Université Joseph Fourier
Année universitaire 2009/2010
Unité MAT237

# Correction de Devoir surveillé No.1

### Correction de l'exercice I

On considère la courbe déinie en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = 1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)}$.

1. Déterminer le domaine de définition et la période de l'arc paramétré.

   **Solution :**

   La fonction n'est pas définie pour $\sin(\theta/2) = 0$, c'est-à -dire pour $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   $$D_\theta = \mathbb{R} \backslash \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

   La fonction $\rho(\theta)$ est $4\pi$-périodique. Le domaine d'étude de la fonction est :

   $$D_\theta = ]0, 4\pi[ \backslash \{2\pi\}$$

2. Etudier la branche infinie en $\theta = 0$ et donner la position de la courbe par rapport à son asymptote.

   **Solution :**

   On a $\lim_{\theta \to 0^+} \rho(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta \to 0^-} \rho(\theta) = -\infty$.

   $$\begin{aligned} y(\theta) - \tan(0)x(\theta) = y(\theta) &= \sin(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta/2)} \\ &= \sin(\theta) + 2\cos(\theta/2) \end{aligned}$$

   On a donc $\lim_{\theta \to 0} y(\theta) = 2$. La courbe a la droite $y = 2$ pour asymptote en $\theta \to 0$.

   $$\begin{aligned} y(\theta) - 2 &= \theta + 2(1 - \frac{\theta^2}{2}) - 2 + \circ(\theta^2) \\ &= \theta - \frac{\theta^2}{2} + \circ(\theta^2) \end{aligned}$$

   La fonction $y(\theta) - 2$ est positive pour $\theta$ positif proche de zéro et négative pour $\theta$ négatif proche de zéro. La courbe paramétrée d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)}$ est donc au dessus de l'asymptote pour $0 < \theta < \varepsilon$.

3. Même question en $\theta = 2\pi$.

   **Solution :**

   On a $\lim_{\theta \to 2\pi^+} \rho(\theta) = -\infty$ et $\lim_{\theta \to 2\pi^-} \rho(\theta) = +\infty$.

   $$y(\theta) - \tan(2\pi)x(\theta) = y(\theta) = \sin(\theta) + 2\cos(\theta/2)$$

   On a donc $\lim_{\theta \to 2\pi} y(\theta) = -2$. La courbe a la droite $y = -2$ pour asymptote en $\theta \to 2\pi$.

$$
\begin{aligned}
y(\theta)+2 &= \sin(\theta-2\pi)-2\cos(\theta/2-\pi)+2 \\
&= \theta-2\pi-2(1-(\theta/2-\pi)^2)+2+\circ((\theta/2-\pi)^2) \\
&= \theta+2\pi+\frac{(\theta-2\pi)^2}{2}+\circ((\theta-2\pi)^2)
\end{aligned}
$$

La fonction $y(\theta)+2$ est positive pour $\theta-2\pi$ positif proche de zéro et négative pour $\theta-2\pi$ négatif proche de zéro. La courbe paramétrée d'équation polaire $\rho(\theta)=1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}$ est donc en dessous de l'asymptote pour $2\pi-\varepsilon<\theta<2\pi$ et au dessus de l'asymptote pour $2\pi<\theta<2\pi+\varepsilon$.

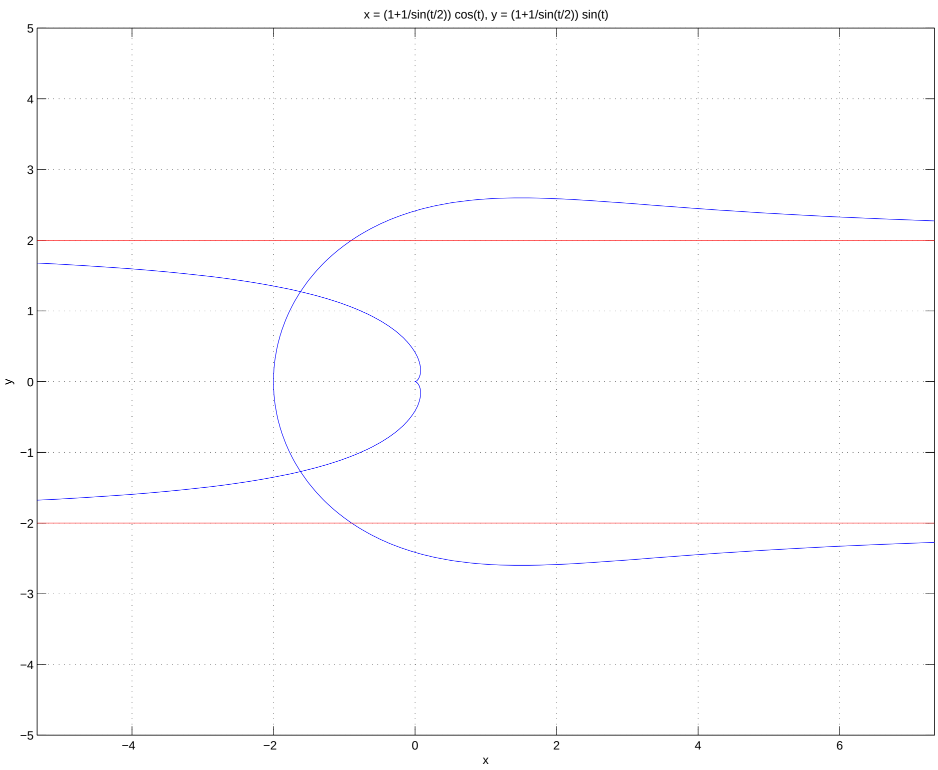
**Solution :**

La courbe coupe l'axe des abscisses pour $\theta$ vérifiant $y(\theta)=0$.

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)})\sin(\theta) &= 0 \qquad \forall\theta\in]0,4\pi[\backslash\{2\pi\} \\
\sin(\theta)(\sin(\theta/2)+1) &= 0 \qquad \forall\theta\in]0,4\pi[\backslash\{2\pi\}
\end{aligned}
$$

La courbe coupe l'axe des abscisses pour $\theta\in\{\pi,3\pi\}$.

4. Tracer la courbe.



## Correction de l'exercice II

1. Etudier les branches infinies et les points singuliers de la courbe $x(t) = t^2+t^4, y(t) = t^3+t^5$.
**Solution :**
La courbe admet des branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.

- Cas $t \to +\infty$.

  On a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

  $$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$$

  La courbe admet une branche parabolique dans la direction $Oy$ en $+\infty$.

- Cas $t \to -\infty$

  On a $\lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$.

  $$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} t = -\infty$$

  La courbe admet une branche parabolique dans la direction $Oy$ en $-\infty$.

- Etude des points singuliers

  $$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2t(1+2t^2) \\ \dot{y}(t) = t^2(3+5t^2) \end{cases}$$

  On trouve un point singulier pour $t = 0$.

  $$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 2(1+6t^2) \\ \ddot{y}(t) = 2t(3+10t^2) \end{cases}$$

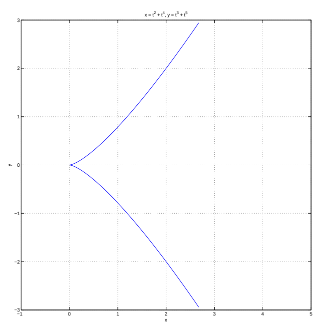
  On a $(\ddot{x}(0), \ddot{y}(0)) = (2, 0)$. Donc $p = 2$.

  $$\begin{cases} \dddot{x}(t) = 24t \\ \dddot{y}(t) = 6(1+10t^2) \end{cases}$$

  On a $(\dddot{x}(0), \dddot{y}(0)) = (0, 6)$. Donc $q = 3$.

  En $t = 0$, la courbe admet un point de rebroussement de première espèce.

2. Tracer la courbe.



**Correction de l'exercice III**

1. Déterminer un repère de Frénet pour la *néphroide* d'équation paramétrique $x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t)$ et $y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t)$.

   **Solution :**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3(\sin(3t) - \sin(t)) \\ \dot{y}(t) = 3(\cos(t) - \cos(3t)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) &= 18 - 18(\sin(t)\sin(3t) + \cos(t)\cos(3t)) \\ &= 18(1 - \cos(2t)) \\ &= 36\sin^2(t) \end{aligned}$$

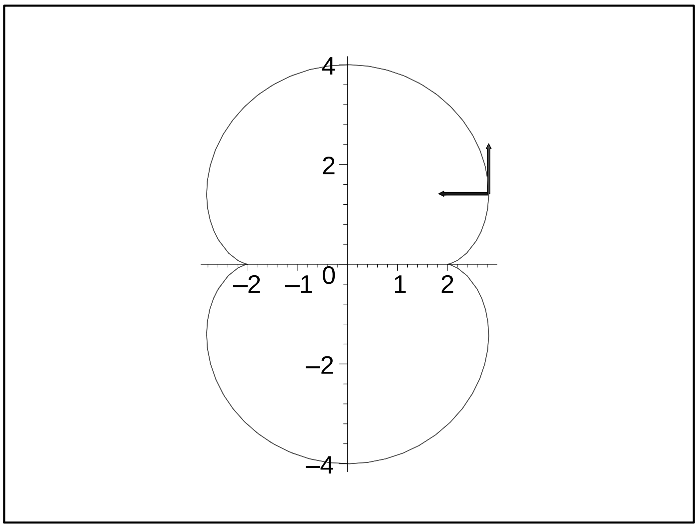
$$\vec{T} = \frac{1}{2|\sin(t)|}\begin{pmatrix} \sin(3t) - \sin(t) \\ \cos(t) - \cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2|\sin(t)|}\begin{pmatrix} \cos(3t) - \cos(t) \\ \sin(3t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

2. Trouver la longueur d'arc de la partie qui correspond aux valeurs $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

   **Solution :**

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6|\sin(t)|dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\sin(t)dt \\ &= 6(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$



**Correction de l'exercice IV**

Considérons le repère $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ obtenu en tournant $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'un angle $-\alpha$, de manière que $\overrightarrow{u}$ soit tangent à l'axe et $\overrightarrow{v}$ soit orthogonal. Précisément:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{u} & = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} - \sin\alpha\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v} & = \sin\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\alpha\,\overrightarrow{j} \end{array} \right.$$

En utilisant l'indication dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a

$$\begin{array}{rcl} M(t) & = & (t-\sin t)\overrightarrow{u} + (1-\cos t)\overrightarrow{v} \\ & = & [(t-\sin t)\cos\alpha + (1-\cos t)\sin\alpha]\,\overrightarrow{i} + [-(t-\sin t)\sin\alpha + (1-\cos t)\cos\alpha]\,\overrightarrow{j} \\ & = & [\sin\alpha + t\cos\alpha - \sin(t+\alpha)]\,\overrightarrow{i} + [\cos\alpha + t\cos\alpha - \cos(t+\alpha)]\,\overrightarrow{j} \end{array}$$