

CORPS FINIS, NOMBRES  $p$ -ADIQUES, FORMES MODULAIRES ET COURBES ELLIPTIQUES (groupe de lecture à l'École Normale Supérieure de Lyon au second semestre 2015-2016 autour de Cours d'arithmétique de J.- P. Serre)

1. Corps finis. Théorème de Chevalley-Waring. Loi de réciprocité quadratique.
2. Corps  $p$ -adiques. Solutions des congruences. Lemme de Hensel.
3. Symbole de Hilbert . Propriétés locales et globales.
4. Formes quadratiques sur  $\mathbb{Q}_p$  et sur  $\mathbb{Q}$  . Principe de Minkowski-Hasse .
5. Exemples de formes modulaires. Fonction de Ramanujan, son calcul et ces propriétés. Congruence de Ramanujan.
6. Séries d'Eisenstein et leurs développements de Fourier. Nombres de Bernoulli et congruences de Kummer.
7. Fonction Delta comme un produit infini.
8. Structure des formes modulaires pour  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Applications. Preuve de la congruence de Ramanujan. L'interprétation galoisienne de cette congruence
9. Définition géométrique des formes modulaires comme fonctions de réseaux.
10. Espaces de formes modulaires. Formes modulaires avec caractères de Dirichlet.
11. Séries  $\theta$  et formes quadratiques. Exemples des formes quadratiques binaires. Formules pour les sommes de carrés.
12. Fonctions  $\theta$ , la formule de Poisson et les réseaux.
13. Courbes elliptiques. Lois d'addition et la méthode de sécantes et tangentes. Forme de Weierstrass.
14. Description analytique des courbes elliptiques complexes et leurs homomorphismes. Théorème d'addition de Weierstrass.
15. La courbe de Tate. Points d'ordre fini (§3.1.16 de [3])
16. Opérateurs de Hecke  $T(n)$ , leur action sur les formes modulaires, et leurs produits. La transformation de Mellin d'une forme modulaire et produits eulériens.

### Références :

1. Serre J.- P., Cours d'arithmétique, Paris 1970
2. Z.I. Borevitch, I. R. Chafarevitch, Théorie des nombres, traduction française, Paris 1967
3. Yu.I. Manin et A.A.Panchishkin, Introduction to Modern Number Theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49 (2nd ed.), Springer-Verlag, 2005, 514 p.
4. A.Pantchichkine, <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/GDL16>



