution : On suppose, par l'absurde, $s' < s$, alors

$$a^{(n-1)/2} = a^{2^{s-1}t} \equiv -1 \bmod n \Rightarrow$$
$$a^{2^{s-1}t} \equiv (a^{2^{s-1}t})^{t'} \equiv a^{2^{s-1}t'} \equiv -1 \bmod n \Rightarrow a^{2^{s-1}t'} \equiv -1 \bmod p,$$

puisque t et t' sont impaires. Ensuite, l'hypothèse $s' < s$ implique

$$a^{2^{s'}t'} \equiv 1 \bmod p \Rightarrow a^{2^{s-1}t'} \equiv 1 \bmod p,$$

et on a une contradiction avec la congruence précédente $a^{2^{s-1}t'} \equiv -1 \bmod p$.

- Cas $s' = s$: $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} = a^{2^{s'-1}t'} \equiv -1$
  puisque $(a^{2^{s'-1}t})^{t'} \equiv -1 \bmod p$.

- Cas $s' > s$:
$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} = a^{2^{s'-1}t'} \equiv (a^{2^{s-1}t'})^{2^{s'-s}} \equiv 1 \bmod p.$$ □

11 Notions de corps et d'espace vectoriel, rappels et exemples

Nous avons vu au chapitre 1 :

Définition 4.2.4

Un corps *est un anneau commutatif A, non réduit à $\{0\}$ dans lequel tout élément non nul est inversible :*
Corps $\forall x \in A, x \neq 0, \exists y \in A, xy = 1$

Proposition 4.2.5

(a) Soit A un corps, alors A est un anneau intègre.
(b) Soit A un corps, I un idéal de A. Alors soit $I = \{0\}$ soit $I = A$.

Exemples.

On note
$\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels,
$\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et
$\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

11.1 Corps des fractions

PROPOSITION 11.1.1 *Si A est un anneau intègre, alors il existe un corps K appelé* corps des fractions *de A et noté $Frac(A)$ tel que*

(i) $A \subset K$,

(ii) et pour tout corps L et tout morphisme d'anneaux injectif $\phi : A \to L$, il existe un unique morphisme de corps $\psi : K \to L$ tel que $\psi|_A = \phi$.

PREUVE. Construction. On définit sur $A \times A\backslash\{0\}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad = bc.$$

On vérifie en utilisant l'intégrité de A que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note K l'ensemble quotient $A \times A\backslash\{0\}/\mathcal{R}$, et $\frac{a}{b}$ l'image de (a,b) dans ce quotient. L'application de A dans K qui envoie a sur $(a,1) = \frac{a}{1}$ est injective, et on identifie A avec son image. On munit alors K des lois

$$+ : K \times K \to K, (\frac{a}{b}, \frac{c}{d}) \mapsto \frac{ad+bc}{bd} \in K \quad (\text{"}addition\text{"});$$
$$\times : K \times K \to K, (\frac{a}{b}, \frac{c}{d}) \mapsto \frac{ac}{bd} \in K \quad (\text{"}multiplication\text{"});$$

On vérifie que ces lois sont bien définies et munissent K d'une structure de corps, l'élément neutre pour l'addition étant $0/1$, l'élément neutre pour la multiplication étant $1/1$, et l'inverse d'un élément non nul $\frac{a}{b}$ étant $\frac{b}{a}$.

Propriété universelle. Soient L un corps et $\phi : A \to L$ un morphisme d'anneaux injectif il existe un unique morphisme de corps $\psi : K \to L$ tel que $\psi|_A = \phi$. L'application

$$A \times A\backslash\{0\} \to L, \quad \frac{a}{b} \mapsto \frac{\phi(a)}{\phi(b)} \in L$$

passe au quotient et définit un morphisme de corps $K \to L$ qui convient. D'autre part, si ψ est un tel morphisme de corps, alors on a $\psi(a/b) = \frac{\psi(a)}{\psi(b)}$, ce qui montre l'unicité de ψ.

11.2 Caractéristique d'un corps, sous-corps premier

DÉFINITION 11.2.1 *Si A est un anneau commutatif, il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{Z} \to A$, donné par $\phi(n) = n \cdot 1$. Son noyau,* Kerϕ*, est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Le générateur positif de ce sous-groupe est appelé la* caractéristique *de A et noté $car(A)$.*

PROPOSITION 11.2.2 *La caractéristique d'un corps K est 0 ou un nombre premier $p = car(K)$. Si la caractéristique du corps est nulle, celui-ci contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$. Sinon, il contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est sa caractéristique. Le corps ainsi obtenu est le plus petit corps contenu dans K, on l'appelle le sous-corps premier de K.*

PREUVE. D'après le théorème d'isomorphisme, on a $\mathbb{Z}/\text{Ker}\phi \simeq \text{Im}\phi$, ce quotient est donc un anneau intègre, c'est-à-direKerϕ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$, $\{0\}$ ou $p\mathbb{Z}$, p premier. Si c'est $\{0\}$, la propriété 11.1.1(ii) montre que $\mathbb{Q}$ est isomorphe à un sous-corps K' de K ; K' est alors le sous-corps engendré par 1 donc le plus petit sous-corps de K. Si Ker$\phi = p\mathbb{Z}$, alors le sous-anneau Imϕ de K engendré par 1 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donc c'est un corps et le plus petit sous-corps de K.

11.3 Modules et espaces vectoriels

DÉFINITION 11.3.1 *Si A est un anneau commutatif, un A-module est la donnée d'un groupe abélien M, muni d'une loi externe*

$$\times : A \times M \to M, (a, m) \mapsto am \in M \quad (\text{"}\textit{multiplication externe}\text{"})$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

Mo1 $\forall a \in A,\ \forall x, y \in M,\ a(x+y) = ax + ay,$

Mo2 $\forall a, b \in A,\ \forall x \in M,\ (a+b)x = ax + bx,$

Mo3 $\forall a, b \in A,\ \forall x \in M,\ a(bx) = (ab)x.$

Si K est un corps un espace vectoriel sur K est un K-module.

EXEMPLE. La notion de $\mathbb{Z}$-module coïncide avec celle de groupe abélien :

$$\times : \mathbb{Z} \times M \to M, (a, m) \mapsto am \in M$$

EXEMPLE 11.3.2 *Si A est un anneau commutatif, et $n \in \mathbb{N}$, A^n est un A-module pour la loi externe*

$$\times : A \times A^n \to A^n, (a, (a_1, \cdots, a_n) \mapsto (aa_1, \cdots, aa_n) \in A^n$$

EXEMPLE 11.3.3 *Soient A un anneau commutatif et M un A-module. Si X est un ensemble, alors pour tout $a \in A$ et pour toute application $f : X \to M$ on pose*

$$\forall x \in X, (af)(x) = a(f(x)) \in M.$$

L'ensemble M^X de toutes les applications $f : X \to M$ est un A-module pour la loi externe

$$\times : A \times M^X \to M^X, (a, f) \mapsto af \in M^X$$

DÉFINITION 11.3.4 *Soit A est un anneau commutatif, et soient M, N deux A-modules. Une application $\phi : M \to N$ est dite* morphisme *de A-modules (ou application A-linéaire) si c'est un morphisme de groupes abéliens, et si elle vérifie la condition suivante :*

Mor. $\forall \lambda \in A, \forall m \in M, \phi(\lambda m) = \lambda \phi(m)$

Un isomorphisme de A-modules est un morphisme de A-modules qui est bijectif. Son inverse est alors un morphisme de A-modules.

Sous-modules, sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 11.3.5 *Soient A est un anneau commutatif et M un A-module. Un sous-groupe abélien $N \subset M$ est dit un A-sous-module s'il vérifie la condition suivante :*

Sous $-$ module $\forall \lambda \in A, \forall x \in N, \lambda x \in N.$

Si K est un corps, un K-sous-module d'un espace vectoriel sur K est dit un sous-espace vectoriel sur K.

EXEMPLE 11.3.6 *Soit A est un anneau commutatif, et soient M, N deux A-modules. L'ensemble $\mathcal{L}(M, N)$ des applications A-linéaires $\phi : M \to N$ est un A-sous-module du module N^M de toutes les applications de M vers N. En particulier, si K est un corps et E un K-espace vectoriel, le dual de E, noté $E^\vee$, est l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, K)$.*

11.4 Rappels sur les espaces vectoriels

DÉFINITION 11.4.1 *Soit K un corps. Une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de K est dite* presque nulle *si l'ensemble*

$$\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$$

est fini.

Soient E un espace vectoriel sur K et $\mathbf{e} = (e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. La famille $\mathbf{e}$ est

- *une famille* génératrice *si pour tout x de E, il existe une famille presque nulle $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de K tels que*
$$x = \sum_{i\in I} a_i e_i.$$
- *une famille* libre *si pour toute famille presque nulle $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de K, on a*
$$\sum_{i\in I} a_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, a_i = 0.$$
On dit alors que les éléments de $(e_i)_{i\in I}$ sont linéairement indépendants.
- *une* base *de E si elle est à la fois* libre *et* génératrice. *Pour tout x de E, il existe alors une unique famille presque nulle $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de K tels que*
$$x = \sum_{i\in I} a_i e_i.$$
On dit que $(a_i)_{i\in I}$ sont les coordonnées *de x dans la base $\mathbf{e}$.*

THÉORÈME 11.4.2 (SUR L'EXISTENCE D'UNE BASE) *Si E est un espace vectoriel sur K, alors il existe une base de E. Toutes les bases ont le même cardinal appelé dimension de E et noté* $\dim E$.

On ne donne pas de démonstration ici, mais on remarque :

PROPOSITION 11.4.3 *Soit K un corps. Soient E un espace vectoriel sur K et $\mathbf{e} = (e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) la famille $\mathbf{e}$ est une* base *de E,*
- *(ii) la famille $\mathbf{e}$ est* génératrice *et toute sous-famille propre de $\mathbf{e}$ n'est pas* génératrice,
- *(iii) la famille $\mathbf{e}$ est* libre *et toute famille contenant strictement $\mathbf{e}$ n'est pas* libre.

DÉFINITION 11.4.4 *Un espace vectoriel E sur K est dit de* dimension finie, *s'il admet une famille* génératrice finie.

THÉORÈME 11.4.5 *Si E est un espace vectoriel sur K de* dimension finie, *toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E et noté* $\dim E$. *En outre :*

- *(i) une famille génératrice a au moins* $\dim E$ *éléments, et c'est une base si elle en a exactement* $\dim E$,
- *(ii) une famille* libre *a au plus* $\dim E$ *éléments, et est une base si elle en a exactement* $\dim E$.

EXEMPLE 11.4.6 *Si E est un espace vectoriel sur K de dimension finie, et si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors $E^\vee$ est un espace vectoriel de dimension finie, une base de $E^\vee$ est $(e_1^\vee, \cdots, e_n^\vee)$, où $e_i^\vee$ est défini par*

$$\forall (a_1, \cdots, a_n) \in K^n,\ e_i^\vee(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_i \in K.$$

Cette base $(e_1^\vee, \cdots, e_n^\vee)$ est appelée la base duale *de $(e_1, \cdots, e_n)$.*

11.5 Matrices de changement de base

DÉFINITION 11.5.1 *Soit E est un K-espace vectoriel de dimension finie et soient $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathbf{e}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.*

La matrice

$$P = P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'} = (p_{ij}), p_{ij} = e_i^\vee(e'_j) \in K$$

qui a pour j-ème colonne les coordonnées de e'_j dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, est appelée matrice de changement de base *de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$.*

PROPOSITION 11.5.2

(i) Soit x un élément d'un K-espace vectoriel E de dimension finie et soient $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathbf{e}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.

On pose

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,\ x = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n,$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

où $P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}$ est la matrice de changement de base de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$.

(ii) On a les relations

$$P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'} P_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{e}''} = P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}''} \text{ et } P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'^{-1}} = P_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{e}}.$$

DÉFINITION 11.5.3 *Soit $\phi : E \to E$ une application linéaire d'un K-espace vectoriel E de dimension finie dans lui-même, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.*

La matrice

$$A = A_{\phi,\mathbf{e}} = (a_{ij}), p_{ij} = e_i^\vee(\phi(e_j)) \in K$$

qui a pour j-ème colonne les coordonnées de $\phi(e_j)$ dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$, est appelée matrice de l'application linéaire dans la base $\mathbf{e}$.

PROPOSITION 11.5.4

(i) Soit $\phi : E \to E$ une application linéaire d'un K-espace vectoriel E de dimension finie dans lui-même, et soient $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathbf{e}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.

On pose

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,\ x = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n,$$
$$\phi(x) = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n,\ \phi(x) = y'_1 e'_1 + \cdots + y'_n e'_n,$$

Alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_{\phi,\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où $A_{\phi,\mathbf{e}}$ est la matrice de l'application linéaire dans la base $\mathbf{e}$.

(ii) On a la relation

$$A_{\phi,\mathbf{e}'} = P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'^{-1}} A_{\phi,\mathbf{e}} P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'}.$$

11.6 Caractères d'un groupe

DÉFINITION 11.6.1 *Etant donné un groupe G et un corps K, on appelle* caractère *de G dans K tout morphisme de groupes de G dans K^*.*

Si G est abélien, on note $X^*(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ le groupe des caractères de G dans $\mathbb{C}$, pour la loi

$$(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g).$$

EXEMPLE 11.6.2 *Si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un* morphisme *de G dans $\mathbb{C}^*$ est déterminé par l'image de $\overline{1}$ qui vérifie*

$$\chi(\overline{1})^n = \chi(n\overline{1}) = \chi(\overline{0}) = 1.$$

C'est donc une racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}^*$. Inversement si ζ est une racine n-ième de l'unité, l'application

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times, \quad \overline{x} \mapsto \zeta^x$$

est un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; on a ainsi obtenu une bijection du groupe $\mu_n(\mathbb{C})$ des racines n-ièmes de l'unité de $\mathbb{C}^\times$ sur $X^*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Notons en outre que l'exponentielle complexe fournit un isomorphisme de groupes

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n(\mathbb{C}), \quad \overline{x} \mapsto \exp(\frac{2i\pi x}{n})$$

THÉORÈME 11.6.3 (D'INDÉPENDANCE LINÉAIRE DE CARACTÈRES) *Soient $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \mathrm{Hom}(G, K^*)$ n caractères* distincts *d'un groupe G dans un corps K. Alors ce sont n éléments linéairement indépendants du K-espace vectoriel des applications de G dans K.*

PREUVE . On raisonne par récurrence sur l'entier n. Un caractère n'étant jamais nul, l'assertion est vraie pour $n = 1$.

Pour $n \geq 2$, supposons l'assertion vraie pour tout $i < n$, et choisissons dans K des éléments a_i $(1 \leq i \leq n)$ tels que pour tout $x \in G$ on ait l'égalité

$$e(x) = a_1\sigma_1(x) + \cdots + a_n\sigma_n(x) = 0$$

Si α appartient à G, on a aussi pour tout x de G

$$e(\alpha x) - \sigma_n(\alpha)e(x) = 0,$$

soit

$$a_1(\sigma_1(\alpha) - \sigma_n(\alpha))\sigma_1(x) + \cdots + a_{n-1}(\sigma_{n-1}(\alpha) - \sigma_n(\alpha))\sigma_{n-1}(x) = 0.$$

Comme les σ_i sont distincts, il existe un α dans G tel que $\sigma_1(\alpha) - \sigma_n(\alpha)$ soit non nul ; et d'après l'hypothèse de récurrence, les caractères $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ sont linéairement indépendants, donc on a

$$a_1(\sigma_1(\alpha) - \sigma_n(\alpha)) = 0 = a_{n-1}(\sigma_{n-1}(\alpha) - \sigma_n(\alpha))$$

d'où $a_1 = 0$. On utilise de nouveau l'hypothèse de récurrence avec les caractères $\sigma_2, \cdots, \sigma_n$, d'où $a_2 = \cdots = a_n = 0$, ce qui prouve que $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ sont linéairement indépendants.

COROLLAIRE 11.6.4 *Soient E et E' deux corps, et $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \mathrm{Hom}(E, E')$ n morphismes* distincts *de E dans E'. Alors ce sont n éléments linéairement indépendants du E'-espace vectoriel des applications de E dans E'.*

PREUVE : il suffit de poser $G = E^*$, $K = E'$, et d'utiliser le théorème 11.6.3.

NOTATIONS. Si X est un ensemble fini, on considère la forme

$$\mathbb{C}^X \times \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}, \quad (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \frac{1}{\sharp X}\sum_{x\in X} \overline{f(x)}g(x).$$

PROPOSITION 11.6.5 *Si G est un groupe fini et χ, χ' deux caractères de G dans $\mathbb{C}$, alors*

$$\langle \chi, \chi'\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi = \chi', \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

COROLLAIRE 11.6.6 *Si G est un groupe fini, la famille $(\chi)_{\chi\in X^*(G)}$ est une famille libre du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.*

12 Extensions.

12.1 Polynômes irréductibles.

Rappelons que si K est un corps l'anneau de polynômes $K[X]$ est euclidien, donc principal et factoriel, en particulier tout polynôme non nul s'écrit de manière unique comme produit de son coefficient dominant et de polynômes irréductibles unitaires.

Et on obtient la définition suivante pour les éléments irréductibles de $K[X]$:

DÉFINITION 12.1.1 *Soit K un corps. Un polynôme $P \in K[X]$ est dit* irréductible, *s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

Irr1. $P \notin K$

Irr2. *Si $P = QR$ avec $Q, R \in K[X]$ alors $Q \in K^\times$ ou $R \in K^\times$.*

EXEMPLES 12.1.2 *Soit K un corps.*

(i) Un polynôme $P \in K[X]$ de degré un est irréductible.

(ii) Un polynôme $P \in K[X]$ de degré 2 ou 3 est irréductible si et seulement s'il n'admet pas de racine dans K.

(iii) Tout polynôme irréductible sur $\mathbb{C}$ est de degré un.

(iv) Tout polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ est de degré ≤ 2.

PROPOSITION 12.1.3 *Soit K un corps. Un polynôme $P \in K[X]$ est irréductible si et seulement si l'anneau quotient $K[X]/(P)$ est un corps.*

12.2 Extensions, degré.

DÉFINITION 12.2.1

(i) Soient K un corps, et L un corps contenant K. On dit que L est une extension *de K. C'est un K-espace vectoriel.*

(ii) Soit L une extension d'un corps K. On appelle degré *de L sur K la dimension $\dim_K L$ de L considéré comme espace vectoriel sur K. On le note $[L : K]$, le degré est éventuellement infini. Si le degré $[L : K]$ est fini on dit que L est une* extension finie *de K.*

(iii) Si L est une extension de K et $A = (\alpha_i)_{i\in I}$ une partie de L, on appelle extension de K engendrée par A *le sous-corps minimal $K(A)$ de L contenant K et A. Les α_i s'appellent les* générateurs *de $K(A)$ sur K. Tout élément de $K(A)$ s'écrit comme une fraction rationnelle à coefficients dans K en les α_i .*

Par exemple, $\mathbb{C}$ est une extension finie de $\mathbb{R}$ de degré 2.

De plus $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.

THÉORÈME 12.2.2 *Si K, L et E sont trois corps tels que $K \subset L \subset E$, alors*

$$[E : K] = [E : L] \cdot [L : K]$$

PREUVE . On note $(a_i)_{i\in I}$ une base de E sur L, et $(b_j)_{j\in J}$ une base de L sur K.

Pour tout $x \in E$, il existe une famille finie $(\alpha_i)_{i\in I_1}$, $I_1 \subset I$, d'éléments de L tels que $x = \sum_{i\in I_1} \alpha_i a_i$. Mais chaque α_i est combinaison linéaire à coefficients dans K d'éléments b_j : $\alpha_i = \sum_{j\in J_1} \beta_{i,j} b_j$, pour une famille finie $(\beta_{i,j})$ dans K. Ceci implique que $x = \sum_{(i,j)\in I_1\times J_1} \beta_{i,j} a_i b_j$, et donc la famille $(a_i b_j)_{i\in I, j\in J}$ est génératrice pour le K-espace vectoriel E.

C'est une famille libre : si $(\beta_{i,j})_{(i,j)\in X}$, $X \subset I \times J$ est une famille finie d'éléments de K telle que $\sum_{(i,j)\in X} \beta_{i,j} a_i b_j = 0$, alors les images I_1 et J_1 de X par projection sur I et J sont finies et on a :

$$\sum_{(i,j)\in X} \beta_{i,j} a_i b_j = \sum_{i\in I_1} \left(\sum_{j\in J_1} \beta_{i,j} b_j \right) a_i = 0$$

et comme pour tout i $\sum_{j\in J_1} \beta_{i,j} b_j$ appartient à L, on trouve $\sum_{j\in J_1} \beta_{i,j} b_j = 0$ pour tout $i \in I_1$, puis $\beta_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in X$. □

COROLLAIRE 12.2.3 *Pour n corps emboîtés ($n \geq 3$)*

$$K_1 \subset \cdots \subset K_n,$$

on a l'égalité

$$[K_n : K_1] = [K_2 : K_1] \cdot [K_3 : K_2] \cdot \ldots \cdot [K_n : K_{n-1}].$$

EXEMPLE 12.2.4 *On considère le sous-corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ de $\mathbb{C}$, il contient le corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, et $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(i)$, donc*

$$[K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(i) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}].$$

Le polynôme $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et le polynôme $X^2 + 1$ l'est dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})[X]$. Donc,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(i) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2, [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3, \text{ et } [K : \mathbb{Q}] = 6.$$

12.3 Eléments algébriques

Soit E une extension d'un corps K.

DÉFINITION 12.3.1

(i) Un élément α de E est dit algébrique *sur K s'il existe un polynôme non nul P de $K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

(ii) Une extension E de K est dite algébrique *si tout élément α de E est algébrique sur K.*

(iii) Si $\alpha \in E$ est un élément algébrique sur K l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(\alpha) = 0$, forme un idéal de $K[X]$, non réduit à (0). Cet idéal est principal, et son générateur unitaire s'appelle le polynôme minimal *de α sur K.*

PROPOSITION 12.3.2 *Soit E une extension d'un corps K, et soit α un élément de E algébrique sur K de polynôme minimal P.*

(i) Si $Q \in K[X]$ admet α comme racine, alors P divise Q dans $K[X]$.

(ii) Le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

(iii) Le sous-anneau $K[\alpha]$ de E est un corps $K(\alpha)$ et on a $[K(\alpha) : K] = \deg P$. La famille $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1})$, où $n = \deg P$, est une base de $K(\alpha)$ sur K.

PREUVEL'assertion (i) traduit que P engendre l'idéal des éléments de $K[X]$ qui ont α comme racine.

(ii) Si P se factorise en QR dans $K[X]$, alors on a $P(\alpha) = Q(\alpha)R(\alpha) = 0$ dans le corps E, donc $Q(\alpha) = 0$ ou $R(\alpha) = 0$, et P divise Q ou R. □

(iii) Le sous-anneau $K[\alpha]$ est l'image de l'homomorphisme d'évaluation $Q \mapsto Q(\alpha)$ de $K[X]$ dans E, dont le noyau est l'idéal (P), maximal d'après (ii) (voir 4.5.4). Par le théorème d'isomorphisme, l'anneau $K[\alpha]$ est donc isomorphe au quotient $K[X]/(P)$, qui est un corps. Si $n = \deg P$, la famille $(1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1})$ est libre sur K car P est le polynôme non nul de plus petit degré qui annule α. Elle est génératrice car pour tout $Q \in K[X]$ on a $Q(\alpha) = R(\alpha)$, où R est le reste de la division euclidienne de Q par P, et donc $R(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i\alpha^i$, $r_i \in K$. La famille est donc une base de $K(\alpha)$ sur K. En particulier on a $[K(\alpha) : K] = n = \deg P$. □

PROPOSITION 12.3.3 *Soit E une extension finie d'un corps K, alors E est algébrique sur K.*

PREUVE. Soit α un élément de E. Si $n = [E : K]$, la famille de $n + 1$ éléments $(1, \alpha, \cdots, \alpha^n)$ n'est pas libre, donc il existe $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ non nul dans $K[X]$ tel que $\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i = P(\alpha) = 0$. □

REMARQUE. L'assertion réciproque est fausse : l'extension $E = \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ de $\mathbb{Q}$, formée par tous les nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ (E est bien un corps, exercice), est algébrique par définition, mais $[E : \mathbb{Q}]$ n'est pas finie. En effet, on vérifie qu'il existe des polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de tout degré $n \geq 1$, par exemple $X^n - 2$ (exercice).

12.4 Corps de rupture, corps de décomposition

Remarquons que pour un corps arbitraire K et pour tout polynôme P non constant de $K[X]$ on peut construire une extension L de K dans laquelle P possède une racine : quitte à factoriser P on peut le supposer irréductible, auquel cas on a vu que l'anneau quotient $K[X]/(P)$ est un corps. La classe $X + (P)$ est alors une racine de P dans $K[X]/(P)$.

THÉORÈME 12.4.1 (SUR L'ISOMORPHISME) *Soient L une extension de K et $\alpha \in L$ une racine d'un polynôme irréductible P de $K[X]$. Alors l'anneau $K[\alpha]$ est un corps isomorphe à $K[X]/(P)$.*

C'est clair d'après le paragraphe précédent, proposition prop :alg et sa preuve, puisque P est à un facteur constant près le polynôme minimal de α sur K.

DÉFINITION 12.4.2 *Soient K un corps, et P un polynôme irréductible sur K. On dit qu'un corps L contenant K est un* corps de rupture *de P sur K s'il existe un $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$ et $P(\alpha) = 0$.*

PROPOSITION 12.4.3 *Soient K un corps, et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible. Alors l'anneau $L = K[X]/(P)$ est un corps de rupture de P sur K, l'élément $\alpha = X + (P)$ de L est tel que $L = K(\alpha)$ et $P(\alpha) = 0$.*

REMARQUE 12.4.4 *Avec les notations de la proposition, on peut donner une construction matricielle de l'anneau $K[X]/(P)$, corps de rupture de P sur K.*

En effet, on écrit $P = \sum_{j=0}^{n} a_jX^j$, et on suppose que $a_n = 1$, alors dans la base

$$(\overline{1}, \overline{X}, \cdots, \overline{X^{n-1}}) \bmod (P)$$

de $K[X]/(P)$ la multiplication $\mu : Q \mapsto \overline{X}Q \bmod (P)$ a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

dont le polynôme minimal est P. Il vient que $K[A] \simeq K[X]/\mathrm{Ker}(\mu)$ est isomorphe à $K[X]/(P)$.

En itérant la construction de corps de rupture ci–dessus (on choisit à chaque étape un facteur irréductible de P de degré > 1 sur le corps obtenu), on peut construire pour tout polynôme $P \in K[X]$ une extension finie L' de K dans laquelle P s'écrit comme produit de facteurs du premier degré. La construction implique que L' peut être choisi de telle façon que $[L' : K] \leq n!$.

DÉFINITION 12.4.5 *On considère un polynôme P de $K[X]$ de degré supérieur ou égal à 1, et une extension E de K, dans laquelle P s'écrit $P(X) = (X - \alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X - \alpha_n)$. Alors le corps $L = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ s'appelle* corps de décomposition *de P dans E. C'est l'extension minimale de K dans E, dans laquelle P se décompose en produit de facteurs linéaires.*

On va vérifier que ce corps est uniquement déterminé à isomorphisme près :

THÉORÈME 12.4.6 (SUR UN PROLONGEMENT D'ISOMORPHISME) *On considère un isomorphisme de corps $\sigma : K \to K'$, et un polynôme irréductible $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in K[X]$. On note $P^\sigma = \sum_{j=0}^{n} \sigma(a_j) X^j \in K'[X]$. On choisit une extension de K contenant une racine β de P, et une extension de K', contenant une racine β' de $P^\sigma(X)$. Alors il existe un isomorphisme de corps*

$$\tilde{\sigma} : K(\beta) \to K'(\beta'),$$

qui prolonge σ et tel que $\tilde{\sigma}(\beta) = \beta'$.

PREUVE. Comme σ est un isomorphisme de corps de K dans K', l'application

$$\varphi : K[X] \to K'[X], \quad Q(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \mapsto Q^\sigma(X) = \sum_{j=0}^{n} \sigma(b_j) X^j$$

est un isomorphisme d'anneaux. On en déduit

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\sigma} : & K(\beta) & \to & K'(\beta') \\ & \uparrow & & \uparrow \\ \overline{\varphi} : & K[X]/(P) & \to & K'[X]/(P^\sigma), \\ & Q + (P) & \mapsto & Q^\sigma + (P^\sigma) \end{array}$$

Cela montre à la fois que P^σ est un élément irréductible de $K'[X]$, et que si $\theta = Q(\beta) \in K(\beta)$, son image par $\tilde{\sigma}$ est bien définie par l'égalité $\tilde{\sigma}(\theta) = Q^\sigma(\beta')$. □

THÉORÈME 12.4.7 (DE L'UNICITÉ) *Soient $\sigma : K \xrightarrow{\sim} K'$ un isomorphisme de corps, $P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ un polynôme de $K[X]$, et notons $P^\sigma = \sum_{j=0}^{n} \sigma(a_j) X^j \in K'[X]$.*

A P, on associe une extension E de K, dans laquelle il se factorise en produit de termes du premier degré, $P(X) = a(X - \alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X - \alpha_n)$, et on note $B = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ le corps de décomposition de P dans E.

On définit de même E' et B' pour le polynôme P^σ. Il existe alors un isomorphisme de corps

$$\tau : B \xrightarrow{\sim} B',$$

dont la restriction à K est égale à σ.

PREUVE. Le polynôme P s'écrit $P(X) = a(X - \alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X - \alpha_n)$, les α_i étant des éléments de E. Raisonnons par récurrence sur le nombre N d'éléments α_i, qui n'appartiennent pas à K.

Si $N = 0$, tous les α_i appartiennent à K, donc $B = K$ est isomorphe à $B' = K'$, et $\tau = \sigma$.

Pour $N \geq 1$, supposons que α_1 n'appartienne pas à K.
C'est un élément algébrique sur K, de polynôme minimal S, et il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = SQ$.
Dans $E'[X]$, on a les égalités

$$P^\sigma = S^\sigma Q^\sigma = a'(X - \alpha'_1)\cdot\ldots\cdot(X - \alpha'_n).$$

Si β est une racine de S^σ dans une extension de E', il vient

$$P^\sigma(\beta) = 0 = a'(\beta - \alpha'_1)\cdot\ldots\cdot(\beta - \alpha'_n),$$

donc il existe un indice i, qu'on peut supposer égal à 1, tel que $\beta = \alpha'_1 \in E'$. On utilise le théorème 12.4.6 pour le polynôme irréductible S : il existe un isomorphisme de corps

$$\tau : K(\alpha_1) \xrightarrow{\sim} K'(\alpha'_1),$$

qui prolonge σ.

On considère maintenant P comme un polynôme à coefficients dans $L = K(\alpha_1)$.

Le nombre de racines de P qui n'appartiennent pas à L est strictement inférieur à N, et l'hypothèse de récurrence nous donne l'existence d'un prolongement de τ,

$$\pi : L(\alpha_2, \cdots, \alpha_n) \xrightarrow{\sim} L'(\alpha'_2, \cdots, \alpha'_n),$$

avec $L' = K'(\alpha'_1)$. On termine en remarquant que $L(\alpha_2, \cdots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, et que $L'(\alpha'_2, \cdots, \alpha'_n) = K'(\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_n)$. □

Corollaire 12.4.8 (de l'unicité) *Soient K un corps, P un polynôme de $K[X]$, et L, L' deux corps de décomposition de P sur K. Alors il existe un isomorphisme de corps de L sur L' dont la restriction à K est l'identité.*

Exercices

12.1 Soit $K \subset E$ une extension de corps. Montrer que $\overline{K_E} = \{x \in E, x \text{ est algébrique sur } K\}$ est un sous-corps de E.

12.2 Montrer qu'il existe des polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de tout degré $n \geq 1$, par exemple $X^n - p$, où p est un nombre premier.

13 Structure des corps finis

13.1 Sous-groupes finis de K^*

Dans ce paragraphe on ne suppose pas le corps fini.

Exposant d'un groupe abélien fini

Soit G un groupe abélien fini. On note $\omega(G)$, et on appelle exposant de G le ppcm des ordres des éléments de G. C'est le plus petit entier strictement positif tel que $x^{\omega(G)} = e$ pour tout élément $x \in G$. Alors par définition du ppcm, et par le théorème de Lagrange, $\omega(G)$ divise $|G|$.

Soient K un corps, et G un sous-groupe fini de $K^\times$. Alors tout $x \in G$ est racine du polynôme $X^{\omega(G)} - 1$, et ce polynôme a au plus $\omega(G)$ racines dans le corps K. Par suite $\omega(G) \geq |G|$, donc $\omega(G) = |G|$.

Lemme 8.0.5. *Soit G un groupe. On suppose que $a, b \in G$ sont deux éléments tels que $ab = ba$, et qui sont d'ordre r et s, respectivement, où r et s sont premiers entre eux. Alors ab est d'ordre rs.*

C'est un fait général sur les éléments d'un groupe qui commutent entre eux.

PREUVE (rappel). Puisque $(ab)^{rs} = a^{rs}b^{rs} = 1$, l'ordre de ab est un diviseur de rs, il s'écrit $r_1 s_1$ où $r_1 \mid r$ et $s_1 \mid s$. Donc

$$a^{r_1 s_1} b^{r_1 s_1} = (ab)^{r_1 s_1} = 1.$$

On élève à la puissance r_2, où $r_1 r_2 = r$. Alors

$$a^{r_1 r_2 s_1} b^{r_1 r_2 s_1} = 1,$$

donc, puisque $a^{r_1 r_2 s_1} = (a^{r_1 r_2})^{s_1} = 1$,

$$b^{r_1 r_2 s_1} = 1.$$

Ceci implique que $s \mid r_1 r_2 s_1$, et, car $\text{pgcd}(s, r_1 r_2) = 1$, il vient que $s = s_1$. Un argument similaire montre que $r = r_1$, donc l'ordre de ab est rs.

LEMME 13.1.1 *Dans un groupe abélien, l'ensemble des ordres des éléments est stable par ppcm.*

PREUVE. Soient en effet x un élément d'ordre r et y un élément d'ordre s. Il s'agit de construire un élément d'ordre $\text{ppcm}(r, s)$, soit m. Or on peut écrire $m = r's'$, où r' divise r, s' divise s, et les deux entiers sont premiers entre eux, puisque $\text{ppcm}(r, s)\text{pgcd}(r, s) = rs$. Par exemple, si on a, pour des p_i premiers deux à deux distincts,

$$r = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \text{ et } s = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}, \text{ on pose } r' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \geq \beta_i}}^{k} p_i^{\alpha_i},\ s' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < \beta_i}}^{k} p_i^{\beta_i}$$

(voir la remarque ci-dessous pour une autre construction). De là on a $x^{r/r'}$ d'ordre r', et $y^{s/s'}$ d'ordre s', on peut donc appliquer le lemme 8.0.5 et conclure.

REMARQUE. Voici une autre construction pour le lemme 13.1.1 : notons $d = \text{pgcd}(r, s)$. Il s'agit de construire un diviseur s' de s qui soit premier à r/d. Pour ce faire, on part de $s' = s$ et on remplace s' par $s'/\text{pgcd}(s', r/d)$ tant que ce pgcd $\neq 1$:

```
> restart;r:=120; s:=180;sprime:=s;
> i:=0;d:=gcd (r,s);
> while (gcd(sprime, r/d)<>1) do
> gcd(sprime, d);
> sprime:=(sprime/gcd(sprime, r/d));
> printf("i=%d,lcm=%d,sprime=%d, rprime=%d\n"
> ,i,
> lcm(r,s),sprime, lcm(r,s)/sprime);
> i:=i+1;od;
```

$$i := 0$$
$$sprime := 90$$

```
i=0,lcm=360,sprime=90, rprime=4
```

$$i := 1$$
$$sprime := 45$$

```
i=1,lcm=360,sprime=45, rprime=8
```

$$i := 2$$

PROPOSITION 13.1.2 *Dans un groupe abélien fini G, il existe un élément d'ordre $\omega(G)$.*

Cyclicité des sous–groupes finis de $K^\times$

THÉORÈME 13.1.3 *Soit K un corps. Tout sous-groupe fini G de $K^\times$ est cyclique.*

PREUVE. Par définition du ppcm, et par le théorème de Lagrange, l'exposant $\omega(G)$ divise $|G|$, et tous les $x \in G$ sont solution de $x^{\omega(G)} = 1$, mais le polynôme $X^{\omega(G)} - 1$ possède au plus $\omega(G)$ racines dans le corps K. Donc, $\omega(G) = |G|$, et on conclut avec la proposition 13.1.2.

13.2 Morphisme de Frobenius, structure des corps finis

Pour un plus large développement sur les corps finis le lecteur est renvoyé aux textes d'E. Peyre [Pey], ainsi que Lidl-Niederreiter, [Li-Ni].

Jusqu'ici nous avons rencontré l'exemple fondamental des corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier), quotients de $\mathbb{Z}$ par un idéal maximal. Il s'agit maintenant de décrire tous les corps finis.

PROPOSITION-DÉFINITION 13.2.1 *Soit A un anneau commutatif de caractéristique p un nombre premier. L'application*

$$\mathrm{Fr}_p : x \mapsto x^p, x \in A$$

est un morphisme d'anneau appelé morphisme de Frobenius. Plus généralement, si A est un anneau commutatif de caractéristique p premier et si q est une puissance de p, on note $\mathrm{Fr}_q : x \mapsto x^q$.

PREUVE. Le point à montrer est l'additivité. Or si $x, y \in A$ on développe $(x+y)^p$ par la formule du binôme, et on conclut par le fait que si $1 \leq i \leq p-1$, p divise l'entier C_p^i (voir ...I ?).

THÉORÈME 13.2.2 *Soit $\mathcal{K}$ un corps fini. Alors $\mathcal{K}$ est de caractéristique p un nombre premier, $\mathcal{K}$ est de cardinal $q = p^d$, avec $d = [\mathcal{K} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$, et Fr_p est un automorphisme du corps $\mathcal{K}$.*

Inversement, si p est premier et d est un entier strictement positif, il existe à isomorphisme près un unique corps à $q = p^d$ éléments, qui est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note ce corps $\mathbb{F}_q$. De plus, le groupe $(\mathbb{F}_q, +)$ est isomorphe au groupe $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d, +)$ et le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^*$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ (groupe cyclique d'ordre $q-1$).

PREUVE. La première assertion et la structure de groupe additif de $\mathbb{F}_q$ résultent de 11.2.2, du fait que $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel sur son sous-corps premier, et aussi de ce que Fr_p est un morphisme injectif $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

Vérifions ensuite qu'un corps $\mathcal{K}$ à q éléments est un corps de décomposition pour le polynôme $X^q - X$. Comme $\mathcal{K}$ a q éléments, $\mathcal{K}^*$ est un groupe d'ordre $q-1$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathcal{K}^*,\ x^{q-1} = 1.$$

Autrement dit les q éléments de $\mathcal{K}$ sont racines de $X^q - X$. Du fait du degré, on obtient

$$X^q - X = \prod_{\alpha \in \mathcal{K}} (X - \alpha).$$

En particulier, $\mathcal{K}$ est un corps de décomposition pour le polynôme $X^q - X$.

Soit inversement $\mathcal{K}$ un corps de décomposition pour le polynôme $X^q - X$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier et q est une puissance de p. Comme Fr_q est un morphisme de corps de $\mathcal{K}$, l'ensemble de ses points fixes les racines de $X^q - X$ est un sous-corps de $\mathcal{K}$. Comme $\mathcal{K}$ est engendré par ces racines sur $\mathbb{F}_p$, $\mathcal{K}$ est l'ensemble des racines de $P(X) = X^q - X$. Comme $P' = -1$, toutes les racines de P sont simples (voir ... ?), P a donc ses q racines distinctes dans $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ a exactement q éléments. D'après 12.4.8 ceci établit l'assertion d'existence et unicité à isomorphisme près du corps $\mathbb{F}_q$.

Enfin la cyclicité du groupe ${\mathbb{F}_q}^*$ est un cas particulier du théorème 13.1.3. □

THÉORÈME 13.2.3 *Soit $q = p^n$ où p est premier. Tout sous-corps du corps $\mathbb{F}_q$ est de cardinal p^m, où m est un diviseur de n. Et pour tout diviseur m de n, $\mathbb{F}_q$ possède un unique sous-corps de cardinal p^m, qui est l'ensemble des racines du polynôme $X^{p^m} - X$ dans $\mathbb{F}_q$.*

PREUVE. Si $\mathcal{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{F}_q$, alors il contient le sous-corps premier F_p, donc c'en est une extension finie et $\mathbb{F}_q$ est une extension finie de $\mathcal{K}$. De là $\mathcal{K}$ a pour cardinal p^m, et le cardinal de $\mathbb{F}_q$ est une puissance de $(p^m)^d$ de celui de $\mathcal{K}$. Ainsi $n = md$. Inversement, si m divise n, alors $p^m - 1$ divise $p^n - 1$, donc le polynôme $X^{p^m-1} - 1$ divise le polynôme $X^{p^n-1} - 1$, donc le polynôme $X^{p^m} - X$ divise $X^{p^n} - X$, ce qui entraîne que $X^{p^m} - X$ a p^m racines distinctes dans $\mathbb{F}_q$. Ces racines forment l'unique sous-corps de cardinal p^m de $\mathbb{F}_q$. □

Dans la pratique, pour pouvoir faire les calculs, le corps $\mathbb{F}_{p^n}$ $(n > 1)$ sera construit comme anneau quotient de type $\mathbb{F}_p[X]/(Q)$, en choisissant un polynôme irréductible Q de degré n (voir 13.3.1).

13.3 Polynômes sur les corps finis. Nombre de polynômes irréductibles de degré donné.

THÉORÈME 13.3.1 *Soient p un nombre premier et q une puissance de p. Pour tout entier $m \geq 1$, il existe $\theta \in \mathbb{F}_{q^m}$ tel que $\mathbb{F}_{q^m} = \mathbb{F}_q[\theta]$ et il existe P polynôme irréductible de degré m sur $\mathbb{F}_q$.*

PREUVE. Soient θ un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_{q^m}^*$, et P son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_q$. Alors on a $\mathbb{F}_{q^m} = \mathbb{F}_q[\theta]$ et P est un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ dont $\mathbb{F}_{q^m}$ est un corps de rupture. Autrement dit, on a un isomorphisme

$$\mathbb{F}_q[X]/(P) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^m}$$

qui envoie la classe de X sur θ. En particulier, on a $\deg P = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^m}) = m$.

REMARQUE 13.3.2 *Si on a un polynôme P irréductible de degré m sur $\mathbb{F}_q$ et si α est une racine de P dans $\mathbb{F}_{q^m}$, la famille $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{m-1}\}$ est une base du $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $\mathbb{F}_{q^m}$.*

PROPOSITION 13.3.3 *Soient P un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ et α une racine de P dans une extension de $\mathbb{F}_q$. Alors, pour tout polynôme Q sur $\mathbb{F}_q$, $Q(\alpha) = 0$ si et seulement si P divise Q.*

En effet, P est alors le polynôme minimal de α sur $\mathbb{F}_q$, voir prop :alg.

LEMME 13.3.4 *Soit P un polynôme irréductible de degré m sur $\mathbb{F}_q$. Alors P divise $X^{q^n} - X$ si et seulement si m divise n.*

PREUVE. Le corps de rupture de P sur $\mathbb{F}_q$ est de cardinal q^m, donc tout élément y vérifie $x^{q^m} = x$, donc aussi en itérant si m divise n, $x^{q^n} = x$. On conclut que P divise $X^{q^n} - X$ en appliquant la proposition précédente avec $Q = X^{q^n} - X$. Inversement si P divise $X^{q^n} - X$ alors le corps $\mathbb{F}_{q^n}$ contient un corps de rupture de P, de cardinal q^m, donc par le théorème 13.2.3 m divise n.

THÉORÈME 13.3.5 *Soit P un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ de degré m. Alors P est scindé sur le corps $\mathbb{F}_{q^m}$ et a toutes ses racines simples. Si α est l'une d'elles, ces m racines sont $\alpha, \alpha^q, \cdots, \alpha^{q^{m-1}}$. En particulier si $P \neq X$ toutes les racines de P ont le même ordre multiplicatif dans $\mathbb{F}_{q^m}^*$.*

PREUVE. On a vu que le corps de rupture de P, $\mathbb{F}_q[X]/(P)$, de cardinal q^m, est formé de l'ensemble des racines du polynôme $X^{q^m} - X$. Par suite $X^{q^m} - X$ s'annule en une racine de P, donc par la proposition il est divisible par P sur $\mathbb{F}_q$ et à fortiori sur $\mathbb{F}_{q^m}$. Ainsi puisque $X^{q^m} - X$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_{q^m}$, il en est de même pour P.

Ensuite, on écrit $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{F}_q$. Si α est une racine de P, alors

$$\mathrm{Fr}_q(P(\alpha)) = \sum_{i=0}^m \mathrm{Fr}_q(a_i)\mathrm{Fr}_q(\alpha)^i = P(\mathrm{Fr}_q(\alpha)) = 0$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que $\mathrm{Fr}_q(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_q$. Par conséquent $\alpha, \alpha^q, \cdots, \alpha^{q^{m-1}}$ sont des racines de P. Montrons par l'absurde que ces m racines sont distinctes. En effet, dans le cas contraire, il existe i, j avec $0 \leq i < j \leq m-1$ tels que $\alpha^{q^i} = \alpha^{q^j}$ et donc $\alpha^{q^j - q^i} = 1$. Par conséquent

$$\mathrm{ord}(\alpha) | q^j - q^i = q^i(q^{j-i} - 1).$$

Mais comme $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}^*$, l'ordre de α est premier à q donc, par le lemme de Gauss, $\mathrm{ord}(\alpha) | q^{i-j} - 1$, et $\alpha^{q^{j-i}} = \alpha$, donc α appartient au corps $\mathbb{F}_{q^{j-i}}$, ce qui est en contradiction avec le fait que $[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = \deg P = m$. Ainsi on a

$$P(X) = (X - \alpha)(X - \alpha^q) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha^{q^{m-1}}).$$

La dernière assertion résulte de ce que Fr_q est un automorphisme du corps $\mathbb{F}_{q^m}$, donc il conserve l'ordre multiplicatif des éléments.

COROLLAIRE 13.3.6 *Le corps de décomposition de tout polynôme de degré m irréductible sur $\mathbb{F}_q$ est $\mathbb{F}_{q^m}$.*

Tout élément $t \in \mathbb{F}_{q^n}$ est racine d'un unique polynôme irréductible unitaire $P = P_t$ de $\mathbb{F}_q[X]$ de degré d divisant n, ainsi

$$X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{\substack{P \text{ unitaire} \\ \text{irréductible sur } \mathbb{F}_q \\ \deg P = d}} P(X)$$

(dans cette formule comme dans la suite du paragraphe, on convient que la notation $d|n$ signifie que d est un diviseur POSITIF de n).

PREUVE. Puisque $\mathbb{F}_q[X]$ est factoriel, on applique le lemme 13.3.4 en utilisant que $X^{q^n} - X$ est premier avec sa dérivée, donc sa factorisation est sans multiplicité.

Soit $\nu_n(q)$ le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_q$. Alors l'identité ci–dessus montre que

$$q^n = \sum_{d|n} d\nu_d(q),$$

et pour déduire $\nu_d(q)$ de cette formule on utilise la formule d'inversion de Möbius que nous rappelons maintenant.

Formule d'inversion de Möbius

DÉFINITION 13.3.7 *On appelle fonction de Möbius la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier.} \end{cases}$$

On voit que $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$, si m et n sont premiers entre eux.

REMARQUE. On peut aussi définir la fonction de Möbius $\mu(n)$ par l'égalité formelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - p^{-s}) = \zeta(s)^{-1}.$$

PROPOSITION 13.3.8 (FORMULE D'INVERSION) *Soient (a_n), (b_n) $(n \geq 1)$ deux suites d'entiers liées par*

$$b_n = \sum_{d|n} a_d \quad (n \geq 1).$$

Alors on a

$$a_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) b_d \quad (n \geq 1).$$

En effet on a

$$\sum_{d|n} \mu(n/d) b_d = \sum_{d|n} \mu(n/d) \sum_{d'|d} a_{d'} = \sum_{d'|n} a_{d'} \sum_{\delta|(n/d')} \mu(\delta),$$

où $\delta = n/d$ divise n/d'. Pour $m > 1$, si s désigne le nombre de diviseurs premiers distincts positifs de m, on a

$$\sum_{\delta|m} \mu(\delta) = \sum_{t=0}^{s} C_t^s (-1)^t = (1-1)^s = 0.$$

REMARQUE. La formule d'inversion $a_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) b_d$ résulte aussi facilement de l'identité formelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \zeta(s), \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \zeta(s)^{-1}.$$

Une application directe de la formule d'inversion nous permet d'énoncer :

THÉORÈME 13.3.9 *Pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ et tout entier $n \geq 1$ on a :*

(i) $X^{q^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{\substack{P \text{ unitaire} \\ \text{irréductible sur } \mathbb{F}_q \\ \deg P = d}} P(X),$

(ii) $q^n = \sum_{d|n} d\nu_d(q).$

(iii) Le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré n sur $\mathbb{F}_q$ est

$$\nu_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(n/d) q^d.$$

REMARQUE. On voit facilement par l'absurde que l'expression à droite est non nulle, car il y a unicité de l'écriture (éventuelle) d'un entier comme somme de puissances différentes de q. Comme $\nu_n \geq 0$, on obtient $\nu_n > 0$; on a ainsi une nouvelle preuve du fait qu'il existe un polynôme irréductible de degré n sur $\mathbb{F}_q$ (théorème 13.3.1).

EXEMPLE. Soit $q = 3$, $n = 2$, alors $\nu_2(3) = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = 3$.

```
> Factor(X^9-X) mod 3;
```

$$X\,(X+2)\,(X^2+X+2)\,(X^2+2\,X+2)\,(X+1)\,(X^2+1)$$

Ordre d'un polynôme, polynômes primitifs

La notion d'ordre est présentée ici comme complément, les démonstrations sont laissées en exercice (voir [Li-Ni]).

DÉFINITION 13.3.10 *Soit P un polynôme non nul sur $\mathbb{F}_q$. Si $P(0) \neq 0$, l'ordre de P est le plus petit entier strictement positif e tel que P divise $X^e - 1$. Si P(0)=0, alors il existe Q dans $\mathbb{F}_q[X]$ non nul en 0 et h entier positif tels que $P = X^h Q$, et dans ce cas on pose* $\mathrm{ord}(P) = \mathrm{ord}(Q)$.

EXERCICE. Montrer l'existence d'un tel nombre e, avec $e \leq q^m - 1$ si $m = \deg P \geq 1$ [Indication : raisonner dans l'anneau fini $\mathbb{F}_q[X]/(P)$].

REMARQUE 13.3.11 *Si P est irréductible de degré m sur $\mathbb{F}_q$, alors l'ordre e de P divise $q^m - 1$. De plus d'après le lemme 13.3.4 si $e > 1$ (donc $P(X) \neq X$), m est minimal > 0 pour cette propriété, donc le degré m de P est l'ordre multiplicatif de q modulo e.*

THÉORÈME 13.3.12 *Soient $m \geq 1$ et $e > 1$. Le nombre de polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{F}_q$ de degré m et d'ordre e est*

$$N_{q,m,e} = \begin{cases} \varphi(e)/m & , \text{si } m \text{ est l'ordre multiplicatif de } q \bmod e \\ 0 & , \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\varphi(e)$ est l'indicateur d'Euler de e.

PREUVE (en exercice).

EXEMPLE. On considère le groupe cyclique $\mathbb{F}_{2^{11}}^*$ d'ordre $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_{2^{11}}^*$ un élément d'ordre 23. La factorisation de $X^{23} - 1$ en irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ est :

$$X^{23} - 1 = X^{23} + 1 = (X+1)P_0(X)P_1(X) =$$
$$(X+1)\left(X^{11} + X^{10} + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1\right)\left(X^{11} + X^9 + X^7 + X^6 + X^5 + X + 1\right)$$

où

$$P_0(X) = X^{11} + X^{10} + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1 = \prod_{i \in I}(X - \alpha^i), I = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$$
$$P_1(X) = X^{11} + X^9 + X^7 + X^6 + X^5 + X + 1 = \prod_{j \in J}(X - \alpha^j), J = \{5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22\}.$$

(Notons que toute racine $\neq 1$ de $X^{23} - 1$ est d'ordre 23. Pour écrire les racines de P_0 et P_1 ci-dessus, on a noté α une racine de P_0 et appliqué le théorème 13.3.5.)

Pour $e = 23$ et $q = 2$, on a bien $\mathrm{ord}(2 \bmod 23) = 11$: les polynômes irréductibles d'ordre 23 sur $\mathbb{F}_2$ sont de degré 11, il y en a $\varphi(23)/11 = 2$.

REMARQUE. L'ensemble

$$I = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$$

coïncide avec l'ensemble des résidus quadratiques modulo 23, et l'ensemble complémentaire

$$J = \{5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22\}$$

coïncide avec l'ensemble des non-résidus quadratiques modulo 23.

Le morphisme de Frobenius $\alpha^k \mapsto \alpha^{2k}$ laisse bien sûr les ensembles d'exposants I et J stables, et en effet on a $\left(\frac{2}{23}\right) = 1$ (voir la loi complémentaire de la loi de réciprocité quadratique 9.4.4). L'application $\alpha^k \mapsto \alpha^{-k}$ échange les ensembles I et J puisque $\left(\frac{-1}{23}\right) = -1$ par le critère d'Euler 9.2.1 ; en particulier P_1 est le polynôme minimal de α^{-1} sur $\mathbb{F}_2$.

DÉFINITION 13.3.13 *Un polynôme P de degré m sur $\mathbb{F}_q$ est dit primitif sur $\mathbb{F}_q$ s'il est le polynôme minimal sur $\mathbb{F}_q$ d'une racine primitive de $\mathbb{F}_{q^m}$ (un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_{q^m}^*$).*

Une étude de l'ordre des produits de polynômes fournit la caractérisation suivante, où on voit qu'à degré m fixé ce sont les polynômes primitifs qui atteignent l'ordre maximum $q^m - 1$ (voir l'exercice 13.3.10) :

THÉORÈME 13.3.14 *Un polynôme P de degré m est primitif sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si P est unitaire, non nul en 0 et d'ordre $q^m - 1$.*

Résumé des propriétés des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$

THÉORÈME 13.3.15 *Soit α un élément de $\mathbb{F}_{q^m}$, une extension de $\mathbb{F}_q$. Soient d le degré, et P le polynôme minimal de α sur $\mathbb{F}_q$. Alors,*

(i) P est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ et son degré d divise m.

(ii) un polynôme Q sur $\mathbb{F}_q$ s'annule α si et seulement si P divise Q.

(iii) tout polynôme irréductible unitaire sur $\mathbb{F}_q$ nul en α est égal à P.

(iv) P divise $X^{q^d} - X$ et $X^{q^m} - X$.

(v) Les racines de P sont $\alpha, \alpha^q, \cdots, \alpha^{q^{d-1}}$ et P est le polynôme minimal sur $\mathbb{F}_q$ de toutes ces racines. Si de plus $\alpha \neq 0$, on a :

(vi) l'ordre de P est égal à celui de α dans le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{q^m}^*$.

(vii) P est un polynôme primitif sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si α est d'ordre $q^d - 1$ dans $\mathbb{F}_{q^m}^*$.

13.4 Construction d'isomorphismes à partir des polynômes irréductibles

Les calculs dans un corps fini d'ordre non premier $q = p^d$ passent par le choix d'un polynôme irréductible P sur $\mathbb{F}_p$ de sorte que $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[T]/(P)$. Il est important de savoir transposer ces calculs dans le corps construit en choisissant un autre polynôme irréductible Q. Il s'agit donc d'expliciter un isomorphisme de corps entre $\mathbb{F}_p[T]/(P)$ et $\mathbb{F}_p[T]/(Q)$. On commence par un exemple de calcul en Maple.

```
> Factor(T^27-T) mod 3;
```

$$T\,(T+2)\,(T+1)\,(T^3+2\,T+2)\,(T^3+T^2+2\,T+1)\,(T^3+T^2+T+2)\,(T^3+2\,T+1)$$
$$(T^3+T^2+2)\,(T^3+2\,T^2+1)\,(T^3+2\,T^2+T+1)\,(T^3+2\,T^2+2\,T+2)$$

```
> P:=T^3+2*T^2+T+1;
```

$$P := T^3+2\,T^2+T+1$$

```
> alias(alpha = RootOf(P)) ;
```

$$\alpha$$

```
> Q:=T^3+T^2+2*T+1;
```

$$Q := T^3+T^2+2\,T+1$$

```
> Factor(Q, alpha) mod 3;
```

$$(T+2\,\alpha^2+1)\,(T+\alpha+2)\,(T+\alpha^2+2\,\alpha+1)$$

```
> Factor(T^27-T, alpha) mod 3;
```

$$T\,(T+2\,\alpha^2+1)\,(T+2\,\alpha^2)\,(T+\alpha^2+2)\,(T+2\,\alpha^2+\alpha)\,(T+2)\,(T+\alpha^2)\,(T+1)$$
$$(T+\alpha^2+2\,\alpha+2)\,(T+2\,\alpha^2+2)\,(T+2\,\alpha)\,(T+\alpha^2+2\,\alpha)\,(T+2\,\alpha+1)\,(T+\alpha)$$
$$(T+2\,\alpha^2+2\,\alpha+2)\,(T+\alpha+2)\,(T+\alpha^2+\alpha+1)\,(T+2\,\alpha^2+\alpha+2)$$
$$(T+\alpha^2+2\,\alpha+1)\,(T+2\,\alpha+2)\,(T+\alpha^2+\alpha)\,(T+\alpha+1)\,(T+\alpha^2+1)$$
$$(T+2\,\alpha^2+2\,\alpha)\,(T+2\,\alpha^2+2\,\alpha+1)\,(T+2\,\alpha^2+\alpha+1)\,(T+\alpha^2+\alpha+2)$$

Les polynômes $P(T) = T^3 + 2T^2 + T + 1$ et $Q(T) = T^3 + T^2 + 2T + 1$ sont irréductibles sur $\mathbb{F}_3$, car sans racines.

EXEMPLE 13.4.1 *Construire un isomorphisme entre les corps $\mathbb{F}_3[T]/(P)$ et $\mathbb{F}_3[T]/(Q)$.*

Soit $\alpha = T \bmod P$, c'est une racine de P dans $\mathbb{F}_3[T]/(P)$.

On utilise le fait que Q a aussi une racine dans $\mathbb{F}_3[T]/(P)$, par exemple $\beta = \alpha^2 - 1$ (voir le calcul en Maple ci-dessus). On obtient un isomorphisme $\sigma : \mathbb{F}_3[T]/(Q) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_3[T]/(P)$ en posant $\sigma(T \bmod Q) = \beta = \alpha^2 - 1$.

Pour trouver β "à la main", on peut le chercher sous la forme $c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2$ avec $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{F}_3$ (faire l'exercice).

13.5 Théorème de la base normale

EXEMPLE 13.5.1 *Considérons le polynôme $P(X) = X^4 + X + 1$. Il est primitif sur $\mathbb{F}_2$ et toute racine α de P dans son corps de décomposition $\mathbb{F}_{16}$ est un élément primitif de $\mathbb{F}_{16}$:*

$$\alpha^4 = 1 + \alpha, \alpha^5 = \alpha + \alpha^2, \alpha^6 = \alpha^2 + \alpha^3, \alpha^7 = 1 + \alpha + \alpha^3, \alpha^8 = 1 + \alpha^2,$$
$$\alpha^9 = \alpha + \alpha^3, \alpha^{10} = 1 + \alpha + \alpha^2, \alpha^{11} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3, \alpha^{12} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3,$$
$$\alpha^{13} = 1 + \alpha^2 + \alpha^3, \alpha^{14} = 1 + \alpha^3, \alpha^{15} = 1.$$

On a une base $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ de $\mathbb{F}_{16}$ sur $\mathbb{F}_2$.

Les éléments

$$\alpha, \mathrm{Fr}_2(\alpha) = \alpha^2, \mathrm{Fr}_2^2(\alpha) = \alpha^4 = 1 + \alpha, \mathrm{Fr}_2^3(\alpha) = \alpha^8 = 1 + \alpha^2$$

sont toutes les racines de $P(X) = X^4 + X + 1$. On observe que ces éléments sont linéairement dépendants : $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8\}$ n'est pas une base de $\mathbb{F}_{16}$ sur $\mathbb{F}_2$.

On a cependant le résultat suivant :

THÉORÈME 13.5.2 (DE LA BASE NORMALE) *Soient p un nombre premier et $q = p^d$. Alors il existe un élément θ de $\mathbb{F}_q$ pour lequel $(\theta, \mathrm{Fr}_p(\theta), \cdots, \mathrm{Fr}_{p^{d-1}}(\theta))$ est une base de $\mathbb{F}_q$ sur $\mathbb{F}_p$.*

PREUVE. On considère le morphisme d'anneaux

$$\varphi : \mathbb{F}_p[T] \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q),\ \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{Fr}_p^i$$

et on pose pour tout P de $\mathbb{F}_p[T]$ et tout x de $\mathbb{F}_q$, $P \cdot x = \varphi(P)(x)$. En particulier, $T \cdot x = \mathrm{Fr}_p(x) = x^p$. On note $\mathfrak{a}$ le noyau de φ. Comme tout x de $\mathbb{F}_q$ est solution de $X^q - X = 0$, on a que $\mathrm{Fr}_q = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_q}$, et donc $T^d - 1$ appartient au noyau $\mathfrak{a}$. Inversement, si $P(T) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i$ appartient à ce noyau avec $m < d$, on a la relation

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \mathrm{Fr}_p^i = 0,$$

donc le polynôme $\sum_{i=0}^{m} a_i X^{p^i}$ s'annule sur tout $\mathbb{F}_q$. Or son degré est strictement inférieur à p^d, donc c'est le polynôme nul, et on a $P = 0$. Ceci prouve que $\mathfrak{a} = (T^d - 1)$ (autrement dit $T^d - 1$ est le polynôme minimal de Fr_p sur $\mathbb{F}_q$).

La factorisation de $\mu(T) = T^d - 1$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_p[T]$ donne une décomposition de l'espace $\mathbb{F}_q$ en somme directe de $\mathbb{F}_p$-sous-espaces stables par Fr_p :

$$\mu = \prod_{i=1}^{s} P_i^{r_i} \text{ et } \mathbb{F}_q = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}(P_i(\mathrm{Fr}_p)^{r_i}).$$

Chaque $E_i = \mathrm{Ker}(P_i(\mathrm{Fr}_p)^{r_i})$ est un $\mathbb{F}_p$-sous-espace stable par Fr_p, et par l'indépendance linéaire des Fr_p^i établie ci-dessus, il contient un élément α_i tel que $\left(\frac{\mu}{P_i}\right)(\mathrm{Fr}_p)(\alpha_i)$ soit non nul. Pour un tel α_i, on pose $\beta_i = \left(\frac{\mu}{P_i^{r_i}}\right)(\mathrm{Fr}_p)(\alpha_i)$; alors la famille

$$\beta_i, P_i(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i), \cdots, P_i^{r_i-1}(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i),$$

est libre, en effet, pour tous $a_0, a_1, \cdots, a_{r_i-1}$ dans $\mathbb{F}_p$ on a

$$\begin{aligned}
&a_0\beta_i + a_1 P_i(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) + \cdots + a_{r_i-1}P_i^{r_i-1}(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) = 0\\
&\text{donc } a_0 P_i^{r_i-1}(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) + a_1 P_i^{r_i}(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) + \cdots + a_{r_i-1}P_i^{2r_i-1}(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) = 0.\\
&\text{De là } a_0 = 0 \text{ puis } a_1 = 0 \cdots \text{ puis } a_{r_i-1} = 0,
\end{aligned}$$

puisque $P_i^{r_i}(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) = \mu(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) = 0$. Ceci dit que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{F}_p[T]$ tels que $Q(\mathrm{Fr}_p)(\beta_i) = 0$, est l'idéal de $\mathbb{F}_p[T]$ engendré par $P_i^{r_i}$.

Considérons l'élément $\theta = \beta_1 + \cdots + \beta_s$ de $\mathbb{F}_q$. Si des éléments (a_k) de $\mathbb{F}_p$ vérifient $\sum_{k=0}^{d-1} a_k \mathrm{Fr}_p^k(\theta) = 0$, alors le polynôme $\sum_{k=0}^{d-1} a_k T^k \in \mathbb{F}_p[T]$ est divisible par $P_i^{r_i}$ pour tout i tel que $1 \le i \le s$, donc par μ, et donc les a_k sont tous nuls. Cela signifie que l'élément θ engendre bien une base normale de $\mathbb{F}_q$ sur $\mathbb{F}_p$.

Remarque 13.5.3 *Pour les corps finis de caractéristique 2, les bases normales permettent de calculer les carrés et donc les puissances. En effet, si $(\theta, \theta^2, \cdots, \theta^{2^{d-1}})$ est une base de $\mathbb{F}_{2^d}$ sur $\mathbb{F}_2$, alors pour tout $(a_0, a_1, \cdots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_2^d$ on a*

$$\begin{aligned}
(a_0\theta + a_1\theta^2 + \cdots + a_{d-1}\theta^{2^{d-1}})^2 =& a_0^2\theta^2 + a_1^2\theta^4 + \cdots + a_{d-1}^2\theta^{2^d} =\\
& a_{d-1}\theta + a_0\theta^2 + \cdots + a_{d-2}\theta^{2^{d-1}},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en notant que $\theta^{2^d} = \theta$.

Autrement dit le carré s'obtient par permutation circulaire des coordonnées. Pour un corps fini arbitraire, on a une expression similaire pour le calcul du Frobenius.

Exercices

13.1 Déterminer l'exposant des groupes abéliens

$$(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})^*, (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^*, (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^*.$$

Trouver pour chacun un élément d'ordre l'exposant.

13.2 En considérant l'ordre des éléments dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. En déduire une autre preuve du fait que tout sous-groupe d'ordre n de K^*, où K est un corps, est cyclique.

13.3 Soit K un corps à q éléments, $q \ge 4$. Montrer que $\sum_{x\in K} x^2 = 0$. Plus généralement, calculer, pour $s \ge 1$, la somme $\sum_{x\in K} x^s$.

13.4 Soit G l'ensemble de toutes les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$. Montrer que G est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^\times$, non monogène. Pour tout $n \ge 1$, montrer que G possède un unique sous-groupe cyclique d'ordre n.

13.5 Soit $P \in \mathbb{F}_{q^m}[X]$. Montrer que $P \in \mathbb{F}_q[X]$ si et seulement si $P(X)^q = P(X^q)$.

13.6 Donner une construction puis écrire les tables d'addition et de multiplication des corps $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$ et $\mathbb{F}_9$.

13.7 Ecrire la factorisation de $X^9 - X$ (resp. $X^8 - X$) en irréductibles sur $\mathbb{F}_3$ (resp. sur $\mathbb{F}_2$). Quels en sont les facteurs primitifs ?

13.8 Soit p premier. Calculer "directement" le nombre de polynômes irréductibles de degré 5 sur $\mathbb{F}_p$.

13.9 Soit P polynôme de degré m sur le corps $\mathbb{F}_q$. Démontrer que P est irréductible si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(i) P divise $X^{q^m} - X$,
(ii) pour tout diviseur premier l de m, P est premier avec $X^{q^{m/l}} - X$.

13.10 Montrer l'existence de l'ordre e d'un polynôme $P \neq 0$ sur $\mathbb{F}_q$, et que $e \leq q^m - 1$ si $m = \deg P \geq 1$ et $P(0) \neq 0$ [Indication : raisonner dans l'anneau fini $\mathbb{F}_q[X]/(P)$].

13.11 Ecrire tous les polynômes irréductibles unitaires de degré 4 sur $\mathbb{F}_2$ et trouver leur ordre.

13.12 Montrer que $X^4 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{F}_5$ et trouver son ordre.

13.13 Soit p premier impair. Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ admet une racine α dans $\mathbb{F}_{p^2}$. Montrer que $y = \alpha + \alpha^{-1}$ vérifie $y^2 = 2$. En déduire que 2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv \pm 1 \bmod 8$.

13.14 Soit $m \geq 1$. (a) Trouver le nombre de polynômes primitifs de degré m sur $\mathbb{F}_q$.
(b) Montrer qu'un polynôme P de degré m est primitif sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si P est unitaire, non nul en 0 et d'ordre $q^m - 1$ [Indication : pour la condition suffisante, on montrera que P est sans facteur multiple, et n'est pas produit de polynômes non constants premiers entre eux].

14 Algorithme de factorisation de Berlekamp dans $\mathbb{F}_q[X]$

On va présenter une méthode classique de factorisation d'un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X]$ non constant (la méthode de Berlekamp). On suppose que P n'a pas de facteurs multiples (c'est-à-direpgcd$P, P') = 1$, voir ...(I) ; dans le cas contraire, on vérifie en exercice que soit $pgcdP, P')$ est un diviseur propre D de P et le polynôme P/D est sans facteurs multiples, soit P est la puissance p-ième d'un polynôme qu'on factorise à son tour). Soit donc $P = P_1 \cdot \cdots \cdot P_s$ une factorisation inconnue de P en produit d'irréductibles non associés. Soit $A = \mathbb{F}_q[X]$, et considérons l'anneau quotient

$$A/(P) \simeq A/(P_1) \times \cdots \times A/(P_s),$$

où chaque $A/(P_i)$ est un corps fini à q^{d_i} éléments, $d_i = \deg P_i$, l'isomorphisme résultant du théorème chinois. L'anneau $A/(P)$ est en particulier un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$, de dimension $d = \deg P$, et l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_q : x \mapsto x^q$ y opère $\mathbb{F}_q$–linéairement. Par l'isomorphisme cette opération se traduit en une action linéaire diagonale de Fr_q sur la somme directe des espaces $A/(P_i)$. Soit $\mathcal{K}$ le corps de décomposition de P sur $\mathbb{F}_q$, alors chaque corps $A/(P_i)$ est isomorphe à un sous-corps $\mathcal{K}_i$ de $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K}_i \supset \mathbb{F}_q$, $[\mathcal{K}_i : \mathbb{F}_q] = d_i$.

De plus $A/(P_i) \simeq \mathcal{K}_i \simeq \mathbb{F}_{q^{d_i}}$ est donné par la condition :

$$\mathcal{K}_i = \{x \in \mathcal{K} \mid x^{q^{d_i}} = x\} \simeq \mathbb{F}_{q^{d_i}},$$

et son sous–corps des constantes (les points fixes sous Fr_q) est $\mathbb{F}_q = \{x \in A/(P_i) \mid x^q = x\}$. Alors

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id})_{|A/(P)} \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id})_{|A/(P_1)} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id})_{|A/(P_s)} \simeq \mathbb{F}_q{}^s,$$

où s est le nombre des facteurs irréductibles P_i.

On obtient ainsi un critère d'irréductibilité de P :

THÉORÈME 14.0.1 (CRITÈRE D'IRRÉDUCTIBILITÉ) *Soit P un polynôme de degré d sur $\mathbb{F}_q$, premier avec sa dérivée. Alors P est irréductible si et seulement si le rang r de l'endomorphisme $\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}$ du $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $A/(P)$est égal à $d - 1$.*

En pratique on écrit la matrice de $\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}$ dans une base de $A/(P)$, par exemple dans la base

$$1 + (P),\ X + (P),\ X^2 + (P),\ \ldots\ ,\ X^{d-1} + (P).$$

Supposons maintenant $r < d-1$; pour trouver les facteurs P_i inconnus on cherche tout d'abord un polynôme Q tel que

$$Q + (P) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}) \subset A/(P)$$

et $Q + (P)$ n'est pas une constante $\mathrm{mod}(P)$. Cela est possible grâce au fait que

$$\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id})) = \mathrm{rg}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}) = d - s < d - 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id})) = d - \mathrm{rg}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}) \geq 2.$$

Alors $P | Q^q - Q$ puisque $Q + (P) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}) \subset A/(P)$, on a

$$Q^q - Q = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} (Q - \alpha),$$

mais $Q - \alpha \not\equiv 0 \bmod (P)$. Ceci implique que

$$P = \mathrm{pgcd}(P, Q^q - Q) = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \mathrm{pgcd}(P, Q - \alpha),$$

où la deuxième égalité vient de ce que les facteurs $Q - \alpha$ sont deux à deux premiers entre eux ; de plus la factorisation à droite n'est pas triviale car tous les $\mathrm{pgcd}(P, Q - \alpha)$ sont distincts de P.

En pratique on cherche Q (un "polynôme décomposant") sous la forme $Q(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{d-1} X^{d-1}$, et on trouve les coefficients a_i comme une solution non triviale du système des d équations linéaires qui traduisent que $(\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id})(Q) = 0$ dans $A/(P)$.

Exercices

14.1 Dans l'algorithme ci-dessus, expliquer précisément où on a utilisé que P n'a pas de facteurs multiples. Donner un contre-exemple au théorème 14.0.1 lorsque cette hypothèse est en défaut [on pourra montrer plus précisement que le rang de l'endomorphisme $\mathrm{Fr}_q - \mathrm{Id}$ de l'anneau quotient est $d - s$, où s désigne le nombre des facteurs irréductibles unitaires distincts de P].

14.2 Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ un polynôme ayant des facteurs multiples. Montrer que, soit $pgcdP, P')$ est un diviseur propre D de P et le polynôme P/D est sans facteurs multiples, soit P est la puissance p-ième d'un polynôme $Q \in \mathbb{F}_q[X]$.

Troisième partie

Equations algébriques et variétés affines

15 Systèmes algébriques

Soit K un anneau commutatif. On considère un système algébrique sur K :

$$X : F_i(T_1, \cdots, T_n) = 0 \quad (i \in I) \text{ où } F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n].$$

L'ensemble des solutions de X dans K est

$$X(K) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in K^n \mid \forall i, F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0\},$$

Il se peut que $X(K) = \emptyset$, c'est-à-dire, que le système n'a pas de solutions dans K, mais il existe des solutions dans un autre anneau.

Soit L une $\boxed{K - \text{ algèbre commutative}}$, c'est-à-dire, un anneau muni de morphisme de structure $\gamma : K \to L$. Alors on obtient une multiplication externe d'éléments $x \in L$ par $a \in K$, donnée par la formule : $a \cdot x = \gamma(a)x \in L$. Par exemple, $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, et tout anneau B est une $\mathbb{Z}$-algèbre.

Alors pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in L^n$ on définie la valeur du polynôme $F_i(x_1, \cdots, x_n) \in L$, et on pose

$$X(L) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in L^n \mid \forall i, F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0\},$$

l'ensemble des solutions de X dans L.

En particulier, tout anneau B est une $\mathbb{Z}$-algébre, donc $X(B)$ est défini pour tout système algébrique sur $\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 15.0.1 *Soit (P_X) l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes*

$$F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n](i \in I),$$

et on considère l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/(P_X)$.

(a) Il existe une bijection

$$X(L) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{K-alg}(A_X, L) \text{ tel que } \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in L^n \leftrightarrow (s_{\mathbf{x}} : T_j \mapsto x_j).$$

(b) Pour tout morphisme $f : L_1 \to L_2$ de K-algèbres, il existe une application canonique d'ensembles des solutions

$$f_X : X(L_1) \to X(L_2) \text{ tel que } f_X((x_1, \cdots, x_n)) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$$

PREUVE. (a) On vérifie que

$$s_{\mathbf{x}} : K[T_1, \cdots, T_n] \to L, \quad s_{\mathbf{x}} : T_j \mapsto x_j),$$

est bien défini sur l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/(P_X)$.

(b) On vérifie que la formule $f_X((x_1, \cdots, x_n)) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$ détérmine f_X de façon unique.

EXEMPLE 15.0.2 *Pour voir que $N = 4m + 3$ n'est pas une somme de deux carrés : prenons*

$$L_1 = \mathbb{Z}, L_2 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad X : T_1^2 + T_2^2 - N = 0,$$

alors

$$X(L_2) = \emptyset \Rightarrow X(L_1) = \emptyset.$$

15.1 Variétés affines (préparation).

Soit K un corps algébiquement clos. Dans ce cas un système algébique X sur K est essentiellement déterminé par l'ensemble des solutions $X(K) \subset K^n$, selon un résultat important de l'algèbre commutative :

THÉORÈME 15.1.1 ("NULLSTELLENSATZ") (LE THÉORÈME DES ZÉROS DE HILBERT, SANS DÉMONSTRATION) *Soit K un corps algébiquement clos. Soit $(P_X) = (F_i)_{i\in I}$ l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes*

$$F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n] \quad (i \in I),$$

et on considère l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/(P_X)$. Alors

$$F \in K[T_1, \cdots, T_n] \text{ s'annulle sur } X(K) \Longleftrightarrow \exists N, F^N \in P_X = (F_i)_{i\in I}$$

REMARQUE 15.1.2 *Soit $(P_X) = (F_i)_{i\in I}$ l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes*

$$F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n] \quad (i \in I).$$

Alors la condition

$$\exists N, F^N \in P_X = (F_i)_{i\in I}$$

signifie qu'on a $\overline{F}^N = 0$ dans l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/(P_X)$, où $\overline{F} = F \bmod P_X$

DÉFINITION 15.1.3 *Soit K un corps algébiquement clos, Alors l'*ensemble des solutions *$X(K) \subset K^n$ d'un système algébrique sur K,*

$$X : F_i(T_1, \cdots, T_n) = 0 \quad (i \in I) \text{ où } F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n],$$

est dit une variété affine *sur K*

On peut supposer que l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/(P_X)$ n'a pas d'éléments nilpotents, où $(P_X) = (F_i)_{i\in I}$ l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes

$$F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n] \quad (i \in I).$$

15.2 Résolution d'un système linéaire dans un anneau euclidien

On considère un système linéaire sur un anneau euclidien $\mathcal{A}$:

$$Ax = b, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathcal{A}),$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathcal{A}), b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m1}(\mathcal{A}).$$

Pour résoudre un tel système on a besoin de la théorie des diviseurs élémentaires. Rappellons qu'une transformation élémentaire de lignes d'une matrice sur un anneau commutatif $\mathcal{A}$ c'est l'addition à une ligne d'une autre, multipliée par un élément de $\mathcal{A}$. De façon similaire on définit les transformations élémentaires entières de colonnes. Une transformation élémentaire de lignes (resp. de colonnes) est équivalente à la multiplication à gauche (respectivement, à droite) de la matrice initiale par une matrice de type $E_{ij} = E + \lambda e_{ij}$ (avec $i \neq j$) dans le groupe $SL_m(\mathcal{A})$ (resp. $SL_n(\mathcal{A})$). Si l'on fait plusieures telles transformations à la suite, on remplace la matrice A par UAV où $U \in GL_m(\mathcal{A})$, $V \in GL_n(\mathcal{A})$ sont des matrices à coefficients entiers inversibles sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire, telles que $\det U, \det V \in \mathcal{A}^*$.

DÉFINITION 15.2.1 *On définit des* matrices élémentaires *$U \in \mathrm{GL}_m(\mathcal{A})$ et $V \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ comme les matrices obtenues à partir des matrices unités I_m et I_n par une transformation éléméntaire des lignes (colonnes) sur $\mathcal{A}$.*

REMARQUE 15.2.2 *On vérifie que la matrice UAV est obtenue en appliquant aux lignes (colonnes) de A les mêmes transformations élémentaires qui ont été utilisé dans la définition de U et V ci-dessus.*

PROPOSITION 15.2.3 *Pour toute matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathcal{A}),$$

on peut choisir des produits $U = U_1 \cdot U_2 \cdot \cdots \cdot U_k$ et $V = V_1 \cdot V_2 \cdot \cdots \cdot V_l$ des matrices élémentaires de telle façon que $UAV = D$, avec

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & d_r & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathcal{A}), \qquad \begin{array}{l} \text{où } r \text{ est le rang de } A, \\ \text{et } d_1, \cdots, d_r \neq 0 \\ \text{avec } d_1 | d_2 \cdots | d_r. \end{array}$$

COROLLAIRE 15.2.4 *On en déduit que*

$$Ax = b \Longleftrightarrow UAVV^{-1}x = Ub \Longleftrightarrow Dy = c, \text{ où } c = Ub, y = V^{-1}x, x = Vy,$$

et s'il existe une solutions, alors la solution générale sur $\mathcal{A}$ est donnée par les formules

$$d_i y_i = c_i, \text{ pour } i \leq r, y_i \in \mathcal{A} \text{ pour } i > r, \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} c_1/d_1 \\ \cdots \\ c_r/d_r \\ y_{r+1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Calculs avec les matrices élargies

Pour trouver U et V on utilise les matrices élargies

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$$

Montrer que par les transformations élémentaires de lignes et de colonnes la matrice élargie se transforme en

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} UAV & Ub \\ \hline V & 0 \end{array}\right)$$

EXEMPLE 15.2.5 *Résoudre les système linéaires sur $\mathbb{Z}$:*

(a)

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 4.$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

SOLUTION. (a) Ecrivons les matrices correspondantes :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

avec y_2, $y_3 \in \mathbb{Z}$.

SOLUTION. (b) Ecrivons les matrices correspondantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

avec $y_3 \in \mathbb{Z}$.

15.3 Systèmes diophantiens linéaires.

L'algorithme d'Euclide nous permet d'étudier un système diophantien linéaire (comme un cas particulier de section 15.2) :

$$Ax = b, \tag{15.1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{Z}), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

De l'autre cotê, le système

$$UAVy = Ub \tag{15.2}$$

est équivalent à (15.1) car ses solutions correspondent bijectivement aux solutions de (15.1) par : $x = Vy$. On utilise cette observation pour remplacer A par une matrice plus simple $A' = UAV$. En effet, si l'on utilise l'algorithme d'Euclide et une version de la procédure d'élimination de Gauss sans divisions, on trouve A' de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_r & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = UAV \quad (r = \mathrm{rk}A). \tag{15.3}$$

Alors on voit que soit notre système est non–résoluble même sur $\mathbb{Q}$, soit on obtient toutes les solutions des équations $d_i y_i = c_i, \quad c = Ub$ pour $i \leq r$, $0y_i = 0$ pour $i > r$. Il est donc clair que l'ensemble des solutions entières est non–vide si et seulement si d_i divise c_i pour $i \leq r$ et il est paramétré de façon évidente. Le nombre $d_1 \cdot \ldots \cdot d_i$ coïncide avec le pgcd de tous les mineurs d'ordre i de A donc on peut supposer que $d_i | d_{i+1}$. Ils sont appellés *les diviseurs élémentaires* de A.

Pour trouver la matrice $V \in GL_n(\mathbb{Z})$ il est commode d'utiliser la matrice élargie $\begin{pmatrix} A & b \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$, et si l'on applique les transformations élémentaires de n premières colonnes et m premières lignes ci–dessus, on obtient

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ V & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UAV & Ub \\ V & 0 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 15.3.1 *(a) Un système linéaire*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{15.4}$$

sur $\mathbb{Z}$ est résoluble si et seulement si il est résoluble mod N *pour tout nombre naturel positif N.*

(b) Un système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

sur $\mathbb{Z}$ est résoluble si et seulement si pour tout nombre naturel positif $k \leq m, n$ le PGCD de tous les mineurs d'ordre k de la matrice A est égal au PGCD de tous les mineurs d'ordre k de la matrice élargie $(A|b)$.

En effet, cette méthode montre que (15.4) est résoluble si et seulement si ses diviseurs élémentaires coïncident avec ceux de la matrice étendue (avec la colonne b ajoutée). C'est équivalent à la résolubilité de toutes les congruences

$$Ax \equiv b (\mathrm{mod} N)$$

où N un entier (on le voit sous la forme diagonale). Cette condition peut être étendue pour un système général diophantien. Il est clair, qu'une telle condition est nécessaire pour l'existence d'une solution. Notre étude montre que cette condition est aussi suffisante pour un système linéaire. Quand c'est vrai pour une classe d'équations diophantiennes, on dit que pour cette classe le principe de Minkowski–Hasse est vérifié. Le problème de validité du principe de Minkowski–Hasse pour les classes d'équations diophantiennes est un des problèmes centraux en théorie des nombres.

Groupes abéliens

(a) Soit F un groupe abélien libre (additif) de base $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $F \cong \mathbb{Z}^n$, et soit H son sous-groupe engendré par des éléménts

$$f_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i \quad (i = 1, \cdots, n).$$

Montrer que le groupe quotient F/H est fini si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$ et dans ce cas $\mathrm{Card}\,(F/H) = |\det(a_{ij})|$.

(b) Décomposer en somme directe de groupes cycliques le groupe quotient F/H d'un groupe abélien fini F de base (e_1, e_2, e_3), $F \cong \mathbb{Z}^3$, par son sous-groupe H engendré par des éléménts f_1, f_2, f_3, avec

$$\begin{cases} f_1 = 7e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ f_2 = 21e_1 + 8e_2 + 9e_3 \\ f_3 = 5e_1 - 4e_2 + 3e_3. \end{cases}$$

(c) Décomposer en somme directe de groupes cycliques le groupe quotient F/H d'un groupe abélien fini F d'une base (e_1, e_2, e_3), $F \cong \mathbb{Z}^3$, par son sous-groupe H engendré par des éléménts f_1, f_2, f_3, avec

$$\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 \\ f_2 = 5e_1 + 5e_2 + 6e_3 \\ f_3 = 2e_1 + 6e_2 + 9e_3. \end{cases}$$

(d) Même question pour les éléménts f_1, f_2, f_3, avec

$$\begin{cases} f_1 = 4e_1 + 7e_2 + 3e_3 \\ f_2 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ f_3 = 6e_1 + 10e_2 + 5e_3. \end{cases}$$

Rappel : systèmes linéaires dans $\mathbb{F}_{p^d}$ (F.Sergeraert)

```
> restart :
```

- Exemple dans $\mathbb{F}_{3^4}$.

- On prend un polynôme irréductible de degré 4 dans $\mathbb{F}_3$, affecté à **irr34**.

```
> irr34 := op(1, select(has, Factor(x^81-x) mod 3, 4)) ;
```

$$irr34 := x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 2$$

- Le polynôme irréductible obtenu par ce procédé n'est pas forcément le même d'une session à l'autre.

- On aliasse α à une racine de ce polynôme dans une extension de $\mathbb{F}_3$, de sorte que $\mathbb{F}_{3^4} = \mathbb{F}_3[\alpha]$.

```
> alias(alpha = RootOf(irr34) mod 3) ;
```

$$\alpha$$

- La procédure **rnd3** génére un entier modulo 3 pseudo-aléatoire.

```
> rnd3 := rand(0..2) :
> seq(rnd3(), i = 1..5) ;
```

$$0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 1$$

- La procédure **rnd34** génère un élément pseudo-aléatoire de $\mathbb{F}_{3^4}$.

```
> rnd34 := () -> add(rnd3()*alpha^i, i=0..3) :
> seq(rnd34(), i = 1..5) ;
```

$$2 + 2\,\alpha + 2\,\alpha^2 + \alpha^3,\ 1 + \alpha,\ 2 + 2\,\alpha + \alpha^2,\ 2\,\alpha^2,\ \alpha^2$$

- La matrice A est une matrice 3x3 pseudo-aléatoire à coefficients dans $\mathbb{F}_{3^4}$.

```
> A := matrix(3, 3, rnd34) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 + 2\,\alpha^2 + 2\,\alpha^3 & 2 + 2\,\alpha + 2\,\alpha^3 & 2 + 2\,\alpha^2 + 2\,\alpha^3 \\ 2\,\alpha^2 & 2 + \alpha + \alpha^2 & 1 + \alpha^3 \\ 2 + 2\,\alpha + \alpha^3 & 1 + \alpha^2 & \alpha + 2\,\alpha^2 \end{bmatrix}$$

- Idem pour un vecteur second membre.

```
> b := vector(3, rnd34) ;
```

$$b := \left[\alpha^3,\ \alpha^3,\ 2 + 2\,\alpha^2\right]$$

- Linsolve(...) mod 3 permet de résoudre dans $\mathbb{F}_{3^4}$.

```
> x := Linsolve(A,b) mod 3 ;
```

$$x := \left[\alpha^3 + 2\,\alpha^2 + 2,\ \alpha + \alpha^2,\ 2\right]$$

- Vérification. Calcul de $A\,x - b$.

```
> zerov := evalm(A &* x - b) ;
```

$$zerov := \Big[(1 + 2\,\alpha^2 + 2\,\alpha^3)\,(\alpha^3 + 2\,\alpha^2 + 2) + (2 + 2\,\alpha + 2\,\alpha^3)\,(\alpha + \alpha^2) + 4 + 4\,\alpha^2 + 3\,\alpha^3,$$
$$2\,\alpha^2\,(\alpha^3 + 2\,\alpha^2 + 2) + (2 + \alpha + \alpha^2)\,(\alpha + \alpha^2) + \alpha^3 + 2,$$
$$(2 + 2\,\alpha + \alpha^3)\,(\alpha^3 + 2\,\alpha^2 + 2) + (1 + \alpha^2)\,(\alpha + \alpha^2) + 2\,\alpha + 2\,\alpha^2 - 2\Big]$$

- Les termes du vecteur obtenu ne sont pas « réduits » à leur forme canonique dans $\mathbb{F}_{3^4} = \mathbb{F}_3[\alpha]$. Pour obtenir la réduction, on utilise

```
> map(item -> Expand(item) mod 3, zerov) ;
```

$$[0,\ 0,\ 0]$$

15.1 Rappel : variétés affines

Soit K un corps algébiquement clos. Nous avons déjà remarqué que dans ce cas un système algébique X sur K est essentiellement déterminé par l'ensemble des solutions $X(K) \subset K^n$, selon un résultat important de l'algèbre commutative :

THÉORÈME 15.1.1 ("NULLSTELLENSATZ", LE THÉORÈME DES ZÉROS DE HILBERT, SANS DÉMONSTRATION) *Soit K un corps algébiquement clos. Soit $P_X = (F_1, \cdots, F_m)$ l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes*

$$F_1(T_1, \cdots, T_n), \cdots, F_m(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n].$$

Alors

$$F \in K[T_1, \cdots, T_n] \text{ s'annulle sur tout } X(K) \Longleftrightarrow \exists N, F^N \in P_X = (F_1, \cdots, F_m)$$

NOTATIONS.

(a) Pour tout K-algèbre L, et pour tout idéal $I \subset K[T_1, \cdots, T_n]$ on pose

$$V(I, L) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in L^n \mid \forall F \in I, F(x_1, \cdots, x_n) = 0\},$$

le sous-ensemble algébrique dans L^n. Alors $X(L) = V(P_X, L)$.

(b) De plus, on appelle racine de l'idéal I, et on note $\sqrt{I}$, l'idéal $\left\{F \in K[T_1, \cdots, T_n] | \exists N, F^N \in I\right\}$. C'est un idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, et on vérifie facilement que $X(L) = V(\sqrt{P_X}, L)$, et que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(c) Pour tout sous-ensemble $X \subset L^n$ on défini l'idéal des polynômes annullés sur X, et on le note par

$$J = J(X) \subset K[T_1, \cdots, T_n].$$

Alors le théorème 15.1.1 signifie que si K est un corps algébiquement clos, $L = K$, alors

$$\sqrt{P_X} = J(X(K)).$$

REMARQUE 15.1.2. *Soit $P_X = (F_1, \cdots, F_m)$ l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes*

$$F_1(T_1, \cdots, T_n), \cdots, F_m(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n].$$

Alors la condition

$$\exists N, F^N \in P_X = (F_1(T_1, \cdots, T_n), \cdots F_m(T_1, \cdots, T_n))$$

signifie qu'on a $\overline{F}^N = 0$ dans l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/P_X$, où $\overline{F} = F \bmod P_X$. De plus l'anneau quotient

$$K[T_1, \cdots, T_n]/\sqrt{P_X}$$

n'a pas d'éléments nilpotents.

DÉFINITION 15.1.3. *Soit K un corps, et L un corps algébiquement clos contenant K,*

(a) L'ensemble des solutions $X(L) \subset L^n$ d'un système algébrique sur K,

$$X : F_1(T_1, \cdots, T_n) = 0, \cdots, F_m(T_1, \cdots, T_n) = 0 \text{ où } F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n],$$

est dit une variété affine *$V = V_X$ dans L^n définie sur K.*

(b)L'ensemble des solutions $X(K) \subset K^n$ d'un système algébrique sur K,

$$X : F_1(T_1, \cdots, T_n) = 0, \cdots, F_m(T_1, \cdots, T_n) = 0 \text{ où } F_i(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n],$$

*est dit l'*ensemble des points rationnels *$X(K) = V_X(K)$ sur K.*

On peut supposer que l'anneau quotient $A_X = K[T_1, \cdots, T_n]/(P_X)$ n'a pas d'éléments nilpotents, où $P_X = (F_1, \cdots, F_m)$ l'idéal de $K[T_1, \cdots, T_n]$, engendré par les polynômes

$$F_1(T_1, \cdots, T_n), \cdots, F_m(T_1, \cdots, T_n) \in K[T_1, \cdots, T_n].$$

15.4 Variétés algébriques (exemples)

Equations sur les corps finis : solution d'une équation affine sur $\mathbb{F}_q$

Soit $K = \mathbb{F}_{p^l}$. On considère une équation affine $F(X, Y) = 0$ sur $\mathbb{F}_{p^l}$, par exemple $X^3 + Y^3 = 1$ sur $\mathbb{F}_8$ ($p = 2, l = 3$). On représent les éléments de $K = \mathbb{F}_{p^l}$ sous la forme des nombres n vérifiant $0 \leq n < p^l$. En effet, étant donné un tel nombre n, on le transforme en un élément de K en utilisant l'écriture de n en base p : il existe des entiers uniques ("Chiffres" de n en base p) $m_0, \ldots, m_{d-1}$ vérifiant $0 \leq m_i < p$ et tels que

$$n = m_0 + m_1\, p + m_2\, p^2 + \cdots + m_{d-1}\, p^{d-1},$$

ce qui permet d'associer de manière unique à l'entier n, l'élément

$$\mu = \overline{m_0 + m_1 T + \cdots + m_{d-1} T^{d-1}}$$

de K, $\alpha = \overline{T} = T \bmod f$.

```
> restart;
> F:=(X,Y)->X^3+Y^3-1;
> p:=2;l:=3;
> %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
> (la procedure gf engendre un générateur alpha d'un corps fini F_{p^l})
> gf:= proc(p::nonnegint,l::nonnegint)
> local u,i,m, v;
> if ((p-2)^2+(l-2)^2=0) then
> alias(alpha = RootOf(x^2+x+1) mod 2);
> fi;
> if l=1 then
> alpha=1;
> else fi;
> u:=op(1, select(has, Factor(z^(p^l)-z) mod p, z^l)) ;
> alias(alpha = RootOf(u) mod p);
> return alpha,u;
> end proc:
```

$$F := (X, Y) \to X^3 + Y^3 - 1$$

$$p := 2$$

$$l := 3$$

```
> #%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
> %%%%%%
> Chiffres:= proc(  d::nonnegint,l::nonnegint,n::nonnegint )
> local i,m, v;
> v:=vector(l);
> m:=n;
> for i from 0 to l-1 do
> v[l-i]:=modp(m,d);m:=floor(m/d); od;
> return v;
> #gf(p,l):
> end proc:
> gf(p,l):
> #%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
> %%%%%%
> g:= proc( p::nonnegint,l::nonnegint,n::nonnegint )
> local h, v, i;
> v:=vector(l);
> for i from 1 to l do
> v:=evalm(Chiffres(p,l,n));h:=add(alpha^(l-j)*v[j],j=1..l);return h;
> od;end proc:
> gf(p,l):
> #%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
> %%
> points:= proc(  p::nonnegint,l::nonnegint,F::polynom )
> local n1,n2,n3, L,c,v,f1, f2;
> c:=0:
> L:=NULL:
> for n1 from 0 to p^l-1 do
> for n2 from 0 to p^l-1 do
> if Eval(F(X,Y,Z),{X=g(p,l,n1),Y=g(p,l,n2)}) mod p =0 then c:=c+1;
> L:= L,(' c'=c,[g(p,l,n1),g(p,l,n2)]);fi; od; od;
> return(' L'=L):end:
> points(p,l,F);
```

$$L = (\ c = 1, [0, 1],\ \ c = 2, [1, 0],\ \ c = 3, [\alpha, 1 + \alpha^2 + \alpha],\ \ c = 4, [1 + \alpha, \alpha^2],\ \ c = 5,$$
$$[\alpha^2, 1 + \alpha],\ \ c = 6, [\alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha],\ \ c = 7, [\alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + 1],\ \ c = 8, [1 + \alpha^2 + \alpha, \alpha])$$

Equations sur les corps finis : solution d'un système affine sur $\mathbb{F}_q$

Soit $K = \mathbb{F}_{p^l}$. On considère un système d'équations affines

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z) = 0 \\ F_2(X,Y,Z) = 0 \end{cases}$$

sur $\mathbb{F}_{p^l}$, par exemple

$$\begin{cases} X^3 + Y^3 + Z^5 = 0 \\ X + Y + 1 = 0 \end{cases}$$

sur $\mathbb{F}_8$ ($p = 2, l = 3$). On représent les éléments de $K = \mathbb{F}_{p^l}$ sous la forme des nombres n vérifiant $0 \le n < p^l$. En effet, étant donné un tel nombre n, on le transforme en un élément de K en utilisant l'écriture de n en base p : il existe des entiers uniques ("Chiffres" de n en base p) $m_0, \ldots, m_{d-1}$ vérifiant $0 \le m_i < p$ et tels que

$$n = m_0 + m_1\, p + m_2\, p^2 + \cdots + m_{d-1}\, p^{d-1},$$

ce qui permet d'associer de manière unique à l'entier n, l'élément

$$\mu = \overline{m_0 + m_1 T + \cdots + m_{d-1} T^{d-1}}$$

de K, $\alpha = \overline{T} = T \bmod f$.

```
> restart;
> F1:=(X,Y,Z)->X^3+Y^3+Z^5;
> F2:=(X,Y,Z)->X+Y+1;
> p:=2;l:=3;
> %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%%%%%
```

(la procedure gf engendre un générateur alpha d'un corps fini F_{p^l})

```
> gf:= proc(p::nonnegint,l::nonnegint)
> local u,i,m, v;
> if ((p-2)^2+(l-2)^2=0) then
> alias(alpha = RootOf(x^2+x+1) mod 2);
> fi;
> if l=1 then
> alpha=1;
> else fi;
> u:=op(1, select(has, Factor(z^(p^l)-z) mod p, z^l)) ;
> alias(alpha = RootOf(u) mod p);
> return alpha,u;
> end proc:
```

$$F1 := (X, Y, Z) \to X^3 + Y^3 + Z^5$$

$$F2 := (X, Y, Z) \to X + Y + 1$$

$$p := 2$$

$$l := 3$$

```
> Chiffres:= proc(  d::nonnegint,l::nonnegint,n::nonnegint )
> local i,m, v;
> v:=vector(l);
> m:=n;
> for i from 0 to l-1 do
> v[l-i]:=modp(m,d);m:=floor(m/d); od;
> return v;
> #gf(p,l):
> end proc:
> gf(p,l):
> g:= proc( p::nonnegint,l::nonnegint,n::nonnegint )
> local h, v, i, n3;
> v:=vector(l);
> for i from 1 to l do
> v:=evalm(Chiffres(p,l,n));h:=add(alpha^(l-j)*v[j],j=1..l);return h;
> #gf(p,l):
> od;end proc:
> gf(p,l):

> points:= proc(  p::nonnegint,l::nonnegint,F::polynom )
> local n1,n2,n3, L,c,v,f1, f2;
> c:=0:
> L:=NULL:
> for n1 from 0 to p^l-1 do
> for n2 from 0 to p^l-1 do
> for n3 from 0 to p^l-1 do
> if (Eval(F1(X,Y,Y),{X=g(p,l,n1),Y=g(p,l,n2),Z=g(p,l,n3)}) mod p=0
> and Eval(F2(X,Y,Z),{X=g(p,l,n1),Y=g(p,l,n2),Z=g(p,l,n3)}) mod p=0)
> then c:=c+1;
> L:= L,(‘ c‘=c,[g(p,l,n1),g(p,l,n2),g(p,l,n3)]);fi; od; od;
> od;return(gf(p,l),‘ L‘=L):end:

> points(p,l,F);
```

$$\alpha,\ z^3+z+1,\ L=(\ c=1,\ [0,\ 1,\ 0],\ \ c=2,\ [0,\ 1,\ 1],\ \ c=3,\ [0,\ 1,\ \alpha],\ \ c=4,\ [0,\ 1,\ 1+\alpha],$$
$$c=5,\ [0,\ 1,\ \alpha^2],\ \ c=6,\ [0,\ 1,\ 1+\alpha^2],\ \ c=7,\ [0,\ 1,\ \alpha^2+\alpha],\ \ c=8,\ [0,\ 1,\ 1],$$
$$c=9,\ [1+\alpha,\ \alpha,\ 0],\ \ c=10,\ [1+\alpha,\ \alpha,\ 1],\ \ c=11,\ [1+\alpha,\ \alpha,\ \alpha],\ \ c=12,$$
$$[1+\alpha,\ \alpha,\ 1+\alpha],\ \ c=13,\ [1+\alpha,\ \alpha,\ \alpha^2],\ \ c=14,\ [1+\alpha,\ \alpha,\ 1+\alpha^2],\ \ c=15,$$
$$[1+\alpha,\ \alpha,\ \alpha^2+\alpha],\ \ c=16,\ [1+\alpha,\ \alpha,\ 1],\ \ c=17,\ [1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ 0],\ \ c=18,$$
$$[1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ 1],\ \ c=19,\ [1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ \alpha],\ \ c=20,\ [1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ 1+\alpha],\ \ c=21,$$
$$[1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ \alpha^2],\ \ c=22,\ [1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ 1+\alpha^2],\ \ c=23,\ [1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ \alpha^2+\alpha],\ \ c=24,$$
$$[1+\alpha^2,\ \alpha^2,\ 1],\ \ c=25,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ 0],\ \ c=26,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ 1],\ \ c=27,$$
$$[1,\ \alpha^2+\alpha,\ \alpha],\ \ c=28,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ 1+\alpha],\ \ c=29,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ \alpha^2],\ \ c=30,$$
$$[1,\ \alpha^2+\alpha,\ 1+\alpha^2],\ \ c=31,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ \alpha^2+\alpha],\ \ c=32,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ 1])$$
$$1:=1+\alpha^2+\alpha$$

Equations de degré deux

On considère l'équation diophantienne suivante aux coefficients entiers :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0. \tag{15.1}$$

Ici on commence par trouver l'ensemble de toutes les solutions en nombres rationnels. Ce problème est plus facile que ce de trouver les solutions en nombres entiers, mais il n'est pas trivial.

Un exemple classique est donné par la parametrisation rationnelle du cercle $x^2 + y^2 = 1$:

$$x = \frac{2t}{1+t^2},\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad (x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ t = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)), \tag{15.2}$$

$$(\text{ à l'exception du point } (0, -1)). \tag{15.3}$$

Cette parametrisation nous permet de décrire toutes les triples primitifs de Pythagore (X, Y, Z), c'est-à-dire, les solutions en entiers naturels de l'équation $X^2 + Y^2 = Z^2$ avec pgcd($X,\ Y,\ Z$) $= 1$. La réponse est : $X = 2uv,\ Y = u^2 - v^2,\ Z = u^2 + v^2$, où $u > v > 0$ sont des entiers premiers entre eux. Pour le prouver, il suffit de poser $t = u/v$ dans (15.2).

De façon similaire, trouver les solutions rationnelles de (15.1) est equivalent à trouver les solutions rationnelles de l'équation homogène

$$\begin{aligned} F(X_0, X_1, \cdots, X_n) &= \sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} X_i X_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i,j=1}^{n} f_{i0} X_i X_0 + f_{00} X_0^2 \end{aligned} \tag{15.4}$$

où $f_{ij} = f_{ji} = a_{ij}/2$ pour $1 \le i < j \le n$ et $f_{0i} = f_{i0} = b_i/2$ pour $i = 1, 2, \ldots, n,\ f_{00} = c$. Les *coordonnées non–homogènes* $x_1, \cdots, x_n$ sont reliées aux *coordonnées homogènes* $X_0, \ldots, X_n$ par $X_i = x_i X_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. La forme quadratique $F(X)$ peut être écrit de façon commode sous la forme

$$F(X) = X^t A_F X, \quad X^t = (X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

où $A_F = (f_{ij})$ est la matrice des coefficients. S'il existe une solution rationnelle non–triviale de $F(X) = 0$, on dit que la forme F *représente zéro sur* $\mathbb{Z}$.

Cette équation définie une conique Q_F (c'est-à-dire, une hypersurface de $\mathbb{CP}^n$ de degré deux). Ses points sont toutes les solutions (à l'exception de la solution triviale) considérées comme points de l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$:

$$Q_F = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) \in \mathbb{CP}^n \quad | \quad F(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0\}.$$

Toute solution non–triviale de $F(X) = 0$ donne un point sur cette conique. S'il on connait une solution X^0 alors on peut trouver toutes les autres en considérant les intersections deQ_F avec les droites (projectifs) defines sur $\mathbb{Q}$ et contenants X^0. Algébriqument, une droite passant par X^0 et Y^0 est formée par tous les points de la forme $uX^0 + vY^0$. L'équation $F(uX^0 + vY^0) = 0$ se réduit alors à

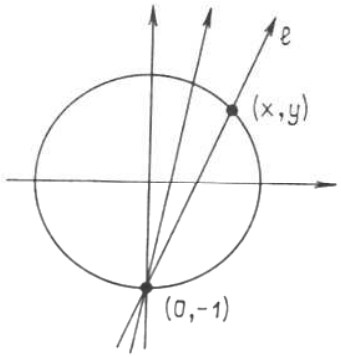
$$uv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(X^0) Y_i^0 + v^2 F(Y^0) = 0.$$

En général, toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial X_i}$ ne s'annulent pas nécessairement. Dans ce cas, pour tout Y^0 on peut trouver un point d'intersection de Q_F avec notre droite :

$$v = -u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(X^0) Y_i^0 / F(Y^0). \tag{15.5}$$

(Si, par hasard, $F(Y^0) = 0$ alors Y^0 se trouve déjà sur Q_F). De nouveau, ce point n'est pas unique en général. Les cas limits peut être bien compris en termes géométriques : si toutes les dérivées partielles s'annulent en X^0 alors notre conique est un cône de sommet X^0, et le problème se réduit à ce de trouver tous les points rationnels sur la base d'un cône, cette base étant une conique de dimension inférieure ; s'il arrive qu'ils tous se trouvent entièrement sur Q_F alors tous ces points rationnels doivent être considérés etc.

Cette *méthode de la projection stereographique*, appliquée à $x^2 + y^2 = 1$ et au point (0,-1) donne exactement (15.2) s'il on note t la pente de la droite passant par (0,-1) et (x, y) : $y + 1 = tx$.



Concernant l'équation

$$F(X_0, X_1, \ldots, X_n) = 0 \tag{15.6}$$

(avec F comme dans (15.4)) sur les nombres rationnels, on peut commencer par la diagonalisation de A_F avec une substitution linéaire non–dégénérée $X = CY$ où $C \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$. La matrice C peut être trovée effectivement par le méthode classique de l'extraction successive des carrées.

Pour les équations homogènes comme (15.6) les problèmes de trouver toutes les solutions dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{Z}$ sont essentiellement équivalents. Lorsque on peut trouver toutes les solutions à partir d'une seule, la question-clé est donc de décider, s'il existe une solution. La réponse est donnée par le résuiltat suivante.

15.5 Le principe de Minkowski–Hasse pour les formes quadratiques

DÉFINITION 15.5.1 *Une solution* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ *d'une equation* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *en nombres entiers est dit primitive modulo* N, *si* $\mathrm{pgcd}(N, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

THÉORÈME 15.5.2 *Une forme quadratique* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de rang* n *de coefficients entiers représente un zéro sur les nombres rationnels si et seulement si pour tout* N, *la congruence* $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{N}$ *admet une solution primitive, et de plus* F *représents un zéro sur les nombres réels, c'est-à-dire, elle est indéfinie.*

Pour une preuve générale, voire [BS85]. Bien-sûr, la nécessité de cette condition est clair.

On donne ici une jolie démonstration de la suffisance de cette condition dans le cas $n = 3$ dûe à Legendre ([BS85]). Soit

$$F = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 \qquad (a_1a_2a_3 \neq 0).$$

Puisque F est indéfinie, on peut supposer que les deux premiers coefficients soient positifs, tandis que le troisième soit négatif. De plus, on peut les supposer sans facteurs carrés et premiers entre eux :

on obtient ceci par des changements de variables et en divisant la forme par le pgcd de ses coefficients. On va noter une forme avec telles propriétés par

$$ax^2 + by^2 - cz^2. \tag{15.7}$$

Considérons un nombre premier p divisant c. Puisque $F \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ admet une solution primitive, on peut trouver une solution non-primitive (x_0, y_0) de la congruence $ax^2 + by^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Alors

$$ax^2 + by^2 \equiv ay_0^{-2}(xy_0 + yx_0)(xy_0 - yx_0) \pmod{p}.$$

Dans le cas $p = 2$ on a bien sûr

$$ax^2 + by^2 - cz^2 \equiv (ax + by - cz)^2 \pmod{2}.$$

Donc pour tout $p|2abc$ on peut trouver des formes linéaires $L^{(p)},\ M^{(p)}$ en x, y, z de coefficients entiers telles que $F \equiv L^{(p)}M^{(p)} (\mathrm{mod}\ p)$. En utilisant le théorème chinois , on trouve L (resp. M) de coefficients entiers congrue à $L^{(p)}$ (resp. $M^{(p)}$) (mod p) pour tout $p|abc$. On obtient donc

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv L(x, y, z)M(x, y, z) \pmod{abc}. \tag{15.8}$$

Considérons maintenant les point entiers dans la boîte suivante :

$$0 \le x < \sqrt{bc}, \quad 0 \le y < \sqrt{ac}, \quad 0 \le z < \sqrt{ab}. \tag{15.9}$$

Si l'on exclut le cas trivial $a = b = c = 1$, on constate les racines carrées dans les inégalités (15.9) ne sont pas toutes de nombres entiers, donc le nombre total des points entiers sera strictement plus grand que le volume de cette boîte, i.e. abc. Ceci implique qu'il existe deux points différents pour lesquels L prends la même valeur mod abc. En considérant leurs différence, on trouve

$$L(x_0, y_0, z_0) \equiv 0 \pmod{abc} \tag{15.10}$$

pour un point $|x_0| \le \sqrt{bc}, \quad |y_0| \le \sqrt{ac}, \quad |z_0| \le \sqrt{ab}$. Donc

$$ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 \equiv 0 \pmod{abc} \tag{15.11}$$

et

$$-abc < ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 < 2abc.$$

Il vient que soit

$$ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 = 0 \tag{15.12}$$

soit

$$ax_0^2 + by_0^2 - cz_0^2 = abc. \tag{15.13}$$

Dans le premier cas le théorème est démontré. Dans le second cas on obtient explicitement la solution suivante :

$$a(x_0z_0 + by_0)^2 + b(y_0z_0 - ax_0)^2 - c(z_0^2 + ab)^2 = 0.$$

L'énoncé originale de Legendre a été que $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$ est résoluble si et seulement si toutes les classes résiduelles $bc \pmod{a}$, $\quad ac \pmod{b}$, $\quad -ab \pmod{c}$ sont des carrés.

On peut démontrer qu'une forme quadratique indefinite de rang ≥ 5 représente toujours un zéro sur les rationnels, voire [BS85].

15.6 Espace projectif $\mathbb{P}^n$, variétés algébriques

Soit K un corps et $n \geq 1$ un entier. On considère espace projectif de dimension n sur K et on note $\mathbb{P}^n_K$ ou simplement $\mathbb{P}^n$ l'ensemble des classes d'équivalence de $(n+1)$-uplets $(x_0, \cdots, x_n)$, $x_i \in F$ pour $0 \leq i \leq n$; sous la relation $(x_0, \cdots, x_n) \sim (\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n)$ pour tout $\lambda \in K^*$. Une classe d'équivalence x est un point de $\mathbb{P}^n$. Soit $F[T] = F[T_0, \cdots, T_n]$. On interprète les éléments de $F[T]$ comme des fonctions régulières de l'espace affine $\mathbb{A}^{n+1}$, et on interprète les éléments de

$$F\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}, \cdots, \frac{T_n}{T_0}\right),$$

comme des fonctions rationnelles de $\mathbb{P}^n$

Définition 15.6.3 *Une partie $X \subset \mathbb{P}^n$ est dit une variété algébrique projective si*

$$X = V(P) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \forall F \in P, F(x) = 0\}$$

où P est un idéal premier homogène de $F[T_0, \cdots, T_n]$, c'est à dire premier engendré par des polynômes homogènes.

Définition 15.6.4 *Soit U un voisinage ouvert d'un point x d'une variété projective X. Une application $f : U \to F$ est une fonction régulière au point x s'ils existent $F, G \in F[T_0, \cdots, T_n]$ des polynômes homogènes de même degré tels que $G(x) \in 0$ et $f = F/G$ dans un voisinage de x ; f est régulière sur U si elle est régulière en tout x de U.*

Définition 15.6.5 *Soit X une variété projective. L'idéal de X est l'ensemble*

$$I(X) = \{F \in F[T_0, \cdots, T_n] | F(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

On définit également le corps des fonctions $K(X)$ de X comme le corps des fractions de la K-algèbre de type fini $K[T]/I(X)$.

Soit x un point de X et soient les couples (U, f) dans lesquels f est régulière sur U voisinage ouvert de x. On définit la relation d'équivalence suivante :

$$(U, f) \sim (U', f') \Longleftrightarrow f = f' \text{ sur } U \cap U'$$

dont les classes d'équivalences forment un anneau.

16 Courbes planes.

16.1 Courbes planes affines.

Une courbe algébrique plane sur un corps K est formée par les points

$$\mathcal{C} : \left\{(x, y) \in K^2 \mid f(x, y) = 0\right\}$$

pour un polynôme non-constant $f(x, y)$ dans l'anneaux factoriel $K[x, y]$, donc $f = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{k_r}$, où f_i sont irréductibles non-proportionnels. Ceci implique que

$$\mathcal{C} = \cup_{i=1}^r \mathcal{C}_i,$$

où $\mathcal{C}_i : f_i = 0$ est une courbe dite irréductible.

Remarque 16.1.1

(a) Si K est algébriquement clos, alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}(K)$ est infinie

(b) Si K est algébriquement clos, alors un polynôme g de $K[x, y]$ s'annule sur toute la courbe irréductible $\mathcal{C}_i(K)$ si et seulement si $f_i | g$.

16.2 Courbes planes projectives.

Rappelons qu'un point P du plan projectif $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_K$ est donnée comme la classe d'équivalence, notée $(X : Y : Z)$, d'un triplet non-nul $(X, Y, Z) \in K^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$, de telle façon que $(X, Y, Z) \sim (X', Y', Z') = (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ $(\lambda \in K^*)$.

On a l'inclusion

$$\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 1),$$

qui donne tous les points de $\mathbb{P}^2$ avec $Z \neq 0$.

On a les relations suivantes entre les coordonnées affines (x, y) est les coordonnées projrctives $(X : Y : Z)$:

$$X = xZ, Y = yZ, \quad x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$$

Cartes affines

On a les trois parties suivantes de $\mathbb{P}^2$:

$$\mathbb{A}^2_1, \mathbb{A}^2_2, \mathbb{A}^2_3 \subset \mathbb{P}^2, \text{ telles que } \mathbb{A}^2_1 : X \neq 0, \ \mathbb{A}^2_2 : Y \neq 0, \ \mathbb{A}^2_3 : Z \neq 0.$$

isomorphes a K^2, et on a les coordonnées

$$\begin{aligned}
&\text{sur } \mathbb{A}^2_1 : X = xZ, Y = yZ, \quad x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z} \\
&\text{sur } \mathbb{A}^2_2 : X = x'Y, Z = y'Y, \quad x' = \frac{X}{Y}, y' = \frac{Z}{Y} \\
&\text{sur } \mathbb{A}^2_3 : Y = x''X, Z = y''X, \quad x'' = \frac{Y}{X}, y'' = \frac{Z}{X}
\end{aligned}$$

Exercice. Réécrire l'équation de la courbe de Fermat en coordonnées (x', y') et en (x'', y'').

Une courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2$ est donnée par une équation homogène dans les coordonnées projectives : $F(X, Y, Z) = 0$, alors l'égalité $F(X, Y, Z) = 0$ ne dépend pas de choix des coordonnées projectives : si $(X', Y', Z') = (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$, alors $F(X', Y', Z') = \lambda^d F(X, Y, Z) = 0$, où d est le degré homogène du polynôme F.

16.3 Points singuliers.

Soit K un corps. Rappelons qu'une courbe projective plane $\mathcal{C}$ sur K est définit par une équation de type $F(X : Y : Z) = 0$, où $F(X : Y : Z) \in K[X, Y, Z]$ est une forme homogène des variables projectives X, Y, Z.

L'équation de la tangente dans les coordonnées affines a la forme

$$f'_x(P)(x - \alpha) + f'_y(P)(y - \beta) = 0.$$

Par la construction,

$$f(x, y) = F(x, y, 1), \text{ où } F(X, Y, Z) = 0 \text{ l'équation homogène de la courbe.}$$

Ceci implique : $f'_x = F'_x, f'_y = F'_y$, et selon le théorème connu de Euler (sur les fonctions homogènes) on a

$$XF'_X + YF'_Y + ZF'_Z = nF \text{ où } n \text{ est le degré de } F$$

Lorsque $P = (\alpha : \beta : 1)$ se trouve sur la courbe alors

$$\alpha F'_X(P) + \beta F'_Y(P) + F'_Z(P) = nF,$$

donc l'équation de la tangente se transforme vers

$$xF'_X(P) + yF'_Y(P) + F'_Z(P) = 0 \Longleftrightarrow XF'_X + YF'_Y + ZF'_Z = 0.$$

DÉFINITION 16.3.1

(a) Un point singulier sur une courbe projective plane $\mathcal{C}$ sur K est toute solution du système

$$F = F'_X = F'_Y = F'_Z = 0$$

dans une extension de K.

(b) On dit qu'une courbe projective plane $\mathcal{C}$ sur K est lisse si le système

$$F = F'_X = F'_Y = F'_Z = 0$$

n'a pas de solutions non–triviales dans toute extension de K.

EXEMPLE.

(a) Soit $Q(X, Y, Z)$ une forme quadratique de matrice A_Q, sur un corps K de caractéristique $\mathrm{Car}(K) \neq 0$. Montrer que la conique $Q(X, Y, Z) = 0$ est non-singulière si et seulement si A_Q est inversible.

(b) Soit $Car(K) \neq 2, 3$, et soit $\mathcal{C}$ donnée par l'équation homogène correspondante

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3,\ O = (0 : 1 : 0).$$

On vérifie que cette courbe est lisse si et seulement si le polynôme cubique $x^3 + ax + b$ n'a pas de racines multiplies (directement par la définiton des points singuliers comme des solutions de l'équation $F = F'_X = F'_Y = F'_Z = 0$ dans le cas général $F(X, Y, Z) = Y^2 + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3$).

(c) Soit $K = \mathbb{F}_2$, et soit $\mathcal{C}$ une courbe sur K donnée par l'équation affine

$$y^2 + y = x^3 + ax + b,\ a, b \in \mathbb{F}_2$$

Montrer que cette courbe est toujours lisse (on n'a plus besoin d'exclure ici le cas des racines multiples).

(d) Soit $K = \mathbb{F}_3$, et soit $\mathcal{C}$ une courbe sur K donnée par l'équation affine :

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{F}_3$$

Montrer que cette courbe est lisse si et seulement si le polynôme cubique à droite n'a pas de racines multiples.

16.4 Equations cubiques

Le problème de l'existence d'une solution.

Pour les *formes cubiques* $F(X, Y, Z)$ en trois variables de coefficients entiers, on ne connait pas d'algorithme qui decide en générale si l'équation $F = 0$ possède une solution non-triviale en nombres entiers. Grandes classes de telles equations ont étés étudiées de point de vue théorique et numerique ; par exemple Selmer E.S. en 1951–1954 a étudié en detail les équations de type

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0.$$

Il arrive que même pour des équations simple comme $3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0$ le principe de Minkowski–Hasse n'est pas valable : on peut montrer que cette équation n'a pas de solutions en nombres entiers, quoiqu'il existe des solutions réelles et des solution primitives modulo tout $N > 1$.

Addition de points sur une cubique plane

Toute forme cubique non-nulle $F(X,Y,Z)$ à coefficients entiers definie une courbe cubique $\mathcal{C}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2$ (sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{C}$) :

$$\mathcal{C} = \{(X : Y : Z) \mid F(X,Y,Z) = 0\}. \tag{16.1}$$

Si $\mathcal{C}$ est non-singulière et si $F = 0$ possède au moins une solution rationnelle, alors on peut trouver un changement de variables inversible à coefficients rationnelles qui réduit F à la forme normale de Weierstrass

$$Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3 \qquad (a, b \in \mathbb{Q}). \tag{16.2}$$

On peut aussi supposer que la solution rationnelle de depart devient la solution évidente $(0 : 1 : 0)$ de l'équation ainsi obtenue (16.2). La condition de non-singularité de (16.2) est équivalente à la non-annulation du discriminant $4a^3 + 27b^2$. Une courbe cubique plane non-singulière est dite *elliptique*, s'elle possède un point rationnel. En utilisant les coordonnées affines $x = X/Z, y = Y/Z$ on réduit $F = 0$ à la forme suivante :

$$y^2 = x^3 + ax + b, \tag{16.3}$$

où le polynôme cubique dans la partie droite n'a pas de racines multiples. Sous cette forme affine, la solution rationnelle ci-dessus devient le point à l'infinie O. Il existe une jolie description gométrique de la loi de composition sur l'ensemble des points rationnels de $\mathcal{C}$ qui devient un groupe abélien avec le point à l'infinie O comme l'élément neutre. Cette loi est donnée par la "méthode de sécantes et tangentes" de Poincaré. Notamment, pour une pair de points $P, Q \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, on construit d'abord une droite passant par P, Q. Une telle droite intersecte aussi $\mathcal{C}$ en un troisième point bien définie P'. Ensuite, on construit de nouveau une droite passant par P' et O. Enfin, son troisème point d' intersection avec $\mathcal{C}$ est dit la somme $P + Q$. Si $P = Q$, la première droite à construire doit bien-sûr etre tangente à $\mathcal{C}$ en P.

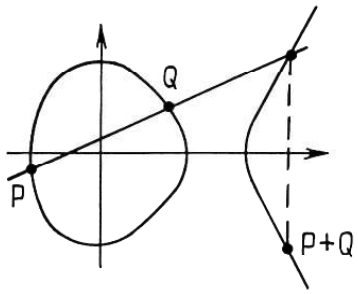


Fig. 6

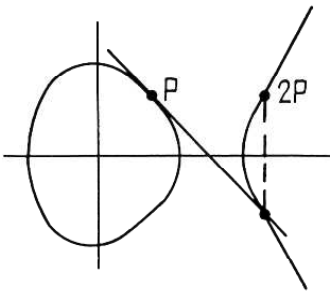


Fig. 7

Un calcul simple en coordonnées affines $P = (x_1, y_1),\ Q = (x_2, y_2)$ montre que $P + Q = (x_3, y_3)$ où

$$x_3 = -x_1 - x_2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2,$$
$$y_3 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - x_3) - y_1. \tag{16.4}$$

Dans le cas limite $P = Q$ on remarque que $2y'_x y = 3x^2 + a$, et on obtient

$$x_3 = -2x_1 + \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)^2,\ y_3 = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}(x_1 - x_3) - y_1. \tag{16.5}$$

Si $x_1 = x_2$ et $y_1 = -y_2$ alors $P + Q = O$, est le point à l'infinie, qui est l'élément neutre pour la loi de groupe.

Cette méthode nous permet de construir de nouveaux points rationnels à partir des points connues. Tels points forment un sous-groupe engendré par des points de départ, par exemple, $mP,\ m \in \mathbb{Z}$, à partir juste un seul point P.

Pour les courbes cubiques singulières cette construction ne marche pas. Par exemple, on considère la courbe

$$\mathcal{C}:\ y^2 = x^2 + x^3, \tag{16.6}$$

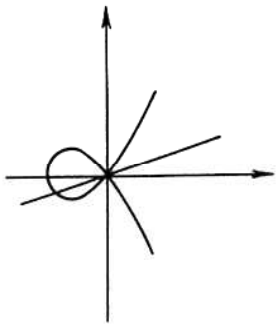


figure 8.

qui est représentée par Fig. 8. Toute droite passant par $(0, 0)$ n'a qu'un seul autre point d'intersection avec $\mathcal{C}$: sur $y = tx$ il est donné par l'équation $x^2(t^2 - x - 1) = 0$. A part de la solution triviale $x = 0$, on obtient $x = t^2 - 1$ et $y = t(t^2 - 1)$ donc nous avons trouvé tous les points sur $\mathcal{C}$ à l'aide d'une parametrisation rationnelle. Dans le cas non-singulier il n'existe pas de telle parametrisation.

Une courbe admettant une parametrisation rationnelle est dite une courbe rationnelle. Rapellons qu'un autre exemple d'une courbe rationnelle est donné par une conique plane et sa projection stéréographique.

La structure de groupe des points rationnels sur une cubique plane

Une propriété très remarquable de la "méthode de sécantes et tangentes" de Poincaré est que cette méthode nous permet de construir tous les points rationnels à partir d'un nombre fini des points rationnels. De point de vue de la théorie des groupes, cela signifie, que le résultat suivant a lieu :

THÉORÈME 16.4.1 (MORDELL, 1922) *Le groupe abélien $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ est de génération finie.*

On obtient alors du théorème de structure des groupes abéliens que

$$\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \cong \Delta \times \mathbb{Z}^r$$

où Δ est le sous-groupe fini formé par les points de torsion, et $\mathbb{Z}^r$ est le produit de r copies du groupe cyclique infini. Le nombre r est dit le rang de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{Q}$. Il est connu que le groupe de torsion Δ peut être déterminée explicitement. Par exemple, Nagell et Lutz (Lutz E. (1937)) ont démontré que les points de torsion d'une courbe $y^2 = x^3 + ax + b$ avec a et b des nombres entiers, ont les coordonnées entiers x, y. De plus, l'ordonnée y d'un point de torsion soit nulle soit divise le nombre entier $D = -4a^3 - 27b^2$.

B.Mazur a démontré en 1976 que le sous-groupe de torsion Δ sur $\mathbb{Q}$ est isomorphe a l'un des quinze groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\ (m \leq 10, m = 12),\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\ (n \leq 4), \tag{16.7}$$

et toutes ces possibilitées se réalisent.

Une question ouverte importante est si r peut être infiniement grand. En 1982 J.-L. Mestre a construit des exemples de courbes de rang au moins 14. Il a donné aussi un exemple relativement simple d'une courbe de rang ≥ 9 : $y^2 + 9767y = x^3 + 3576x^2 + 425x - 2412$.

En 2000 Martin – Mcmillen ont trouvé une courbe elliptique de rang ≥ 24 :

$$\begin{aligned} y^2 \quad & +xy + y = x^3 - 120039822036992245303534619191166796374x \\ & +504224992484910670010801799168082726759443756222911415116 \end{aligned}$$

(voir `http ://www.math.hr/ duje/tors/rankhist.html` pour d'autres exemples).

Exemples.

1. Soit $\mathcal{C}$ donnée par l'équation
$$y^2 + y = x^3 - x.$$
dont les solutions en nombre entiers donnent la liste des cas où le produit de deux entiers consecutifs est égale au produit de trois entiers consecutifs. Alors le groupe Δ est trivial et $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ est cyclique de générateur $P = (0, 0)$.

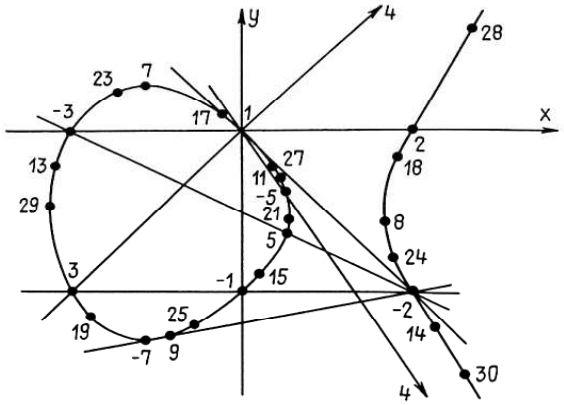


figure 9.

2. Les points mP (numérotés par m) sont montrés dans le Figure 9.
3. Soit $\mathcal{C}$ donnée par l'équation
$$y^2 + y = x^3 - 7x + 6.$$
Alors $\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^3$, et les points (1,0), (6,0), (0,2) forment une base de ce groupe.
4. Considérons la courbe $y^2 = x^3 + px,\ p = 877$. Un générateur modulo torsion du groupe des points rationnels de cette courbe a l'abscisse x
$$x = \frac{3754945281271621931055040699420927923462 01}{6215987776871505425463220780697238044100}.$$
Cet exemple montre que les méthodes naives de recherche des ponts rationnels deviennent rapidement inefficace.

Congruences cubiques modulo un nombre premier p

Soit p un nombre premier et soit $F(X_0, X_1, X_2)$ une forme cubique à coefficients entiers. La réduction de F modulo p, donne une forme cubique sur le corps fini $\mathbb{F}_p$. Cette reduction est dit non-singulère s'elle n'a pas de zéros communs avec ces dérivées partielles dans toute extension de $\mathbb{F}_p$. On peut montrer que la plupart des résultats de la géométrie algébrique complexe restent valable sur les corps de caractéristique positive. Cependant, les formes normales d'une courbe elliptique sont légérement plus compliquées. En utilisant un changement de variables inversible des coordonneés projectives, on peut toujours réduire l'équation $F = 0$ en coordonnées affines à l'un des types suivantes(Koblitz N. (1987)) :

1. Pour $p \neq 2, 3$:
$$y^2 = x^3 + ax + b \ (4a^3 + 27b^2 \neq 0), \ a, b \in \mathbb{F}_p. \tag{16.8}$$
(on interdit le cas des racines multiples).
2. Pour $p = 2$:
$$y^2 + y = x^3 + ax + b, \ a, b \in \mathbb{F}_2 \tag{16.9}$$
(on n'a plus besoin d'exclure ici le cas des racines multiples).
3. Pour $p = 3$:
$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \ a, b, c \in \mathbb{F}_3 \tag{16.10}$$
(on reinterdit le cas des racines multiples).

La courbe projective ainsi défini possède toujours le point $O = (0 : 1 : 0)$, rationnel sur $\mathbb{F}_p$ (rappelons que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{F}_p)$ des points rationnels sur $\mathbb{F}_p$ d'une courbe projective $\mathcal{C} \ : F(X, Y, Z) = 0$ est le sous-ensemble de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ des points

$$\Big\{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p} \mid F(X, Y, Z) = 0\Big\}$$

Combien de points sur $\mathbb{F}_p$, c'est-à-dire, combien de solutions projectives de la congruence $F \equiv 0 \bmod p$, peut-on avoir ? Bien evidemment, le nombre total est au plus $2p + 1$ (on compt O), puisque sous la forme affine tout point fini x donne au plus deux valeurs de y. D'un autre coté, seulement une moitié des classes résiduelles sont les carrés (pour p impaire). Donc on peut espérer que $x^3 + ax + b$ est un carré pour environ une moitié des x'.

Plus précisemment, soit $\chi(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$ le symbole de Legendre (9.1). Alors on a par la définition, que le nombre de solutions de $y^2 = u$ dans $\mathbb{F}_p$ est $1 + \chi(u)$. Ceci implique,

$$\begin{aligned} \text{Card } \mathcal{C}(\mathbb{F}_p) &= 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} (1 + \chi(x^3 + ax + b)) \\ &= p + 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{x^3 + ax + b}{p}\right). \end{aligned}$$

N. Koblitz (1987) compare la dernière somme avec un résultat sur les marches aléatoires sur une droite. Après p marches on peut espérer d'être à distance environ $\sqrt{p}$ de zéro. En fait, on peut démontrer le théorème suivant remarquable :

THÉORÈME 16.4.2 (H.HASSE (1937)) *Soit* $N_p = \text{Card } \mathcal{C}(\mathbb{F}_p)$. *Alors*

$$|N_p - (p + 1)| \leq 2\sqrt{p}.$$

Un preuve élémentaire a été donné par Yu.I.Manin (1956).

REMARQUE. Les courbes elliptiques sur les corps finis trouvent beaucoup d'applications. En particulier, les cas où un tel groupe est cyclique de grand taille amènent au cryptosystèmes ECDLP ("Elliptic curve discrete logarithm problem"), voir [Kob87].

EXERCICES

16.1 On considère la courbe affine sur $\mathbb{Q}$ donnée par l'équation

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 3y^2 = 5.$$

(a) Montrer qu'il existe un point rationnel $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$.
(b) Soit $t \in \mathbb{Q}$. Trouver tous les points d'intersection de la droite

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

avec la courbe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$.
(c) En déduire une parametrisation rationnelle de la courbe $\mathcal{C}$.
(d) Trouver tous les points rationnels de la courbe projective, donnée par l'équation homogène $2X^2+3Y^2-5Z^2 = 0$.

16.2 On considère la courbe affine sur $\mathbb{F}_{49}$, donnée par l'équation

$$\mathcal{C} : 2x^2 + 3y^2 = 5.$$

(a) Montrer qu'il existe un point rationnel $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}(\mathbb{F}_{49})$.
(b) Soit $t \in \mathbb{F}_{49}$. Trouver tous les points d'intersection de la droite

$$y - y_0 = t(x - x_0)$$

avec la courbe $\mathcal{C}(\mathbb{F}_{49})$.
(c) En déduire une parametrisation rationnelle sur $\mathbb{F}_{49}$ de la courbe $\mathcal{C}$.
(d) Trouver tous les points rationnels sur $\mathbb{F}_{49}$ de la courbe projective donnée par l'équation homogène $2X^2 + 3Y^2 - 5Z^2 = 0$.

16.3 On considère la courbe cubique plane $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^2$ sur $\mathbb{Q}$, donnée sous la forme affine suivante $y^2 = x(x+9)(x-16)$.
(a) Trouver l'equation de $\mathcal{E}$ en coordonnées projectives.
(b) Montrer que la courbe $\mathcal{E}$ est lisse.
(c) Montrer que l'ensemble

$$G = \{(\infty, \infty), (0,0), (0,-9), (0,16), (-4,20), (-4,-20), (36,180), (36,-180)\} \subset \mathbb{P}^2$$

est un sous-groupe de $\mathcal{E}(\mathbb{Q})$.
(d) Le groupe G est-il cyclique ?

16.4 On considère une courbe cubique plane $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}^2$ sur $\mathbb{F}_4$, donnée sous la forme affine suivante $y^2+y = x^3+x+1$.
(a) Montrer que la courbe $\mathcal{F}$ est lisse.
(b) Trouver l'ordre du groupe $H = \mathcal{F}(\mathbb{F}_4)$.
(c) Le groupe H est-il cyclique ?

16.5 Points des courbes algébriques sur les corps finis (exemples)

COURBE de FERMAT sur GF(4)

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

```
> restart ;
> with(linalg) :

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> g:=x^2+x+1 mod 2;
```

$$g := x^2 + x + 1$$

```
> alias(alpha = RootOf(g)) ;
```

$$\alpha$$

```
> f:=(x,y,z)->x^3+y^3+z^3;
```

$$f := (x,\, y,\, z) \to x^3 + y^3 + z^3$$

```
> h:=(i,j)->x[i-1,j-1]: X:=Matrix(3,2,h);
```

$$X := \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} \\ x_{2,0} & x_{2,1} \end{bmatrix}$$

```
> u:=(i,j)-> alpha^(i-1):U:=Matrix(2,1,u);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> Y:= Multiply(X, U);
```

$$Y := \begin{bmatrix} x_{0,0} + x_{0,1}\,\alpha \\ x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha \\ x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha \end{bmatrix}$$

```
> v[1]:=f(0, 1, x[2]);
```

$$v_1 := 1 + {x_2}^3$$

```
> v[2]:=f(1, x[1], x[2]);
```

$$v_2 := 1 + {x_1}^3 + {x_2}^3$$

```
> vv[1]:=subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[1]) ;
```

$$vv_1 := 1 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha)^3$$

```
> vv[2]:= subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[2]) ;
```

$$vv_2 := 1 + (x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha)^3 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha)^3$$

```
> c:=0;
> if f(0,0,1) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c, [0, 0, 1]) fi;
> for i from 0 to 1 do
> for j from 0 to 1 do
> if Eval(vv[1],{x[2,0]=i,x[2,1]=j}) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c,[0, 1, i+j*alpha]) fi ;od ;od;
> for i2 from 0 to 1 do
> for j2 from 0 to 1 do
> for i1 from 0 to 1 do
> for j1 from 0 to 1 do
> if Eval(vv[2],{x[2,0]=i2,x[2,1]=j2, x[1,0]=i1,x[1,1]=j1}) mod 2
> =0 then c:=c+1;
> print (c,[1, (i1+j1*alpha)mod 2,
> (i2+j2*alpha)mod 2]) fi od; od ;od ;od;
```

$$c := 0$$

$$1,\, [0,\, 1,\, \alpha]$$

$$2,\, [0,\, 1,\, 1]$$

$$3,\, [0,\, 1,\, 1 + \alpha]$$

$$4,\ [1,\ \alpha,\ 0]$$
$$5,\ [1,\ 1,\ 0]$$
$$6,\ [1,\ 1+\alpha,\ 0]$$
$$7,\ [1,\ 0,\ \alpha]$$
$$8,\ [1,\ 0,\ 1]$$
$$9,\ [1,\ 0,\ 1+\alpha]$$

COURBE de FERMAT sur GF(16)

$$x^3+y^3+z^3=0$$

```
> restart ;
> with(linalg) :
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> g:=x^4+x+1 mod 2;
```

$$g := x^4+x+1$$

```
> alias(alpha = RootOf(g)) ;
```

$$\alpha$$

```
> f:=(x,y,z)->x^3+y^3+z^3;
```

$$f := (x,\ y,\ z) \to x^3+y^3+z^3$$

```
> h:=(i,j)->x[i-1,j-1]: X:=Matrix(3,4,h);
```

$$X := \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{bmatrix}$$

```
> u:=(i,j)-> alpha^(i-1):U:=Matrix(4,1,u);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> Y:= Multiply(X, U);
```

```
Warning, the assigned name GramSchmidt now has a global binding
```

$$Y := \begin{bmatrix} x_{0,0}+x_{0,1}\,\alpha+x_{0,2}\,\alpha^2+x_{0,3}\,\alpha^3 \\ x_{1,0}+x_{1,1}\,\alpha+x_{1,2}\,\alpha^2+x_{1,3}\,\alpha^3 \\ x_{2,0}+x_{2,1}\,\alpha+x_{2,2}\,\alpha^2+x_{2,3}\,\alpha^3 \end{bmatrix}$$

```
> v[1]:=f(0, 1, x[2]);
```

$$v_1 := 1+{x_2}^3$$

```
> v[2]:=f(1, x[1], x[2]);
```

$$v_2 := 1+{x_1}^3+{x_2}^3$$

```
> vv[1]:=subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[1]) ;
```

$$vv_1 := 1 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2 + x_{2,3}\,\alpha^3)^3$$

```
> vv[2]:= subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[2]) ;
```

$$vv_2 := 1 + (x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2 + x_{1,3}\,\alpha^3)^3 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2 + x_{2,3}\,\alpha^3)^3$$

```
> c:=0;
> if f(0,0,1) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c, [0, 0, 1]) fi;
> for i from 0 to 1 do
> for j from 0 to 1 do
> for k from 0 to 1 do
> for l from 0 to 1 do
> if Eval(vv[1],{x[2,0]=i,x[2,1]=j,x[2,2]=k,x[2,3]=l}) mod 2 =0
> then c:=c+1;
> print (c,[0, 1,
> i+j*alpha+k*alpha^2+l*alpha^3]) fi; od; od ;od ;od;
> for i2 from 0 to 1 do
> for j2 from 0 to 1 do
> for k2 from 0 to 1 do
> for l2 from 0 to 1 do
> for i1 from 0 to 1 do
> for j1 from 0 to 1 do
> for k1 from 0 to 1 do
> for l1 from 0 to 1 do
> if Eval(vv[2],{x[2,0]=i2,x[2,1]=j2,x[2,2]=k2,x[2,3]=l2,
> x[1,0]=i1,x[1,1]=j1,x[1,2]=k1,x[1,3]=l1}) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c,[1,
> i1+j1*alpha+k1*alpha^2+l1*alpha^3, i2+j2*alpha+k2*alpha^2+l2*alpha^3])
> fi; od; od ;od ;od;od;od;od; od;
```

$$c := 0$$

$$1,\ [0,\ 1,\ \alpha + \alpha^2]$$

$$2,\ [0,\ 1,\ 1]$$

$$3,\ [0,\ 1,\ 1 + \alpha + \alpha^2]$$

$$4,\ [1,\ \alpha + \alpha^2,\ 0]$$

$$5,\ [1,\ 1,\ 0]$$

$$6,\ [1,\ \alpha + \alpha^2 + 1,\ 0]$$

$$7,\ [1,\ 0,\ \alpha^2 + \alpha]$$

$$8,\ [1,\ 0,\ 1]$$

$$9,\ [1,\ 0,\ \alpha + 1 + \alpha^2]$$

COURBE de KLEIN sur GF(16)

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0$$

```
> fk:=(x,y,z)->x^3*y+y^3*z+z^3*x;
```

$$fk := (x,\ y,\ z) \to x^3\,y + y^3\,z + z^3\,x$$

```
> vk[1]:=fk(0, 1, x[2]);
```

$$vk_1 := x_2$$

```
> vk[2]:=fk(1, x[1], x[2]);
```

$$vk_2 := x_1 + {x_1}^3\,x_2 + {x_2}^3$$

```
> vvk[1]:=subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],vk[1]) ;
```

$$vvk_1 := x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2 + x_{2,3}\,\alpha^3$$

```
> vvk[2]:= subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],vk[2]) ;
```

$$\begin{aligned} vvk_2 &:= x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2 + x_{1,3}\,\alpha^3 \\ &+ (x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2 + x_{1,3}\,\alpha^3)^3\,(x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2 + x_{2,3}\,\alpha^3) \\ &+ (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2 + x_{2,3}\,\alpha^3)^3 \end{aligned}$$

```
> c:=0;
> if fk(0,0,1) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c, [0, 0, 1]) fi;
> for i from 0 to 1 do
> for j from 0 to 1 do
> for k from 0 to 1 do
> for l from 0 to 1 do
> if Eval(vvk[1],{x[2,0]=i,x[2,1]=j,x[2,2]=k,x[2,3]=l}) mod 2 =0
> then c:=c+1;
> print (c,[0, 1,
> i+j*alpha+k*alpha^2+l*alpha^3]) fi; od; od ;od ;od;
> for i2 from 0 to 1 do
> for j2 from 0 to 1 do
> for k2 from 0 to 1 do
> for l2 from 0 to 1 do
> for i1 from 0 to 1 do
> for j1 from 0 to 1 do
> for k1 from 0 to 1 do
> for l1 from 0 to 1 do
> if Eval(vvk[2],{x[2,0]=i2,x[2,1]=j2,x[2,2]=k2,x[2,3]=l2,
> x[1,0]=i1,x[1,1]=j1,x[1,2]=k1,x[1,3]=l1}) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c,[1,
> i1+j1*alpha+k1*alpha^2+l1*alpha^3, i2+j2*alpha+k2*alpha^2+l2*alpha^3])
> fi; od; od ;od ;od;od;od;od; od;
```

$$c := 0$$

$$c := 1$$

$$1,\ [0,\ 0,\ 1]$$

$$2,\ [0,\ 1,\ 0]$$

$$3,\ [1,\ 0,\ 0]$$

$$4,\ [1,\ 1+\alpha^2,\ \alpha^3]$$

$$5,\ [1,\ \alpha,\ \alpha^3+\alpha^2]$$

$$6,\ [1,\ \alpha+1,\ \alpha+\alpha^3]$$

$$7,\ [1,\ \alpha^3,\ \alpha+\alpha^2]$$

$$8,\ [1,\ 1+\alpha^2+\alpha,\ \alpha+\alpha^2]$$

$$9,\ [1,\ 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3,\ \alpha+\alpha^2]$$

$$10,\ [1,\ \alpha+\alpha^2,\ \alpha^3+\alpha+\alpha^2]$$

$$11,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ \alpha^3+1]$$

$$12,\ [1,\ 1+\alpha+\alpha^2,\ \alpha^3+1+\alpha^2]$$

$$13,\ [1,\ \alpha+\alpha^2+1,\ 1+\alpha^3+\alpha]$$

$$14,\ [1,\ \alpha^3+\alpha^2,\ \alpha+\alpha^2+1]$$

$$15,\ [1,\ \alpha+\alpha^3,\ \alpha+\alpha^2+1]$$
$$16,\ [1,\ \alpha+\alpha^2,\ \alpha+\alpha^2+1]$$
$$17,\ [1,\ \alpha^2,\ 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3]$$

COURBE de KLEIN sur GF(8)

$$x^3y+y^3z+z^3x=0$$

```
> restart ;
> with(linalg) :
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> g:=x^3+x+1 mod 2;
```

$$g := x^3+x+1$$

```
> alias(alpha = RootOf(g)) ;
```

$$\alpha$$

```
> fk:=(x,y,z)->x^3*y+y^3*z+z^3*x;
```

$$fk := (x,\ y,\ z) \to x^3\,y+y^3\,z+z^3\,x$$

```
> h:=(i,j)->x[i-1,j-1]: X:=Matrix(3,3,h);
```

$$X := \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
> u:=(i,j)-> alpha^(i-1):U:=Matrix(3,1,u);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> Y:= Multiply(X, U);
```

```
Warning, the assigned name GramSchmidt now has a global binding
```

$$Y := \begin{bmatrix} x_{0,0}+x_{0,1}\,\alpha+x_{0,2}\,\alpha^2 \\ x_{1,0}+x_{1,1}\,\alpha+x_{1,2}\,\alpha^2 \\ x_{2,0}+x_{2,1}\,\alpha+x_{2,2}\,\alpha^2 \end{bmatrix}$$

```
> vk[1]:=fk(0, 1, x[2]);
```

$$vk_1 := x_2$$

```
> vk[2]:=fk(1, x[1], x[2]);
```

$$vk_2 := x_1+{x_1}^3\,x_2+{x_2}^3$$

```
> vvk[1]:=subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],vk[1]) ;
```

$$vvk_1 := x_{2,0}+x_{2,1}\,\alpha+x_{2,2}\,\alpha^2$$

```
> vvk[2]:= subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],vk[2]) ;
```

$$vvk_2 := x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2 + (x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2)^3\,(x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2) + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2)^3$$

```
> c:=0;
> if fk(0,0,1) mod 2 = 0 then c:=c+1;
> print (c,  [0, 0, 1]) fi;
> for i from 0 to 1 do
> for j from 0 to 1 do
> for k from 0 to 1 do
> if Eval(vvk[1],{x[2,0]=i,x[2,1]=j,x[2,2]=k}) mod 2 =0 then
> c:=c+1;
> print (c,  [0, 1, i+j*alpha+k*alpha^2])
> fi; od; od ;od ;
> for i2 from 0 to 1 do
> for j2 from 0 to 1 do
> for k2 from 0 to 1 do
> for i1 from 0 to 1 do
> for j1 from 0 to 1 do
> for k1 from 0 to 1 do
> if Eval(vvk[2],{x[2,0]=i2,x[2,1]=j2,x[2,2]=k2,
> x[1,0]=i1,x[1,1]=j1,x[1,2]=k1}) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c, [1, i1+j1*alpha+k1*alpha^2,
> i2+j2*alpha+k2*alpha^2]) fi; od; od ;od ;od;od;od;
```

$$c := 0$$

$$c := 1$$

$$1,\ [0,\ 0,\ 1]$$

$$2,\ [0,\ 1,\ 0]$$

$$3,\ [1,\ 0,\ 0]$$

$$4,\ [1,\ \alpha,\ \alpha^2]$$

$$5,\ [1,\ 1,\ \alpha^2]$$

$$6,\ [1,\ 1+\alpha,\ \alpha^2]$$

$$7,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ \alpha]$$

$$8,\ [1,\ 1,\ \alpha]$$

$$9,\ [1,\ 1+\alpha+\alpha^2,\ \alpha]$$

$$10,\ [1,\ \alpha^2,\ \alpha^2+\alpha]$$

$$11,\ [1,\ 1,\ \alpha^2+\alpha]$$

$$12,\ [1,\ 1+\alpha^2,\ \alpha^2+\alpha]$$

$$13,\ [1,\ \alpha^2,\ 1]$$

$$14,\ [1,\ \alpha,\ 1]$$

$$15,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ 1]$$

$$16,\ [1,\ \alpha,\ 1+\alpha^2]$$

$$17,\ [1,\ 1+\alpha^2,\ 1+\alpha^2]$$

$$18,\ [1,\ 1+\alpha+\alpha^2,\ 1+\alpha^2]$$

$$19,\ [1,\ \alpha^2+\alpha,\ 1+\alpha]$$

$$20,\ [1,\ 1+\alpha^2,\ 1+\alpha]$$
$$21,\ [1,\ 1+\alpha,\ 1+\alpha]$$
$$22,\ [1,\ \alpha^2,\ 1+\alpha+\alpha^2]$$
$$23,\ [1,\ 1+\alpha,\ 1+\alpha+\alpha^2]$$
$$24,\ [1,\ 1+\alpha+\alpha^2,\ 1+\alpha+\alpha^2]$$

COURBE de FERMAT sur GF(8)

```
> restart ;
> with(linalg) :
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> g:=x^3+x+1 mod 2;
```

$$g := x^3 + x + 1$$

```
> alias(alpha = RootOf(g)) ;
```

$$\alpha$$

```
> f:=(x,y,z)->x^3+y^3+z^3;
```

$$f := (x,\ y,\ z) \to x^3 + y^3 + z^3$$

```
> h:=(i,j)->x[i-1,j-1]: X:=Matrix(3,3,h);
```

$$X := \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
> u:=(i,j)-> alpha^(i-1):U:=Matrix(3,1,u);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> Y:= Multiply(X, U);
```

```
Warning, the assigned name GramSchmidt now has a global binding
```

$$Y := \begin{bmatrix} x_{0,0} + x_{0,1}\,\alpha + x_{0,2}\,\alpha^2 \\ x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2 \\ x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2 \end{bmatrix}$$

```
> v[1]:=f(0, 1, x[2]);
```

$$v_1 := 1 + {x_2}^3$$

```
> v[2]:=f(1, x[1], x[2]);
```

$$v_2 := 1 + {x_1}^3 + {x_2}^3$$

```
> vv[1]:=subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[1]) ;
```

$$vv_1 := 1 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2)^3$$

```
> vv[2]:= subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[2]) ;
```

$$vv_2 := 1 + (x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha + x_{1,2}\,\alpha^2)^3 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha + x_{2,2}\,\alpha^2)^3$$

```
> c:=0;
> for i from 0 to 1 do
> for j from 0 to 1 do
> for k from 0 to 1 do
> if Eval(vv[1],{x[2,0]=i,x[2,1]=j,x[2,2]=k}) mod 2 =0 then
> c:=c+1;
> print (c,[0, 1, i+j*alpha+k*alpha^2])
> fi; od; od ;od ;
> for i from 0 to 1 do
> for j from 0 to 1 do
> for k from 0 to 1 do
> for i1 from 0 to 1 do
> for j1 from 0 to 1 do
> for k1 from 0 to 1 do
> if Eval(vv[2],{x[2,0]=i,x[2,1]=j,x[2,2]=k,
> x[1,0]=i1,x[1,1]=j1,x[1,2]=k1}) mod 2 =0 then c:=c+1;
> print (c,[1, (i1+j1*alpha+k1*alpha^2)
> mod 2 ,(i+j*alpha+k*alpha^2) mod 2]) fi; od; od ;od ;od;od;od;
```

$$c := 0$$

$$1,\ [0,\ 1,\ 1]$$

$$2,\ [1,\ 1,\ 0]$$

$$3,\ [1,\ 1+\alpha,\ \alpha^2]$$

$$4,\ [1,\ \alpha^2+\alpha+1,\ \alpha]$$

$$5,\ [1,\ \alpha^2+1,\ \alpha+\alpha^2]$$

$$6,\ [1,\ 0,\ 1]$$

$$7,\ [1,\ \alpha+\alpha^2,\ 1+\alpha^2]$$

$$8,\ [1,\ \alpha^2,\ \alpha+1]$$

$$9,\ [1,\ \alpha,\ 1+\alpha+\alpha^2]$$

COURBE de FERMAT sur GF(9)

$$x^4+y^4+z^4=0$$

```
> restart ;
> with(linalg) :
> g:=x^2+1 mod 3;
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

$$g := x^2+1$$

```
> alias(alpha = RootOf(g)) ;
```

$$\alpha$$

```
> f:=(x,y,z)->x^4+y^4+z^4;
```

$$f := (x,\ y,\ z) \to x^4+y^4+z^4$$

```
> h:=(i,j)->x[i-1,j-1]: X:=Matrix(3,2,h);
```

$$X := \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} \\ x_{2,0} & x_{2,1} \end{bmatrix}$$

```
> u:=(i,j)-> alpha^(i-1):U:=Matrix(2,1,u);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
> Y:= Multiply(X, U);
```

```
Warning, the assigned name GramSchmidt now has a global binding
```

$$Y := \begin{bmatrix} x_{0,0} + x_{0,1}\,\alpha \\ x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha \\ x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha \end{bmatrix}$$

```
> v[1]:=f(0, 1, x[2]);
```

$$v_1 := 1 + {x_2}^4$$

```
> v[2]:=f(1, x[1], x[2]);
```

$$v_2 := 1 + {x_1}^4 + {x_2}^4$$

```
> vv[1]:=subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[1]) ;
```

$$vv_1 := 1 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha)^4$$

```
> vv[2]:= subs(x[0]=Y[1,1],x[1]=Y[2,1], x[2]=Y[3,1],v[2]) ;
```

$$vv_2 := 1 + (x_{1,0} + x_{1,1}\,\alpha)^4 + (x_{2,0} + x_{2,1}\,\alpha)^4$$

```
> c:=0;
> for i from 0 to 2 do
> for j from 0 to 2 do
> if Eval(vv[1],{x[2,0]=i,x[2,1]=j}) mod 3 =0 then c:=c+1;
> print (c,[0, 1, i+j*alpha]) fi; od; od
> ;for i2 from 0 to 2 do
> for j2 from 0 to 2 do
> for i1 from 0 to 2 do
> for j1 from 0 to 2 do
> if Eval(vv[2],{x[2,0]=i2,x[2,1]=j2,x[1,0]=i1,x[1,1]=j1})
> mod 3 =0 then c:=c+1;
> print (c,[1, (i1+j1*alpha)mod 3
> ,(i2+j2*alpha) mod 3]) fi; od; od ;od ;od;
```

$$c := 0$$

$$1,\ [0,\ 1,\ 1 + \alpha]$$

$$2,\ [0,\ 1,\ 1 + 2\,\alpha]$$

$$3,\ [0,\ 1,\ 2 + \alpha]$$

$$4,\ [0,\ 1,\ 2 + 2\,\alpha]$$

$$5,\ [1,\ 1 + \alpha,\ 0]$$

$$6,\ [1,\ 1 + 2\,\alpha,\ 0]$$

$$7,\ [1,\ 2 + \alpha,\ 0]$$

$$8,\ [1,\ 2 + 2\,\alpha,\ 0]$$

$$9,\ [1,\ \alpha,\ \alpha]$$

$$10,\ [1,\ 2\,\alpha,\ \alpha]$$

$$11,\ [1,\ 1,\ \alpha]$$

12, $[1,\, 2,\, \alpha]$

13, $[1,\, \alpha,\, 2\,\alpha]$

14, $[1,\, 2\,\alpha,\, 2\,\alpha]$

15, $[1,\, 1,\, 2\,\alpha]$

16, $[1,\, 2,\, 2\,\alpha]$

17, $[1,\, \alpha,\, 1]$

18, $[1,\, 2\,\alpha,\, 1]$

19, $[1,\, 1,\, 1]$

20, $[1,\, 2,\, 1]$

21, $[1,\, 0,\, 1+\alpha]$

22, $[1,\, 0,\, 1+2\,\alpha]$

23, $[1,\, \alpha,\, 2]$

24, $[1,\, 2\,\alpha,\, 2]$

25, $[1,\, 1,\, 2]$

26, $[1,\, 2,\, 2]$

27, $[1,\, 0,\, 2+\alpha]$

28, $[1,\, 0,\, 2+2\,\alpha]$

Quatrième partie

Compléments et annexes

Annexe A

Annexe : Postulat de Bertrand

1 Répartition" des nombres premiers

Un des problèmes de l'arithmétique est celui de la "répartition" des nombres premiers, en quelque sorte de leur essaimage parmi les nombres entiers. On étudie ci-dessous quelques propriétés de cette répartition.

PROPOSITION 1.0.1 *Pour tout entier $n \geq 2$ il existe une séquence de longueur n d'entiers consécutifs dont aucun terme n'est premier.*

On considère la séquence $f : 1, \ldots, n \mapsto \mathbb{N}$ définie par $f(k) = (n+2)! + k + 1$. Pour tout $k \in 1, \ldots, n$ le nombre $f(k)$ est divisible par $k+1$ avec un quotient supérieur à $(n+1)!$.

THÉORÈME 1.0.2 *Pour tout entier $n \geq 753$ on a*

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{n}{\log(n)} < \frac{13\log(4)}{30} \cdot \frac{n}{\log(n)} < \pi(2n) - \pi(n) < \log(4) \cdot \frac{n}{\log(n)} \frac{7}{5} \cdot \frac{n}{\log(n)}.$$

En particulier pour tout $n \geq 2$ il existe un nombre premier entre n et $2n$. La dernière assertion est connue comme étant le postulat de Bertrand.

La démonstration s'appuie sur une suite de lemmes donnant les propriétés de divisibilité des coefficients du binôme $\binom{2n}{n}$.

LEMME 1.0.3 *Pour tout entier $n \geq 2$ on a l'encadrement* $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} < \dbinom{2n}{n} < 4^n$.

La propriété est évidement vraie pour $n = 2$. La seconde inégalité résulte directement de la formule du binôme car on a raisonnant par récurrence sur n, on obtient les inégalités :

$$\binom{2n+2}{n+1} > \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \frac{4^n}{2\sqrt{n}} = \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(n+1/2)}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

qui permettent de conclure.

LEMME 1.0.4 *Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout nombre premier p, l'exposant de p dans la décomposition primaire de $n!$ est la somme finie* $\displaystyle\sum_{a=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^a}\right]$.

Parmi les facteurs naturels de $n!$, le nombre de ceux qui sont divisibles par p est le quotient de n par p, ce qui fournit un exposant 1 pour chacun d'eux. Le nombre de ceux qui sont divisibles par p^2 est le quotient de n par p^2, ce qui fournit un exposant 1 supplémentaire pour chacun d'eux, et ainsi de suite jusqu'au plus grand exposant a tel que $p^a = n$.

LEMME 1.0.5 *Pour tout $n \geq 2$, soit p un nombre premier divisant $\binom{2n}{n}$ et strictement supérieur à $\sqrt{2n}$. Alors p divise exactement $\binom{2n}{n}$.*

On applique le lemme précédent en remarquant que l'exposant de p dans $\binom{2n}{n}$ est la somme

$$\sum_{a=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^a} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^a} \right] \right).$$

Si p est strictement supérieur à $\sqrt{2n}$, cette somme se réduit à son premier terme qui est compris entre 0 et 1 et qui est égal à 1 si p divise $\binom{2n}{n}$.

LEMME 1.0.6 *Pour tout $n \geq 2$ tout nombre premier p et tout entier r, si p^r divise $\binom{2n}{n}$ alors p^r est strictement inférieur à $2n$.*

Pour tout entier $n > 2$, tout nombre premier p et tout entier r, on a

$$0 \leq \left[\frac{2n}{p^a} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^a} \right] \leq 1.$$

Dans la somme donnant l'exposant b de p dans $\binom{2n}{n}$, le nombre de sommants est inférieur ou égal au plus grand entier a tel que $p^a < 2n$. On a donc $p^b = p^a < 2n$.

LEMME 1.0.7 *Pour tout $n > 2$, tout nombre premier p inférieur à n et strictement supérieur à $2n/3$ ne divise pas $\binom{2n}{n}$.*

On a simplement $[2n/p] = 2\,[n/p] = 2$. Le même raisonnement montre que pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2[$ on peut remplacer $2/3$ par $\varepsilon + 1/2$.

LEMME 1.0.8 *Pour tout entier $n \geq 2$ le produit des nombres premiers strictement inférieurs à n est strictement inférieur à $4n$.*

Comme dans le Lemme 1.0.3, on montre que pour tout entier k on a . De plus, si p est un nombre premier compris entre $k+1$ et $2k+1$, l'application directe du Lemme 1.0.4 montre que p divise $\binom{2k+1}{k+1}$ avec l'exposant 1. On a donc la majoration

$$\prod_{k+1 \leq p \leq 2k+1} p \;\Big|\; \binom{2k+1}{k+1}$$

et $\prod_{k+1 \leq p \leq 2k+1} p < 4^k$. On conclut à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n à partir de $n \geq 3$.

PROPOSITION 1.0.9 - *Pour tout entier $n > 2$ soit $R(n)$ le produit des nombres premiers strictement compris entre n et $2n$. On a une décomposition $\binom{2n}{n} = R(n)Q(n)$ qui a les propriétés :*

– *Les nombres $R(n)$ et $Q(n)$ sont premiers entre eux ;*

– *Pour tout $\varepsilon > 0$ le nombre $Q(n)$ est strictement inférieur à $4^{(n+\varepsilon)/2}(2n)^{\sqrt{n/2}}$.*

– *Pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\frac{4^{(n-\varepsilon)/2}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}} < R(n) < (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)}.$$

Il est clair que $R(n)$ divise $\binom{2n}{n}$ car tout nombre premier strictement supérieur à n et strictement inférieur à $2n$ divise $(2n)!$ et est premier avec $n!$. Ceci prouve l'existence d'une telle décomposition. Si p est un nombre premier divisant $\binom{2n}{n}$ et compris entre n et $2n$, il divise $\binom{2n}{n}$ avec un exposant 1 d'après le Lemme 1.0.5, ce qui prouve que $R(n)$ et $Q(n)$ sont premiers entre eux et en particulier que tout les diviseurs premiers de $Q(n)$ sont inférieur à n. Ceux qui sont supérieurs à $\sqrt{2n}$ sont inférieurs à $(n+\varepsilon)/2$ et y figurent avec l'exposant 1 ; les facteurs premiers p qui sont inférieurs à $\sqrt{2n}$ y figurent avec un exposant r tel que p^r soit strictement inférieur à $2n$. Tout nombre premier étant 2 ou 3 ou de la forme $6s \pm 1$, leur nombre est majoré par $2 + \sqrt{2n}/3$.
La seconde assertion résulte directement de cette considération et du Lemme 1.0.8. La majoration de $R(n)$ est évidente. Par ailleurs on a d'après ce qui précède et le Lemme 1.0.3, en passant à la limite sur ε :

$$R(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{Q(n)} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{4^{n/2}(2n)^{2+\sqrt{n/2}/3}} = \frac{4^{n/2}}{2\sqrt{n}(2n)^{2+\sqrt{n/2}/3}}.$$

Démonstration du Théorème 1.0.2. La majoration de $\pi(2n) - \pi(n)$ résulte directement de la minoration de $R(n)$ donnée dans la Proposition 1.0.9. En ce qui concerne la minoration on a brutalement

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{n\log(4)}{2\log(2n)} - \frac{\log(2)}{\log(2n)} - \frac{\log(n)}{2\log(2n)} - 2 - \frac{\sqrt{2n}}{3}$$

Dans l'expression ci-dessus, on voit sans peine que pour n assez grand, la fonction

$$n \mapsto \frac{13\log(4)}{30} \cdot \frac{n}{\log(n)}$$

est inférieure à la fonction de droite de l'expression ci-dessus. Pour déterminer le n seuil qui est 753, on considère une petite session MAPLE résumée ci-dessous. On termine "à la main" pour démontrer le postulat de Bertrand.

```
> f := x → 2*x/15 ;
g :=x → (x*(ln(4)/2)−ln(2)−ln(x)−2−sqrt(2*x)/3)/ln(2*x) −(x−f(x))*ln(4)/(2*ln(x)) ;
evalf(g(752)) ;evalf(g(753)) ;
```

THÉORÈME 1.0.10 *Soit $n \mapsto p(n)$ la suite des nombres premiers. La série de terme général $1/p(n)$ est divergente.*

Bien entendu ce théorème est plus riche que celui qui dit que l'ensemble des nombres premiers est infini. La première démonstration de ce résultat est semble-t-il due à Leonard Euler. Ce théorème repose sur le lemme élémentaire

LEMME 1.0.11 *Pour tout réel strictement positif x, et pour tout entier n, soit $N(j,x)$ le cardinal de l'ensemble*

$$\mathcal{N}(j,x) = \{n \mid n \in \mathbb{N} \vee (0 < n \leq x) \vee (p \text{ premier et } p \text{ divise } n \Rightarrow p \leq p(j))\},$$

ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs à x dont tous les diviseurs premiers sont inférieurs ou égaux à $p(j)$. Alors on a $N(j,x) \leq 2^{j+1}\sqrt{x}$.

Tout entier naturel non nul n peut se décomposer de façon unique sous la forme $q(n)^2 m(n)$ où $m(n)$ est produit de nombres premiers tous différents (on dit que $m(n)$ est la partie sans facteur carrée ou "quadratfrei" de n). Le nombre des entiers quadratfrei appartenant à $\mathcal{N}(j,x)$ est au plus égal à $2j+1$. Le nombre des entiers carrés inférieurs à x est inférieur à $\sqrt{x}$. D'où le résultat, "à la louche".

Raisonnons par l'absurde et supposons que la dite série soit convergente. Il existerait un entier j tel que le reste de cette série $\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{p(k)}$ soit inférieur à $1/2$. Soit alors x un réel strictement supérieur à 2^{2j+4}. Le nombre des entiers inférieurs à x dont tous les diviseurs premiers sont inférieurs ou égaux à $p(j)$ est $N(j,x)$. Le nombre des entiers inférieurs à x dont au moins un diviseur premier est $p(k)$ avec $k = j+1$ est au plus $x/p(k)$. Dans ces conditions on a

$$x \leq N(j,x) + x \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{p(k)} \leq N(j,x) + \frac{x}{2}$$

Ceci implique $N(j,x) = x/2 > 2^{2j+3} > 2j + \frac{1}{x}$ et une contradiction avec le lemme. On en conclut que la série est divergente.

Un autre sujet d'excitation sur la répartition des nombres premiers est le Théorème des nombres premiers :

THÉORÈME 1.0.12 *Pour tout réel positif x, soit $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers strictement inférieurs à x. Lorsque x tend vers l'infini, $\pi(x)$ est équivalent à $x/ln(x)$. Plus précisément, il existe une constante c telle que*

$$\pi(x) = \sum_{p<x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + (x \exp(-c\sqrt{\log(x)}))$$

La première démonstration de ce théorème est due à De La Vallée Poussin en 1896. La difficulté dans ce genre de théorème est la détermination du "terme d'erreur", voir [Tenenbaum G., Mendes-France, Les nombres premiers, Collection Que Sais-Je, PUF, 1997]

2 Construction d'une table de nombres premiers.

Pour construire une (petite) table de nombre premiers, on peut utiliser de proche en proche les nombres premiers déjà déterminés. Dans la procédure suivante, on construit un tableau des M premiers nombres premiers et on détermine la liste complète de nombres premiers inférieurs au carré du $M_i$ème nombre premier. On gardera pour le texte le cas $M = 400$. On part du fait que tout nombre premier différent de 2 et de 3 est de la forme $6s \pm 1$.

```
program tabprim ;
const M0 =401 ; M1=400 ;
type indice =0..M1 ;
```

```
        table = tableau[indice] de entier ;
        liste = liste de entier ;
    var j : indice ;
        m,n,n2,x : entier ;
        prim : table ;
        prim_1 : liste ;
    debut adjoindre à prim_1 les nombres 2 et 3 ; prim[0] :=5 ;
      j :=0 ; x :=2 ; n := 5 ; n2 := 2 ; tant que j < M0 faire
      debut k :=0 ; tant que n mod prim[k] ≠ 0 et prim[k] ≤ n2 faire k := k+1 ;
        si n mod prim[k] > 0 alors
          debut j := j+1 ; prim[j] :=n ; adjoindre n à prim_1 fin ;
        n :=n+x ; x := 6-x ; m := n2*n2 ;
        tant que m < n faire debut m :=m + 2*n2 + 1 ; n2 := n2 + 1 fin
      fin ; à ce stade on a M0 nombres premiers en tableau
      tant que n2 = prim[M1] faire
        debut k :=0 ; tant que n mod prim[k] ≠ 0 et prim[k] = n2 faire k := k+1 ;
          si n mod prim[k] > 0 alors adjoindre n à prim_1 ;
          n :=n+x ; x := 6-x ; m := n2*n2 ;
          tant que m < n faire debut m :=m + 2*n2 + 1 ; n2 := n2 + 1 fin
        fin
      sortir (prim_1)
    fin.
```

Voici un programme en TEX pour construire une table des nombres premiers :

```
\newif\ifprime\newif\ifunknown
\newcount\n \newcount\p \newcount\d \newcount\a
\def\primes#1{2,~3% assume that #1 is at least 3
 \n=#1 \advance\n by -2
 \p=5
 \loop\ifnum\n>0 \printifprime\advance\p by2 \repeat}
\def\printp{,
 \ifnum\n=1 et~\fi
 \number\p \advance\n by -1 }
\def\printifprime{\testprimality \ifprime\printp\fi}
\def\testprimality{{\d=3 \global\primetrue
 \loop\trialdivision \ifunknown\advance\d by 2 \repeat}}
\def\trialdivision{\a=\p \divide\a by\d
 \ifnum\a>\d \unknowntrue\else\unknownfalse\fi
 \multiply\a by\d
 \ifnum\a=\p \global\primefalse\unknownfalse\fi}

 Par exemple, les quatre cent premiers nombres premiers sont
\primes{400}
```

Par exemple, les quatre cent premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683,

691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, et 2741

Annexe B

Annexe : Factorisation des polynômes (F. SERGERAERT)

- **Référence : Don Knuth, The Art of Computer Programming, vol. 2, pp. 381-398.**

```
> restart ;
> with(linalg) :
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

- La factorisation des polynômes n'est pas un sujet vraiment facile, pas plus que la factorisation des entiers ! On présente ici le principal outil, la *méthode de Berlekamp*, qui concerne en fait la factorisation dans le cas du *corps de base fini*, puis on explique dans les cas les plus simples comment elle peut être utillisée pour obtenir la factorisation des polynômes à coefficients rationnels.

1 Rappels sur les corps finis.

- On rappelle que p est premier si et seulement si tous les coefficients du binôme C(p, k) sont divisibles par p pour $0 < k < p$:

```
> seq(evalb(binomial(13,k) mod 13 = 0), k = 0..13) ;
> seq(evalb(binomial(9,k) mod 9 = 0), k = 0..9) ;
```

false, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *true*, *false*

false, *true*, *true*, *false*, *true*, *true*, *false*, *true*, *true*, *false*

- Il en résulte que si on travaille dans $Z/\ p$, la formule $(a+b)^p = a^p + b^p$ est valide, en particulier $(a+1)^p = a^p + 1$ et il en résulte par récurrence, partant de $1^p = 1$, que $a^p = a$ dans $Z/\ p$.

- Un corps K fini est de caractéristique bien définie p : c'est le plus petit entier positif vérifiant p x 1 = (déf.) 1 + 1 + ... + 1 (p fois) = 0. Nécessairement, p est *premier*, sinon on aurait dans K des diviseurs de 0. Le corps K contient donc en particulier le sous-corps $\{0, 1, 2, ..., p-1\} = Z/\ p$ qu'on notera simplement Z_p et K est donc un espace vectoriel sur Z_p de dimension d ; il a alors p^d éléments. La formule démontrant que le *morphisme de Frobenius* $a \to a^p$ est *Z-linéaire* (et donc

aussi Z_p-linéaire) : $(a+b)^p = a^p + b^p$ reste valable, mais il est maintenant *faux*, sauf si d=1, que a^p= a pour tout a de K. En effet, puisque $X^p - X$ est de degré p, il ne peut avoir que p racines dans K, à savoir les éléments de Z_p dans K. On verra que cette remarque est la clé de la *méthode de Berlekamp* pour factoriser un polynôme à coefficients dans Z_p.

- Le groupe *multiplicatif* des éléments non nuls de K a pour cardinal $p^d - 1$, et il en résulte que pour tous ces éléments, la relation $a^{(p^d-1)} = 1$ est satisfaite ; le polynôme $X^{(p^d)} - X$ a donc pour racines tous ces éléments, et de plus l'élément nul. Les éléments de K sont donc tous racines de ce polynôme,et il en résulte que $X^{(p^d)} - X = \prod_a (X - a)$ où a parcourt exactement tous les éléments de K. Donc K est un (donc *le*) corps de décomposition de ce polynôme et il en résulte qu'il n'existe qu'un seul corps de cardinal p^d.

- Soit P dans $Z_p[\,X]$ un polynôme *irréductible* de degré d. Alors le quotient $Z_p[\,X]/\,P$ est un corps à p^d éléments. Il résulte de ce qui précède que la *classe d'isomorphisme* de ce corps est indépendante de P. Le polynôme P divise nécessairement le polynôme $X^{(p^d)}$- X ; en effet, si x est la classe de X dans $Z_p\,[\,X]/\,P$, le polynôme minimal de x ne peut être que P, mais d'après ce qui est dit ci-dessus, x est aussi racine de $X^{(p^d)}$ - X et donc ce dernier polynôme est divisble par P. Il en résulte aussi que P est *entièrement* scindé dans K, donc une seule extension suffit toujours pour obtenir le corps de décomposition d'un polynôme irréductible : toute extension de Z_p est *galoisienne*.

Illustration.

```
> rnd := rand(0..2) :
```

- Contrairement au cas des coefficients entiers banals, il faut «tâtonner» un peu pour trouver un polynôme irréductible à coeffcients dans Z_3.

```
> _seed := 1639 :
> P := sort(X^3 + add(rnd()*X^i, i=0..2)) ;
```

$$P := X^3 + 2\,X^2 + 1$$

```
> Irreduc(P) mod 3 ;
```

true

- Il en résulte que le même polynôme est Q-irréductible :

```
> irreduc(P) ;
```

true

- Mais la réciproque est *fausse* : il arrive souvent qu'un polynôme soit Q-irréductible, mais pas Z_p-irréductible ; il arrive même que ceci se produise *quel que soit* p pour le même polynôme Q-irréductible, c'est le cas de $X^4 + 1$.

```
> irreduc(X^4+1) ;
```

true

```
> Irreduc(X^4+1) mod 67 ;
```

false

```
> Factor(X^4+1) mod 67 ;
```

$$(X^2 + 47\,X + 66)\,(X^2 + 20\,X + 66)$$

```
> Factor(X^4+1) mod nextprime(10^6) ;
```

$$(X^2 + 410588\,X + 1000002)\,(X^2 + 589415\,X + 1000002)$$

- Pour travailler *sous Maple* dans des extensions de Z_p, on procède comme pour les extensions de Q, mais il n'y a *aucune différence* dans l'usage initial de **RootOf**, c'est seulement *en fin de calcul* qu'on précise qu'on veut travailler dans Z_p et ses extensions, en *suffixant* par «**mod p**».

```
> alias(alpha = RootOf(P)) ;
```

$$\alpha$$

- Le quotient $Z_3[\,X]/\,P$ est un espace vectoriel de degré 3 sur Z_3, dont les éléments sont tous de la forme $i + j\,\alpha + k\,\alpha^2$ pour i, j et k parcourant Z_3.

- Calcul du polynôme ayant *exactement* tous les éléments de $Z_3[\,X]/\,P$ comme racine

```
> mul(mul(mul(X-i-j*alpha-k*alpha^2,
> k=0..2),
> j=0..2),
> i=0..2) ;
```

$$X\,(X-\alpha^2)\,(X-2\,\alpha^2)\,(X-\alpha)\,(X-\alpha-\alpha^2)\,(X-\alpha-2\,\alpha^2)\,(X-2\,\alpha)\,(X-2\,\alpha-\alpha^2)$$
$$(X-2\,\alpha-2\,\alpha^2)\,(X-1)\,(X-1-\alpha^2)\,(X-1-2\,\alpha^2)\,(X-1-\alpha)\,(X-1-\alpha-\alpha^2)$$
$$(X-1-\alpha-2\,\alpha^2)\,(X-1-2\,\alpha)\,(X-1-2\,\alpha-\alpha^2)\,(X-1-2\,\alpha-2\,\alpha^2)\,(X-2)$$
$$(X-2-\alpha^2)\,(X-2-2\,\alpha^2)\,(X-2-\alpha)\,(X-2-\alpha-\alpha^2)\,(X-2-\alpha-2\,\alpha^2)$$
$$(X-2-2\,\alpha)\,(X-2-2\,\alpha-\alpha^2)\,(X-2-2\,\alpha-2\,\alpha^2)$$

- Développement du produit.

```
> Expand(%) mod 3 ;
```

$$2\,X + X^{27}$$

- ... autrement dit $X^{27} - X$. A comparer avec :

```
> collect(evala(expand(%%)), [X, alpha]) :
```

- Vérification de la propriété de divisibilité.

```
> Divide(X^27-X, P) mod 3 ;
```

true

- Et pour cause :

```
> Factor(P, alpha) mod 3 ;
```

$$(X+\alpha^2+\alpha+1)\,(X+2\,\alpha^2+1)\,(X+2\,\alpha)$$

- Car, comme expliqué plus haut, *une seule extension* suffit toujours à décomposer *complètement* le polynôme initial. Propriété en général fausse dans le cas rationnel :

```
> factor(P, alpha) ;
```

$$(X-\alpha)\,(X^2+2\,X+X\,\alpha+2\,\alpha+\alpha^2)$$

2 Bases de la méthode de Berlekamp.

- On travaille dans l'anneau de polynômes $Z_p[\,X]$, pour un premier p, et sauf indication contraire, $Z_7[\,X]$ dans les exemples

- Soit P dans $Z_p[\ X]$ et $P = P_1 ... \ P_r$ sa décomposition en facteurs irréductibles. On suppose d'abord que P est sans facteur multiple, sinon ceci est détecté facilement par le PGCD du polynôme et du polynôme dérivé. Construisons un exemple de cette sorte.

```
> rnd := rand(0..6) :
> rndP := proc(n)
> RETURN(sort(X^n + add(rnd()*X^i, i=0..(n-1))))
> end :
> _seed := 1730 :
> P1, P2 := rndP(3), rndP(3) ;
```

$$P1,\ P2 := X^3 + X^2 + 2\,X + 4,\ X^3 + 4\,X^2 + 4\,X + 2$$

- Le polynôme qui suit va certainement avoir un facteur multiple, mais on *fait semblant* de ne rien savoir à ce propos.

```
> P := sort(Expand(P1^2 * P2) mod 7) ;
```

$$P := X^9 + 6\,X^8 + 3\,X^7 + 3\,X^4 + 5\,X^3 + 5\,X^2 + 5\,X + 4$$

- On détecte un facteur multiple éventuel par l'examen du PGCD entre le polynôme et son dérivé.

```
> Gcd(P, diff(P, X) mod 7) mod 7 ;
```

$$X^3 + X^2 + 2\,X + 4$$

- Et on commencerait par factoriser $X^3 + X^2 + 2\,X + 4$. Presque toujours (pas toujours, pourquoi ?) le polynôme initial est divisible par le carré de ce terme.

```
> Rem(P, %^2, X) mod 7 ;
```

$$0$$

```
> Quo(P, %%^2, X) mod 7 ;
```

$$X^3 + 4\,X^2 + 4\,X + 2$$

- ce qui redonne comme par hasard nos polynômes initiaux.

- On suppose donc désormais qu'il n'y a aucun facteur multiple dans P.

- Si $P = P_1 ... \ P_r$ est la décomposition de P en facteurs irréductibles, le *théorème du reste chinois* donne un isomorphisme canonique :

Z_p

$[\ X]/\ P = Z_p[\ X]/\ P_1 + ... \ Z_p[\ X]/\ P_r$. Les facteurs du second membre sont tous des corps, le premier membre n'est un corps que si P est irréductible, autrement dit si $r = 1$.

- Il en résulte, c'est l'astuce de Berlekamp, un test permettant, *sans connaître* r, de «deviner» sa valeur. Considérons en effet l'équation où l'inconnue V est un élément de $Z_p[\ X]/\ P$:

$V^P - V = 0$

- Si on traduit cette équation vers le second membre (qu'on ne connaît pas !), l'inconnue V devient un r-uplet $(\ V_1, ..., \ V_r)$, et comme l'isomorphisme utilisé *est un isomorphisme d'anneaux*, l'équation se transforme en r équations $V_i\ ^p = V_i$. Comme l'inconnue V_i est cette fois dans le *corps* $Z_p[\ X]/\ P_i$, on sait qu'il y a *exactement* les p racines $0, ..., \ p-1$ dans $Z_p[\ X]/\ P_i$. On en déduit que le cardinal des solutions est *exactement* p^r. Ainsi le cardinal de l'ensemble des solutions va nous donner le nombre fatidique r. D'une façon très approximative, on peut dire que Berlekamp observe

que *plus* P est réductible, *«moins»* $Z_p[\ X]/\ P$ est un corps, et plus l'ensemble des solutions de notre équation va être vaste.

- Le deuxième élément clé de la méthode de Berlekamp consiste à remarquer que puisque l'application $V \to V^p$ est *linéaire*, l'équation $V^p - V = 0$ est, malgré les apparences, une *équation linéaire*, et on dispose donc de tous les outils linéaires classiques pour la traiter.

- **Exemple.** Soit à étudier si notre polynôme **P1** est irréductible dans Z_7. Il faut construire la matrice de l'application linéaire $V \to V^p - V$ dans $Z_p[\ X]/\ P_1$. On prend la base canonique 1**,** X, X^2 (ou plus précisément leurs classes modulo P_1). L'image de X^j est donc la classe de $X^{(p\,j)} - X^j$, et les éléments de colonne correspondants sont les coefficients appropriés. On construit à part la procédure **BerlTerm** permettant le calcul du terme d'indices (i, j) de la *matrice de Berlekamp* du polynôme P par rapport à Z_p.

```
> BerlTerm := proc(p::posint, P::polynom(integer, X),
> i::posint, j::posint)
> RETURN(coeff(Rem(X^(p*(j-1))-X^(j-1), P, X) mod p,
> X, i-1))
> end :
```

```
> BerlMatrix1 := matrix(3, 3, (i,j) -> BerlTerm(7, P1, i,j)) ;
```

$$BerlMatrix1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- La *dimension du noyau* nous donne la dimension de l'espace des solutions, c'est-à-dire le nombre des facteurs irréductibles. On voit que le rang est 2, l'espace des solutions est donc de dimension 1, ce ne peut être que Z_7, solutions «inévitables», et notre polynôme est donc irréductible. Pour obtenir le rang de cette matrice dans le cas général, il faut utiliser la procédure **Nullspace** combinée avec **mod.**

```
> Nullspace(BerlMatrix1) mod 7 ;
```

$$\{[1,\ 0,\ 0]\}$$

- Vérification.

```
> Irreduc(P1) mod 7 ;
```

true

- Mëme travail avec P_2.

```
> BerlMatrix2 := matrix(3, 3, (i,j) -> BerlTerm(7, P2, i,j)) ;
```

$$BerlMatrix2 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Nullspace(BerlMatrix2) mod 7 ;
```

$$\{[1,\ 0,\ 0],\ [0,\ 0,\ 1]\}$$

```
> Irreduc(P2) mod 7 ;
```

false

- On voit qu'ici notre équation $V^p - V$ a 49 solutions, $49 = 7^2$, et notre polynôme a donc *deux* facteurs irréductibles. Il reste à les déterminer. Dans un cas si simple, c'est très facile, il suffit de chercher l'élément a de Z_7 nécessairement racine de P_2 et le quotient par $X - a$ donnera l'autre

facteur irréductible. Mais on veut expliquer comment il faut procéder dans le cas général. C'est le sujet de la section suivante.

```
> for i from 0 to 6 do
> if Eval(P2, X=i) mod 7 = 0 then print(i) fi
> od ;
```

$$3$$

```
> Quo(P2, X-3, X) mod 7 ;
```

$$X^2 + 4$$

```
> Irreduc(%) mod 7 ;
```

$$true$$

```
> Factor(P2) mod 7 ;
```

$$(X^2 + 4)\,(X + 4)$$

3 Trouver les facteurs irréductibles.

- Les solutions de l'équation $V^p - V = 0$ ne donnent pas seulement le *nombre* de facteurs irréductibles, chaque solution donne aussi une décomposition, en général *partielle*, mais toujours *non triviale*, du polynôme proposé en facteurs de degrés plus petits. Ceci est dû au fait que dans Z_p, nous avons la décomposition :

$V^p - V = V\,(V-1)$
... $(\,V - p - 1)$.

- Dire que V est une solution de $V^p - V$ dans $Z_p[\,X]/\,P$ revient à dire que P divise $V^p - V$, mais la factorisation ci-dessus de $V^p - V$ va justement nous permettre de «découper en tranches» le polynôme P.

- D'abord si P est irréductible, les seules solutions de $V^p - V = 0$ sont les éléments de Z_p, auquel cas le «polynôme» $V^p - V$ est non seulement divisible par P, il est même nul ! et aucune «information» ne peut être obtenue, heureusement.

- Par contre si P est factorisable, on va avoir des solutions différentes. Ces solutions vont être de «vrais» polynômes (non constants), et un tel polynôme V va être de degré forcément $< d = \text{degree}(P)$. On a alors le résultat suivant :

$P = \prod_{i=0}^{p-1} \text{PGCD}(P,\, V - i)$
.

- En effet $V^p - V$ est divisible par P, et donc tout facteur irréductible de P va diviser $V^p - V$ et se retrouver dans l'un des PGCD. Donc P divise le produit. Inversement, comme les $V - i$ sont *premiers deux à deux* (pourquoi ?), le même facteur de P ne peut pas se retrouver deux fois à droite. Compte tenu par ailleurs du fait que $\text{degree}(V - i) < d$, on voit donc qu'on a ainsi, quel que soit V solution «non constante» de $V^p - V = 0$, une factorisation non triviale de P.

- Essayons ce mécanisme avec notre polynôme P_2. Un V non trivial est à trouver dans le noyau de la matrice de Berlekamp :

```
> eval(BerlMatrix2) ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Nullspace(BerlMatrix2) mod 7 ;
```

$$\{[1, 0, 0], [0, 0, 1]\}$$

- Le générateur [1,0,0] du noyau correspond aux solutions triviales de $V^p - V = 0$, mais l'autre, [0,0,1], expression dans notre base du polynôme X^2, est une solution non triviale.

```
> Divide(X^14-X^2, P2) mod 7 ;
```

$$true$$

```
> seq(Gcd(P2, X^2-i) mod 7, i=0..6) ;
```

$$1, 1, X + 4, X^2 + 4, 1, 1, 1$$

- Et on a bien notre décomposition.

```
> evalb(P2 = Expand(mul(gcdi, gcdi=[%])) mod 7) ;
```

$$true$$

- Dans le cas général, il n'y a pas de raison que la décomposition *complète* de P soit ainsi obtenue à l'aide d'une seule solution non triviale V. C'est forcément ce qui arrive si le nombre de facteurs de P est plus grand que p. Construisons P de sorte qu'il ait au moins 8 facteurs.

```
> _seed := 1054 :
> for i from 1 to 8 do
> P||i := rndP(2)
> end do ;
```

$$P1 := X^2 + 4\,X + 2$$
$$P2 := X^2 + 2\,X + 3$$
$$P3 := X^2 + 3\,X + 2$$
$$P4 := X^2 + 2\,X$$
$$P5 := X^2 + 5\,X + 5$$
$$P6 := X^2 + 2\,X + 5$$
$$P7 := X^2 + 6\,X$$
$$P8 := X^2 + 5\,X + 1$$

```
> P := sort(Expand(mul(P||i, i=1..8)) mod 7) ;
```

$$P := X^{16} + X^{15} + 6\,X^{14} + 4\,X^{13} + 3\,X^{12} + 6\,X^{11} + 6\,X^{10} + 5\,X^9 + 3\,X^8 + 3\,X^7 + 5\,X^6 + X^5 + 2\,X^4 + X^3 + 2\,X^2$$

- Mais on peut avoir des facteurs multiples, qu'il faut éliminer pour que notre exemple soit correct.

```
> Gcd(P, diff(P,X) mod 7) mod 7 ;
```

$$X^5 + 6\,X^4 + 4\,X^3 + 5\,X^2 + 5\,X$$

```
> P := Quo(P, %, X) mod 7 ;
```

$$P := X^{11} + 2\,X^{10} + 4\,X^9 + 2\,X^8 + 2\,X^7 + 5\,X^6 + X^5 + X^4 + 4\,X^2 + 6\,X$$

```
> Gcd(P, diff(P,X) mod 7) mod 7 ;
```

$$1$$

- Donc plus de facteurs multiples.

```
> BerlMatrix := matrix(11,11, (i,j) -> BerlTerm(7,P,i,j)) :
> Kernel := Nullspace(%) mod 7 ;
```

$$\begin{aligned}Kernel := \{&[0, 5, 3, 5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 5, 2, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],\\ &[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],\\ &[0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],\\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]\}\end{aligned}$$

- Les éléments du noyau sont des *vecteurs*, ce qui est techniquement désagréable pour la suite, on les transforme tous en *listes*.

```
> Kernel := map(convert, Kernel, list) ;
```

$$\begin{aligned}Kernel := \{&[0, 5, 3, 5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],\\ &[0, 5, 2, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],\\ &[0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],\\ &[0, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]\}\end{aligned}$$

```
> r := nops(Kernel) ;
```

$$r := 8$$

- Donc 8 facteurs irréductibles. On retire l'élément de noyau correspondant aux solutions triviales.

```
> Kernel := Kernel minus {[1, 0$10]} ;
```

$$\begin{aligned}Kernel := \{&[0, 5, 3, 5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 5, 2, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],\\ &[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],\\ &[0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],\\ &[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]\}\end{aligned}$$

```
> Vvector1 := Kernel[1] ;
```

$$Vvector1 := [0, 5, 3, 5, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

```
> V1 := sort(add(Vvector1[i]*X^(i-1), i=1..11)) ;
```

$$V1 := X^6 + 5\,X^3 + 3\,X^2 + 5\,X$$

```
> factors1 := {seq(Gcd(V1-i, P) mod 7, i=0..6)} minus{1} ;
```

$$factors1 := \{X^2 + 2\,X + 5,\ X^2 + 5\,X + 5,\ X + 1,\ X^3 + 4\,X^2 + 6,\ X^3 + 4\,X^2 + 2\,X\}$$

```
> nops(factors1) ;
```

$$5$$

```
> evalb(P = Expand(mul(gcdi, gcdi=factors1)) mod 7) ;
```

$$true$$

- On voit qu'une décomposition non triviale de P est bien obtenue, mais ce n'est évidemment pas là la décomposition *complète* en facteurs irréductibles, puisqu'on a construit P comme un produit de facteurs de degré 2. Comme seulement 7 cases sont disponibles dans le résultat, certainement certains facteurs ainsi obtenus sont encore réductibles.

- Le point suivant consiste à dire qu'en essayant au besoin les autres éléments «non triviaux» du noyau de la matrice de Berlekamp, on va réussir, en *recoupant* les résultats, à obtenir la factorisation complète. Expliquons ce qu'il faut entendre par *recouper*.

- Prenons un autre vecteur de notre noyau.

```
> Vvector2 := Kernel[2] ;
```

$$Vvector2 := [0,\ 5,\ 2,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1]$$

```
> V2 := sort(add(Vvector2[i]*X^(i-1), i=1..11)) ;
```

$$V2 := X^{10} + 5\,X^3 + 2\,X^2 + 5\,X$$

```
> factors2 := {seq(Gcd(V2-i, P) mod 7, i=0..6)} minus {1} ;
```

$$factors2 := \{X^2 + X,\ X + 2,\ X + 5,\ X^4 + 4\,X^3 + 5\,X^2 + 2\,X + 1,\ X^3 + 4\,X^2 + 2\}$$

```
> nops(factors2) ;
```

5

- On *voit* que la factorisation n'est pas la même que celle précédemment obtenue. On va démontrer juste après que c'est toujours le cas. On obtient donc une «meilleure» factorisation en prenant l'*intersection*, à coups de PGCD, des deux factorisations.

```
> factors12 := {seq(seq(Gcd(f1,f2) mod 7,
> f2 = factors2),
> f1 = factors1)}
> minus {1} ;
```

$$factors12 := \{X^2 + 2\,X + 3,\ X^2 + 2\,X + 5,\ X^2 + 5\,X + 5,\ X,\ X + 1,\ X + 2,\ X + 5,\ X + 6\}$$

```
> nops(factors12) ;
```

8

- La factorisation est donc complète. D'autres fois, il faut encore continuer.

- Expliquons pourquoi la méthode des *recoupements* aboutit. Pour mieux faire comprendre, on se contente du cas $r = 3$. Donc $P = P_1\,P_2\,P_3$ et :

$K\,[X]$ / $P = K\,[X]/\ P_1 + K\,[X]/\ P_2 + K\,[X]/\ P_3$.

- Toute solution de notre équation $V^p - V = 0$ a deux interprétations. Du côté «gauche», c'est un polynôme «modulo P» ; mais du côté droit, comme pour chaque facteur les seules solutions sont les polynômes «constants», ces solutions sont essentiellement des triplets (α_1, α_2, α_3) d'entiers modulo p. La correspondance de la droite vers la gauche n'est rien d'autre que le *théorème des restes chinois.* Le relèvement de (1,0,0) est le produit $B_1\,P_2\,P_3$ de la relation de Bezout $A_1\,P_1 + B_1\,P_2\,P_3 = 1$, car il s'agit d'avoir un polynôme divisible par P_2 et P_3, mais égal à 1 modulo P_1. De la même façon, le relèvement de (0,1,0) (resp. (0,0,1)) est le produit $B_2\,P_1\,P_3$ (resp. $B_3\,P_1\,P_2$) avec des interprétations analogues. Une solution «triviale» est de la forme (α, α, α). Donc une solution non triviale vérifie par exemple $\alpha_1 <> \alpha_2$. Soit V l'interprétation polynôme de cette solution. Alors $V - \alpha_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)\,B_2\,P_1\,P_3 + (\alpha_3 - \alpha_1)\,B_3\,P_1\,P_2$, alors que $V - \alpha_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\,B_1\,P_2\,P_3 + (\alpha_3 - \alpha_2)\,B_3\,P_1\,P_2$. Il en résulte que $V - \alpha_1$ est divisible par P_1 et $V - \alpha_2$ est divisible par P_2. Donc le «traitement» de V va forcément «séparer» les facteurs P_1 et P_2. Maintenant l'ensemble des solutions à gauche correspond à l'ensemble des solutions à droite, et il y a donc forcément une solution à gauche correspondant (sans qu'on le «voie») à un cas où $\alpha_1 <> \alpha_2$. Il en est forcément de même pour l'un des vecteurs de la base du noyau, sinon on aurait $\alpha_1 = \alpha_2$ pour *tous* les éléments du noyau, ce qui est exclu. Le même travail peut être fait en général pour toutes les paires d'indices, d'où le fait que les éléments de la base du noyau suffisent à complètement factoriser. CQFD.

- On est prêt maintenant pour une procédure générale de factorisation. Elle va utiliser notre procédure **BerlTerm** déjà construite.

```
> Berl := proc(p::posint, P::polynom(integer, X))
> local d, r, i,
> BerlMatrix, Kernel,
> Vvector, V,
> result, new_factors ;
> d := degree(P, X) ;
> # Erreur si facteur multiple.
> if Gcd(P, diff(P, X)) mod p <> 1 then
> ERROR(‘The polynom is not squarefree.‘)
> fi ;
> BerlMatrix := matrix(d,d, (i,j) -> BerlTerm(p,P,i,j)) ;
> Kernel := Nullspace(BerlMatrix) mod p ;
> # r = nombre de facteurs irréductibles.
> r := nops(Kernel) ;
> # Si r = 1, le polynôme est irréductible.
> if r = 1 then RETURN([P]) fi ;
> Kernel := map(convert, Kernel, list) ;
> # Suppression de la solution triviale.
> Kernel := Kernel minus {[1, 0$(d-1)]} ;
> # Pour signaler le début de l'algorithme.
> result := {} ;
> # Il faut parcourir les solutions non triviales et # arrêter quand le nombre de facteurs requis est atteint.
> for Vvector in Kernel while nops(result) < r do
> # Expression polynômiale du nouveau vecteur solution considéré.
> V := add(Vvector[i]*X^(i-1), i=1..d) ;
> # Découpage en tranches.
> new_factors := {seq(Gcd(P, V-i) mod p, i=0..(p-1))}
> minus {1} ;
> # Recoupement (éventuel) avec ce qui a été précédemment fait.
> if nops(result) > 1 then
> result := {seq(seq(Gcd(f1,f2) mod p,
> f2 = new_factors),
> f1 = result)}
> minus {1}
> else result := new_factors
> fi
> od ;
> result := convert(result, list) ;
> result := map(sort, result) ;
> result := sort(result,
> (P1,P2)->evalb(degree(P1)<degree(P2))) ;
> RETURN(map(sort,result))
> end :
```

```
> fs := Berl(7, P) ;
```

$$fs := [X+6,\ X+5,\ X+2,\ X+1,\ X,\ X^2+5\,X+5,\ X^2+2\,X+5,\ X^2+2\,X+3]$$

```
> nops(fs) ;
```

$$8$$

```
> P - Expand(mul(f, f=fs)) mod 7 ;
```

$$0$$

```
> Berl(73, X^4+1) ;
```

$$[X+51,\ X+10,\ X+63,\ X+22]$$

- Des polynômes complexes peuvent ainsi être factorisés.

```
> _seed := 1535 :
> P := rndP(50) ;
```

$$P := X^{50} + 2\,X^{49} + 5\,X^{48} + 6\,X^{47} + 3\,X^{46} + 2\,X^{45} + X^{43} + X^{42} + 4\,X^{41} + 2\,X^{40} + 5\,X^{39} + 5\,X^{38} + 6\,X^{37} + 3\,X^{36} + 3\,X^{35} + 3\,X^{31} + 4\,X^{29} + 2\,X^{28} + 3\,X^{27} + 4\,X^{26} + 3\,X^{25} + X^{23} + 3\,X^{22} + 6\,X^{20} + X^{19} + X^{18} + 4\,X^{17} + 3\,X^{16} + 5\,X^{15} + 6\,X^{13} + X^{12} + 6\,X^{11} + 3\,X^{10} + 3\,X^{9} + 6\,X^{8} + X^{7} + 3\,X^{6} + 5\,X^{5} + 3\,X^{4} + 2\,X^{3} + 5\,X + 6$$

```
> fs := Berl(7, P) :
> map(print, fs) :
```

$$X^2 + 5\,X + 2$$

$$X^{11} + X^{10} + X^9 + 6\,X^7 + 6\,X^6 + 5\,X^5 + 5\,X^4 + 4\,X^3 + 2\,X^2 + 4\,X + 4$$

$$X^{37} + 3\,X^{36} + 3\,X^{34} + 5\,X^{33} + X^{31} + 5\,X^{30} + 5\,X^{28} + 3\,X^{27} + 3\,X^{26} + 5\,X^{25} + 3\,X^{24} + 2\,X^{23} + 3\,X^{22} + 3\,X^{21} + 3\,X^{20} + X^{19} + 6\,X^{17} + 3\,X^{16} + 6\,X^{15} + 6\,X^{14} + 6\,X^{13} + 4\,X^{12} + 3\,X^{10} + 6\,X^9 + X^8 + 6\,X^7 + X^6 + 3\,X^5 + 2\,X^4 + 3\,X^3 + 5\,X + 6$$

```
> nops(fs) ;
```

$$3$$

```
> map(item -> Irreduc(item) mod 7, fs) ;
```

$$[true,\ true,\ true]$$

```
> P - Expand(mul(item, item=fs)) mod 7 ;
```

$$0$$

- Un cas irréductible.

```
> Berl(7, fs[1]) ;
```

$$[X^2 + 5\,X + 2]$$

4 Factorisation des polynômes à coefficients entiers.

- Les méthodes efficaces de factorisation des polynômes à coefficients entiers commencent toutes par $\mathbb{Z}_p$-factoriser pour un p premier, ou puissance d'un nombre premier, avec p assez grand. Par examen de la taille des coefficients pour une $\mathbb{Z}$-factorisation éventuelle, on finit par en déduire la $\mathbb{Z}$-factorisation cherchée. Le point clé dans cette direction consiste à majorer les racines (en général complexes) du polynôme à factoriser.

- Soit donc $P = X^n + a_{n-1}\,X^{(n-1)} + ... + a_0$ un polynôme *unitaire* à coefficients complexes. Alors toute racine de P est *strictement* majorée par : $A = 2\max(|a_i|^{(\frac{1}{n-i})},\ i = 0..n-1)$. En effet on peut écrire $P = X^n\ \left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{X^i}\right)\right)$ où $|a_{n-i}| \leq (\frac{A}{2})^i$. La somme de la dernière expression devient une progression géométrique *strictement* majorée par $\frac{A}{2\,X}\ \frac{1}{1-\frac{A}{2\,X}} = \frac{A}{2\,X-A}\quad \leq 1$ si $A \leq |X|$. Donc la dernière inégalité implique P(X) non nul. Le raisonnement est en défaut si $A = 0$, mais ce cas est sans intérêt, car alors toutes les racines sont nulles. Procédure conséquente.

```
> RootsSup := proc(P::polynom(rational, X))
> local dgr ;
> dgr := degree(P, X) ;
> if coeff(P, X, dgr) <> 1 then
> ERROR(sprintf("Polynôme %a non unitaire.", P))
> fi ;
> RETURN(2 * max(seq(evalf(abs(coeff(P, X, i))^(1/(dgr-i))),
> i=0..(dgr-1))))
> end :
```

- Soit donc P un Z-polynôme *unitaire* (il est facile de se ramener à ce cas par «changement de variable») où les coefficients sont majorés par A. Il est élémentaire d'en déduire que les racines (complexes) sont aussi *strictement* majorées en module par $A+1$; il existe des inégalités sensiblement plus fines à ce sujet, mais pour simplifier, on se contentera ici de celle-ci. Puisqu'un facteur potentiel de P est un produit de ($X-\alpha$) où α parcourt certaines racines de P, on en déduit des majorations pour les coefficients d'une Z-factorisation éventuelle. On peut alors conclure en examinant la Z_p-factorisation de P pour p assez grand.

- Examinons par exemple le cas de X^4+1. Ici $A=2$ mais on sait bien que les quatre racines sont de module 1. Tentons la Z_3-factorisation.

```
> RootsSup(X^4+1) ;
> Berl(3, X^4+1) ;
```

$$2.$$
$$[X^2+2\,X+2,\ X^2+X+2]$$

- Il en résulte qu'une Z-factorisation a au plus deux facteurs de degré 2, où les termes constants sont de la forme $3\,n+2$, mais ce pourrait être -1, et on ne peut conclure. On augmente p.

```
> Berl(5, X^4+1) ;
```

$$[X^2+3,\ X^2+2]$$

- Cette fois on a gagné, parce que l'un des facteurs a un terme constant de la forme $5\,n+2$, incompatible avec les modules connus des racines de X^4+1. Donc X^4+1 est Z-irréductible et donc (voir la démonstration du théorème de Gauss sur la factorialité de $Z[\,X]$) Q-irréductible.

```
> irreduc(X^4+1) ;
```

$$true$$

- Avec un polynôme moins trivial.

```
> _seed := 921 :
> P := rndP(10) ;
> RootsSup(P) ;
```

$$P := X^{10}+2\,X^9+3\,X^8+5\,X^7+2\,X^6+4\,X^5+4\,X^4+2\,X^3+5\,X^2+X+6$$
$$4.$$

- Toute racine est majorée par 4, et si une factorisation non triviale est possible, elle aura un facteur de degré au plus 5 où le coefficient du terme après le terme de plus haut degré sera donc majoré par 20 d'où l'idée d'utiliser 41.

```
> Berl(41,P) ;
```

$$[X^{10}+2\,X^9+3\,X^8+5\,X^7+2\,X^6+4\,X^5+4\,X^4+2\,X^3+5\,X^2+X+6]$$

- On est chanceux, le polynôme est donc irréductible.

```
> _seed := 1529 :
> P := rndP(10) ;
> RootsSup(P) ;
```

$$P := X^{10}+6\,X^9+3\,X^8+6\,X^7+X^6+6\,X^5+2\,X^4+2\,X^3+5\,X^2+2\,X+3$$
$$12.$$

- On essaie un nombre premier $> 10\ .\ 12 = 120$, par exemple 127

```
> Berl(127, P) ;
```

$$[X+45,\ X+6,\ X^3+86\,X^2+108\,X+28,\ X^5+123\,X^4+105\,X^3+51\,X^2+13\,X+19]$$

- Le facteur $X+45$ seul ne peut pas provenir d'une Z-factorisation, ni le facteur de degré 3. Dans une telle situation il faut essayer si -6 est racine :

```
> subs(X=-6, P) ;
```

$$3361563$$

- Le produit $(X+6)\,(X+45)$ va commencer par $X^2+51\,X$ et est aussi exclu. Essayons un autre nombre premier, pour voir.

```
> Berl(131, P) ;
```

$$[X^2+104\,X+55,\ X^8+33\,X^7+53\,X^6+15\,X^5+111\,X^4+82\,X^3+41\,X^2+5\,X+112]$$

- Mais le facteur de degré 2 est impossible et le polynôme P est donc Q-irréductible. Vérification.

```
> irreduc(P) ;
```

$$\textit{true}$$

- Il se trouve qu'on aurait pu essayer dans ce cas un entier un peu plus... petit. Ce polynôme est en effet déjà irréductible modulo 5 !

```
> Berl(5,P) ;
```

$$[X^{10}+6\,X^9+3\,X^8+6\,X^7+X^6+6\,X^5+2\,X^4+2\,X^3+5\,X^2+2\,X+3]$$

- Un polynôme aléatoire est presque toujours irréductible. Forçons le choix d'un polynôme exercice certainement *réductible*.

```
> _seed := 940 :
> P1, P2 := rndP(4), rndP(6) :
> P := sort(expand(P1 * P2)) ;
```

$$P := X^{10}+4\,X^9+7\,X^8+16\,X^7+30\,X^6+34\,X^5+49\,X^4+51\,X^3+28\,X^2+30\,X+20$$

```
> RootsSup(P) ;
```

$$8.$$

```
> nextprime(2*5*8) ;
```

$$83$$

```
> Berl(83, P) ;
```

$$[X+9,\ X+74,\ X+68,\ X+2,\ X+1,\ X^2+37\,X+64,\ X^3+62\,X^2+40\,X+67]$$

- On doit donc examiner si -1 et -2 sont racines.

```
> eval(P, X=-1) ;
```

$$0$$

```
> eval(P, X=-2) ;
```

$$0$$

- Le reste est un peu confus. Divisons et réexaminons la question.

```
> P2 := quo(P, (X+1)*(X+2), X) ;
```

$$P2 := X^8+X^7+2\,X^6+8\,X^5+2\,X^4+12\,X^3+9\,X^2+10$$

```
> RootsSup(P2) ;
```

$$4.000000000$$

```
> Berl(37, P2) ;
```

$$[X^2+2,\, X^6+X^5+6\,X^3+2\,X^2+5]$$

- Essai.

```
> rem(P2, X^2+2, X) ;
```

$$0$$

- D'où la Q-factorisation définitive. Vérification.

```
> factor(P) ;
```

$$(X+1)\,(X+2)\,(X^6+X^5+6\,X^3+2\,X^2+5)\,(X^2+2)$$

- En «bricolant» de la sorte, on arrive en général à factoriser les polynômes pas trop compliqués, mais *programmer* une méthode *générale* est autrement complexe. Il serait confortable de savoir faire la factorisation modulo un *grand* nombre premier, mais la méthode de Berlekamp, telle qu'elle a été programmée précédemment, échoue alors, parce que l'équation de Berlekamp $V^p - V = 0$ devient trop difficile à résoudre, à cause de la taille de p.

```
> # Ne pas effectuer sous Maple 6.
> # Berl(nextprime(10^6), P) ;
```

- Beaucoup d'améliorations peuvent être intégrées à la procédure **Berl**, mais elle n'ira jamais très loin pour une factorisation par rapport à de *grands nombres premiers*. Le corps «fini» Z_p est bien trop grand pour mener les calculs bien loin. Penser en particulier à la factorisation qu'il faut utiliser $V^p - V = V\,(V-1)\,...\,V-p-1$, où le nombre de facteurs est justement p!! Une autre solution devient alors beaucoup plus intéressante, basée sur le *lemme de Hensel*.

5 Lemme de Hensel.

- Le *lemme de Hensel* est une méthode largement utilisée en algèbre commutative consistant à résoudre un problème d'abord «approximativement» modulo un idéal m puis à *affiner* en travaillant modulo les puissances de cet idéal, puissances *de plus en plus petites*. Le problème de la factorisation des polynômes est justement un cadre parfait pour comprendre le mécanisme.

- L'outil essentiel pour démontrer le lemme de Hensel consiste à utiliser judicieusement une relation *à la Bezout* pour exprimer un élément quelconque, et pas seulement 1, en fonction de deux éléments u et v premiers entre eux dans un anneau principal.

- Commençons pour comprendre le principe par le cas entier.
  PROPOSITION 5.0.1 *Si u et v sont deux entiers positifs premiers entre eux, alors tout entier x ε [0, uv[s'exprime d'une façon et d'une seule sous la forme :*

$$x = \alpha\,u + \beta\,v \bmod (u\,v)$$

  avec $\alpha \in [0, v[$ et $\beta \in [0, u[$.

  DÉMONSTRATION. Soit $1 = a\,u + b\,v$ une relation de Bezout entre u et v. Par multiplication par x, on obtient $x = x\,a\,u + x\,b\,v$, mais $x\,a$ et $x\,b$ sont en général trop grands ; on les divise donc respectivement par v et u, pour obtenir $x = \alpha\,u + \beta\,v + \gamma\,u\,v$ où on peut choisir α et β dans

les intervalles requis. Si un autre choix était possible, on trouverait par différences une relation $\alpha\, u + \beta\, v = 0 \bmod (u\, v)$ avec α non nul et de module $< v$; mais ceci contredit la divisibilité de α par v.

- Programme conséquent.

```
> Bezout2 := proc(x::nonnegint, u::posint, v::posint)
> local a, b, gcd ;
> gcd := igcdex(u, v, 'a', 'b') ;
> if gcd <> 1 then ERROR(
> sprintf("les nombres %a et %a
> ne sont pas premiers entre eux.",
> u, v))
> fi ;
> RETURN(x*a mod v, x*b mod u)
> end :
```

```
> Bezout2(4, 6, 15) ;
```

```
Error, (in Bezout2) les nombres 6 et 15
            ne sont pas premiers entre eux.
```

```
> Bezout2(4, 3, 5) ;
```

$$3,\, 2$$

```
> evalb(4 = 3 * 3 + 2 * 5 mod (3*5)) ;
```

$$\mathit{true}$$

- Le même résultat est valide pour les polynômes à coefficients dans un corps, sous une forme encore plus confortable.
  PROPOSITION 5.0.2 *Si U et V sont deux polynômes de degrés respectifs m et n, premiers entre eux, alors pour tout polynôme P de degré $< m+n$, il existe un unique polynôme A (resp. B) de degré $< n$ (resp. $< m$) tel que $P = AU + BV$.*

- La démonstration est la même mais un examen de degrés montre qu'on peut même se dispenser de l'imprécision «modulo UV». Le programme conséquent suit.

```
> Bezout3 := proc(P::polynom(rational, X),
> U::polynom(rational, X),
> V::polynom(rational, X))
> local gcd, A, B ;
> gcd := gcdex(U, V, X, 'A', 'B') ;
> if gcd <> 1 then ERROR(
> sprintf("les polynômes %a et %a
> ne sont pas premiers entre eux.",
> U, V))
> fi ;
> RETURN(rem(P*A, V, X), rem(P*B, U, X))
> end :
> _seed := 1925 :
> P, U, V := rndP(5), rndP(3), rndP(3) ;
```

$$P,\, U,\, V := X^5 + 5\,X^4 + 6\,X^3 + 2\,X^2 + 6\,X + 2,\, X^3 + X^2 + X + 6,\, X^3 + 2\,X^2 + 3$$

```
> A, B := Bezout3(P, U, V) ;
```

$$A,\, B := \frac{1}{6} - \frac{7}{18}\,X^2 - \frac{2}{3}\,X,\, \frac{25}{18}\,X^2 + \frac{59}{18}\,X + \frac{1}{3}$$

```
> expand(P - A*U - B*V) ;
```

$$0$$

- Ceci est valable quel que soit le corps, par exemple Z_7, mais il faut adapter la procédure.

```
> 'type/Z7' := proc(obj::anything)
> RETURN(type(obj, And(integer, Range(-1, 7))))
> end :
> type(3, Z7), type(-3, Z7) ;
```

true, *false*

```
> Bezout4 := proc(P::polynom(Z7, X),
> U::polynom(Z7, X),
> V::polynom(Z7, X))
> local gcd, A, B ;
> gcd := Gcdex(U, V, X, 'A', 'B') mod 7 ;
> if gcd <> 1 then ERROR(
> ### WARNING: %x or %X format should be %y or %Y if used with
> floating point arguments
> ### WARNING: incomplete string;  use " to end the string
> sprintf("les polynômes %a et %a
> ne sont pas premiers entre eux.",
> U, V))
> fi ;
> RETURN(Rem(P*A, V, X) mod 7, Rem(P*B, U, X) mod 7)
> end :
```

- On prend les mêmes polynômes, mais l'interprétation est différente.

```
> A, B := Bezout4(P, U, V) ;
```

$$A,\, B := 4\,X + 6,\, X^2 + 6\,X + 5$$

```
> Expand(P - A*U - B*V) mod 7 ;
```

$$0$$

- Un énoncé équivalent est obtenu pour des polynômes à coefficients entiers, à condition de faire intervenir une égalité «modulo p» pour un premier p. Cet énoncé va pouvoir être généralisé au cas p^k où le quotient $Z/\,p^k$ n'est plus un corps.
  PROPOSITION 5.0.3 *: soient U et V des polynômes unitaires à coefficients entiers dans [0, p[, p-premiers entre eux, de degrés respectifs m et $n > 0$. Alors pour tout polynôme P de degré $< m + n$, il existe des polynômes uniques A et B , à coefficients entiers dans [0, p[, de degrés respectifs $< n$ et $< m$, et un polynôme R de degré $< m + n$, tels que $P = A\,U + B\,V + p\,R$.*
  Il suffit en effet d'appliquer le résultat précédent, mais quand on finit le calcul, il n'est exact que modulo p. Il n'y a rien à changer à la procédure **Bezout4**, seule la fin de la vérification est différente.

```
> R := expand(P - A*U - B*V) / 7 ;
```

$$R := -X^4 - 3\,X^3 - 3\,X^2 - 6\,X - 7$$

- On énonce maintenant un résultat analogue modulo p^k. Cette fois l'anneau des polynômes à coefficients modulo p^k n'est plus principal, car il n'est même pas intègre. On se place donc dans une situation *où on suppose donnée* une relation de Bezout entre U et V.
  PROPOSITION 5.0.4 *Soient U et V deux polynômes unitaires à coefficients entiers dans [0, p^k[, de degrés respectifs m et n. On suppose donnée une relation de Bezout : $1 = A\,U + B\,V + p^k\,C$ où le degré de A (resp. B, C) est $< n$ (resp. $< m$, $< m + n$). Alors, pour tout polynôme P à coefficients entiers de degré $< m + n$, il existe des polynômes uniques E (resp. F, G), de degré $< n$ (resp. $< m$, $< m + n$), à coefficients entiers dans [0, p^k[, (resp. dans [0, p^k[, entiers), tels que $P = E\,U + F\,V + p^k\,G$.*

DÉMONSTRATION. Analogue avec les adaptations évidentes. Prendre $E = P\,A$ et $F = P\,B$ est tentant, mais les degrés sont trop grands. Comme V est unitaire, on peut diviser $P\,A$ par V pour obtenir un reste à coefficients entiers E qu'on réduit modulo p^k : $P\,A = Q\,V + E + p^k\,R$, et de même on divise $P\,B$ par U pour obtenir $P\,B = S\,U + F + p^k\,T$. En reportant dans $P = P\,A\,U + P\,B\,V + p^k\,P\,C$, il vient $P = E\,U + F\,V + (Q+S)\,U\,V + p^k\,(P\,C + R\,U + T\,V)$. La réduction modulo p^k de tous les termes laisse un polynôme $U\,V$ *unitaire* de degré $m+n$. Comme $P - E\,U - F\,V$ est de degré $< m+n$, il en résulte que le polynôme $Q+S$ est nul modulo p^k ; on peut donc «glisser» le terme $(Q+S)\,U\,V$ dans le facteur de p^k et finalement le degré résultant est nécessairement $< m+n$. Si on avait deux solutions différentes, on déduirait une relation $E\,U + F\,V = p^k\,R$; en multipliant par A, il vient $E\,A\,U + F\,A\,V = p^k\,A\,R$ ou, compte tenu de la relation presque-Bezout, $E - E\,B\,V + F\,A\,V = p^k\,(A\,R + E\,C)$. Mais si on réduit modulo p^k, E devient divisible par V, ce qui est incompatible avec V *unitaire* et degré de $E <$ degré de V , à moins que E soit nul. CQFD.

```
> Bezout5 := proc
> (p::posint, k::posint, P::polynom(integer, X),
> U::polynom(integer, X), V::polynom(integer, X),
> A::polynom(integer, X), B::polynom(integer, X))
> RETURN(Rem(P*A, V, X) mod p^k, Rem(P*B, U, X) mod p^k)
> end :
```

- On redéfinit **rndP** pour que l'entier modulaire soit libre.

```
> rndP := proc(p::posint, d::posint)
> local rnd ;
> rnd := rand(0..(p-1)) ;
> RETURN(sort(X^d + add(rnd()*X^i, i=0..(d-1))))
> end :
> _seed := 2210 :
> p, k := 7,2 ; U,V := seq(rndP(49,3), i=1..2) ;
```

$$p,\,k := 7,\,2$$

$$U,\,V := X^3 + 43\,X^2 + 28\,X + 48,\; X^3 + 18\,X^2 + 12\,X + 24$$

```
> Gcdex(U, V, X, 'A', 'B') mod 49 ;
```

$$1$$

```
> sort(expand(1-A*U-B*V)/49) ;
```

$$-X^5 - 38\,X^4 - 63\,X^3 - 85\,X^2 - 56\,X - 23$$

```
> P := rndP(49, 5) ;
```

$$P := X^5 + 22\,X^4 + 26\,X^3 + 11\,X^2 + 39\,X + 4$$

```
> E, F := Bezout5(7, 2, P, U, V, A, B) ;
```

$$E,\,F := 43\,X^2 + 22\,X + 19,\; 7\,X^2 + 34\,X + 3$$

```
> expand(P-E*U-F*V)/49 ;
```

$$-X^5 - 41\,X^4 - 58\,X^3 - 84\,X^2 - 49\,X - 20$$

- Nous pouvons maintenant énoncer le *lemme de Hensel* pour les polynômes modulo une puissance de nombre premier.
  PROPOSITION 5.0.5 (lemme de Hensel) *: On suppose qu'on dispose de deux relations :*

$$P = U\,V + p^k\,R;\quad 1 = A\,U + B\,V + p^k\,S;$$

où les degrés de U (resp. V, P, R, A, B, S) sont m (resp. n, $m+n$, $< m+n$, $< n$, $< m$, $< m+n$). Par ailleurs P, U et V sont supposés unitaires, et les coefficients de A, U, B et V sont des entiers dans $[0,\,p^k[$. Alors il existe U_0, V_0, R_0, A_0, U_0, B_0, V_0 et S_0 vérifiant les mêmes conditions

à ceci près que p^k doit être remplacé par $p^{(2\,k)}$. De plus U_0, V_0, A_0 et B_0 sont uniques. Il en résulte la même propriété pour R_0 et S_0.

DÉMONSTRATION. On pose $U_0 = U + p^k\,U_1$ et de même pour V, A et B. En reportant dans les équations à satisfaire et en réduisant modulo $p^{(2\,k)}$, il vient les équations suivantes.

$R = (V_1\,U + U_1\,V) \bmod p^k$

;

$S - A\,U_1 - B\,V_1 = (A_1\,U + B_1\,V) \bmod p^k$

. On va donc trouver les correctifs d'indice 1 par application de **Bezout5**. CQFD.

```
> Hensel := proc
> (p::posint, k::posint, P::polynom(integer, X),
> U::polynom(integer, X), V::polynom(integer, X),
> A::polynom(integer, X), B::polynom(integer, X))
> local R, S, U1, V1, A1, B1 ;
> R := expand(P - U*V)/p^k ;
> S := expand(1 - A*U - B*V)/p^k ;
> if not type(R, polynom(integer, X)) then
> ERROR("P, U, V not coherent for Hensel.")
> fi ;
> if not type(S, polynom(integer, X)) then
> ERROR("A, U, B, V not coherent for Hensel.")
> fi ;
> V1, U1 := Bezout5(p, k, R, U, V, A, B) ;
> A1, B1 := Bezout5(p, k, S-A*U1-B*V1, U, V, A, B) ;
> RETURN(p, 2*k, P, sort(U+p^k*U1), sort(V+p^k*V1),
> sort(A+p^k*A1), sort(B+p^k*B1))
> end :
```

- On a maintenant l'outil ad hoc pour augmenter très vite l'entier modulaire par rapport auquel on effectue une factorisation de polynômes à coefficients entiers. On trouve ainsi assez vite une factorisation éventuelle pour un polynôme à coefficients entiers, ou au contraire son irréductibilité.

```
> _seed := 1713 ;
> P := rndP(10, 10) ;
> RootsSup(P) ;
```

$$\_seed := 1713$$

$$P := X^{10} + 4\,X^9 + 8\,X^8 + 2\,X^7 + 9\,X^6 + 3\,X^5 + 4\,X^4 + X^3 + 9\,X^2 + 5$$

$$8.$$

```
> fs := Berl(11, P) ;
```

$$fs := [X^2 + 4\,X + 2,\ X^8 + 6\,X^6 + 8\,X^4 + 4\,X^3 + 5\,X^2 + 6\,X + 8]$$

- Deux facteurs, c'est la situation idéale pour Hensel. Il faut préparer les données.

```
> U, V := op(fs) ;
```

$$U,\ V := X^2 + 4\,X + 2,\ X^8 + 6\,X^6 + 8\,X^4 + 4\,X^3 + 5\,X^2 + 6\,X + 8$$

```
> Gcdex(U, V, X, 'A', 'B') mod 11 ;
```

$$1$$

```
> p,k,P,U,V,A,B := Hensel(11,1,P,U,V,A,B) : U ; V ;
```

$$X^2 + 92\,X + 68$$

$$X^8 + 33\,X^7 + 50\,X^6 + 55\,X^5 + 19\,X^4 + 81\,X^3 + 93\,X^2 + 94\,X + 41$$

- Le facteur de degré 2 n'est pas possible, car il devrait être $X^2 - 29\,X + ...$ mais ceci est incompatible avec la majoration par 8 des racines. Vérification.

```
> irreduc(P) ;
```

$$\textit{true}$$

- Considérons comme plus haut un cas certainement factorisable.

```
> _seed := 16 :
> P := sort(expand(rndP(5,4)*rndP(5,6))) ;
> RootsSup(P) ;
```

$$P := X^{10} + 2\,X^8 + 4\,X^7 + 2\,X^6 + 12\,X^5 + 4\,X^4 + 16\,X^3 + 8\,X^2 + 8\,X + 8$$

$$3.287503660$$

```
> fs := Berl(11, P) ;
```

$$fs := [X + 4,\ X^4 + 2\,X^2 + 2,\ X^5 + 7\,X^4 + 5\,X^3 + 6\,X^2 + 9\,X + 1]$$

- Une racine est majorée par 3.3 et $X + 4$ ne peut pas venir d'un Z-facteur. Regroupons les deux premiers facteurs.

```
> U := Expand(fs[1]*fs[2]) mod 11 ; V := fs[3] ;
```

$$U := X^5 + 2\,X^3 + 2\,X + 4\,X^4 + 8\,X^2 + 8$$

$$V := X^5 + 7\,X^4 + 5\,X^3 + 6\,X^2 + 9\,X + 1$$

```
> Gcdex(U, V, X, 'A', 'B') mod 11;
```

$$1$$

```
> p,k,P,U,V,A,B := Hensel(11,1,P,U,V,A,B) : U ; V ;
```

$$X^5 + 70\,X^4 + 2\,X^3 + 19\,X^2 + 2\,X + 19$$

$$X^5 + 51\,X^4 + 60\,X^3 + 39\,X^2 + 53\,X + 45$$

- Mais les coefficients de X^4 sont impossibles. On essaie l'autre combinaison.

```
> U := Expand(fs[1]*fs[3]) mod 11 ; V := fs[2] ;
```

$$U := X^6 + 4\,X^3 + 4\,X + 4$$

$$V := X^4 + 2\,X^2 + 2$$

```
> Gcdex(U, V, X, 'A', 'B') mod 11;
```

$$1$$

```
> p,k,P,U,V,A,B := Hensel(11,1,P,U,V,A,B) : U ; V ;
```

$$X^6 + 4\,X^3 + 4\,X + 4$$

$$X^4 + 2\,X^2 + 2$$

- Cette fois les facteurs potentiels restent curieusement constants. Continuons.

```
> p,k,P,U,V,A,B := Hensel(11,2,P,U,V,A,B) : U ; V ;
```

$$X^6 + 4\,X^3 + 4\,X + 4$$

$$X^4 + 2\,X^2 + 2$$

```
> p,k,P,U,V,A,B := Hensel(11,4,P,U,V,A,B) : U ; V ;
```

$$X^6 + 4\,X^3 + 4\,X + 4$$

$$X^4 + 2\,X^2 + 2$$

- Cette fois il s'agit d'une factorisation certaine modulo :

```
> 11^8 ;
```

$$214358881$$

- On est donc certain d'avoir une vraie factorisation entière, qu'on aurait pu essayer plus vite. Vérification.

```
> factor(P) ;
```

$$(X^4 + 2\,X^2 + 2)\,(X^6 + 4\,X^3 + 4\,X + 4)$$

- Jouons à trouver ainsi des factorisations élevées de $X^4 + 1$;

```
> P := X^4+1 ;
```

$$P := X^4 + 1$$

```
> Berl(3, P) ;
```

$$[X^2 + 2\,X + 2,\ X^2 + X + 2]$$

```
> U,V := op(%) ;
> Gcdex(U,V,X,'A','B') mod 3 ;
> p,k := 3, 1 ;
```

$$U,\ V := X^2 + 2\,X + 2,\ X^2 + X + 2$$

$$1$$

$$p,\ k := 3,\ 1$$

```
> for i from 1 to 6 do
> p,k,P,U,V,A,B := Hensel(p,k,P,U,V,A,B)
> od :
> k, p^k ; U ; V ;
```

$$64,\ 34336838202925124846578490892 81$$

$$X^2 + 135295558823394433955461041 5792\,X + 34336838202925124846578490892 80$$

$$X^2 + 208072823205856814510323867 3489\,X + 34336838202925124846578490892 80$$

Bibliographie

Livres de base :

[AF] Jean-Marie Arnaudiès et Henri Fraysse *Algèbre*, Dunod, Paris, 1987. xi+691 pp.

[Dem] Michel Demazure, *Cours d'algèbre. Primalité. Divisibilité. Codes.*, Nouvelle Bibliothèque Mathématique, 1. Cassini, Paris, 1997. xviii+302 pp.

[God] Roger Godement, *Cours d'algèbre.*, Hermann, Paris, 1969

[La] Serge Lang , *Algebra.* Reading, Mass. : Addison–Wesley (1965).

[Se70] J.– P. Serre, *Cours d'arithmétique.* Paris, Press Univ. France, 1970.

[VdW71] B.L. van der Waerden, *Algebra I,II*, New York : Springer Verlag, 1971, 1967.

Livres supplémentaires :

[BS85] Borevich, Z.I., Shafarevich, I.R. *Number Theory.* Traduction anglaise. : New York/London : Academic Press, 1966.

[Coh96] Cohen, H. *A course in computational algebraic number theory.* Graduate Texts in Mathematics, 138. Springer-Verlag, Berlin, 1996. xii+534 pp. Third printing

[Kob87] Neal Koblitz, *A course of number theory and cryptography*, Graduate texts in mathematics 114, New York : Springer Verlag, 1987.

[Knu81] D.E. Knuth *The art of computer programming.* Vol **2**. Seminumerical algorithms. 2nd edition. Addison–Wesley, Reading (1981).

[Li-Ni] Rudolf Lidl et Harald Niederreiter, *Introduction to finite fields and their applications.* Addison–Wesley : Reading, 1983

[Ma-Pa] Yu.I. Manin et A.A.Panchishkin, *Number Theory I : Introduction to Number Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49, Springer-Verlag, 1995, 303 p.

[Mon88] D. Monasse, *Mathématique et Informatique.* Classes préparatoires. Vuibert, 1988

[Ste] S. A. Stepanov, *Codes on algebraic curves.* Kluwer Academic Publishers. vii, 350 p., 1999

[T-MF] Tenenbaum G., Mendes-France, *Les nombres premiers*, Collection Que Sais-Je, Paris, Press Univ. France, 1997

Articles et autres sources :

[AGP94] Alford W.-R. Granville A. Pomerance C. *There are infinitely many Carmichael numbers.* Ann. Math. **139**, 703–722 (1994).

[Bor03] Bornemann, F. *Primes is in P, une avancée accessible à "l'homme ordinaire".* Gazette des Mathématiciens No 98, pp.14-30, Octobre 2003.

[Le1] H.W.Lenstra, Jr., *Factoring integers with elliptic curves*, Ann. Math., 126, no. 3 (1987), 649-673

[Pey] Emmanuel Peyre, *Corps finis et courbes elliptiques*. DESS Cryptologie, sécurité et codage d'information, Modules A1A et A1B, Grenoble, 2002, pp. 1-128

[RSA] R. L. Rivest, A. Shamir et L. M. Adleman, *A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems*, CACM, 21,1978, 120–126

[Stein] William Stein, *An Explicit Approach to Number Theory* (à paraître, voir page internet : `http ://modular.fas.harvard.edu/edu/Fall2001/124/lectures`).